فصل ۳. توان های گویا و عبارت های جبری

۱. ریشه و توان

۲. ریشه nام

۳. توان های گویا

۴. عبارت های جبری

۱. ریشه و توان + ۲. ریشه nام

توان عملی است که از ضرب های تکراری جلوگیری می کند.

$$a^n = \underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\ \text{مرتبه}}$$

$$1^1=1^2=\cdots=1^{1399}=1^n=1 \qquad 0^1=0^2=0^3=\cdots=0^{1399}=0^n=0$$

$$\sqrt{1}=\sqrt[3]{1}=\sqrt[4]{1}=\cdots=\sqrt[1399]{1}=\sqrt[n]{1}=1 \qquad \sqrt{0}=\sqrt[3]{0}=\cdots=\sqrt[1399]{0}=\sqrt[n]{0}=0$$

$$a^m\times a^n=a^{m+n} \qquad a^m\div a^n=a^{m-n} \qquad a^m\times b^m=(ab)^m \qquad a^n\div b^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^0=1 \quad (a\neq 0) \qquad (a^m)^n=a^{mn} \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

ریشه های دوم و سوم:

- اگر a یک عدد حقیقی باشد. a^2 را توان دوم a می نامیم. به عنوان مثال $9=(\pm3)^2$ ← عدد ۹ توان دوم ۳± است.
- اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ را ریشه های دوم a می نامیم. به عنوان مثال ریشه های دوم عدد $\frac{1}{16}$ اعداد $\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$ و $-\sqrt{\frac{1}{16}}=-\frac{1}{4}$ می باشند زیرا: $\left(\pm\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$
- عددهای منفی ریشه دوم ندارند و ریشه دوم عدد صفر، صفر است. هم چنین هر عدد حقیقی مثبت دو ریشه دوم قرینه هم دارد.
- اگر b یک عدد حقیقی باشد، b^3 را مکعب b می نامیم. به عنوان مثال مکعب عدد ۳- برابر است با $(-3)^3=-27$.
- اگر b یک عدد حقیقی باشد، عدد $\sqrt[3]{b}$ را ریشه سوم آن می نامیم و داریم $(\sqrt[3]{b})^3=b$

به عنوان مثال ریشه سوم عدد ۶۴ برابر است با $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

- هر عدد حقیقی (مثبت، صفر، منفی) دقیقاً یک ریشه سوم هم علامت با خود دارد.
- اگر a یک عدد حقیقی باشد آنگاه $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$ ← $\sqrt[3]{-729}=-\sqrt[3]{729}=-\sqrt[3]{9^3}=-9$
- اگر a یک عدد حقیقی باشد آنگاه $\sqrt{a^2}=|a|$ و $\sqrt[3]{a^3}=a$

$$|a|=\begin{cases} a & a\geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$$

مثال. مقدار عبارت $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}$ را به دست آورید.

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}=\big|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\text{عدد منفی}}\big|+(1+\sqrt{2})=-(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})$$

$$=-1+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

ریشه‌های چهارم و پنجم:

همانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشه‌های چهارم و پنجم را تعریف کرد. اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt[4]{a}$ و $-\sqrt[4]{a}$ را ریشه‌های چهارم a می‌نامند و اگر b یک عدد حقیقی باشد $\sqrt[5]{b}$ را ریشه پنجم b می‌نامیم.

به همین ترتیب می‌توان ریشه‌های ششم، هفتم، هشتم، ...، n ام، ... را تعریف کرد.

◀ اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را ریشه n ام عدد a می‌نامیم هرگاه $b^n=a$ و می‌نویسیم:
$b=\sqrt[n]{a}$

بنابراین:

$$b=\sqrt[n]{a} \xleftrightarrow{\text{دوطرفه}} b^n=a$$

در واقع داریم: $\sqrt[n]{a^n}=a$ (اگر a منفی باشد، n نمی‌تواند زوج باشد!)

◀ خط قرمز رادیکال‌ها:

$\sqrt[\text{زوج}]{\text{منفی}}$ = مقدار ندارد

در فرمول $\sqrt[n]{a^n}=a$ اگر n زوج باشد، a نباید عددی منفی باشد.

تذکر:

اگر a یک عدد مثبت باشد، آنگاه این عدد دارای دو ریشه زوج قرینه هم و یک ریشه فرد مثبت است.

اگر a یک عدد منفی باشد، آنگاه این عدد ریشه زوج ندارد ولی دارای یک ریشه فرد منفی است.

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید.

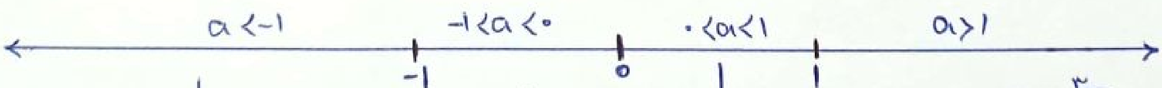
$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{8}-1}=\sqrt[5]{2-1}=\sqrt[5]{1}=1$$

$$2\sqrt[3]{-343}+\sqrt[4]{(-2)^4}=2\sqrt[3]{(-7)^3}+\sqrt[4]{(-2)^4}=2(-7)+|-2|=-14+2=-12$$

$-\frac{1}{128}$ ریشه هفتم ← چون $(-\frac{1}{2})^7=-\frac{1}{128} \Rightarrow \sqrt[7]{-\frac{1}{128}}=-\frac{1}{2}$

-7 ریشه‌های دوم ← $\sqrt{-7}$ = تعریف نشده (ریشه زوج برای اعداد منفی تعریف نشده!)

مقایسه ریشه‌ها:



$a>1$: $a>\sqrt{a}>\sqrt[3]{a}>\dots>\sqrt{1}$

$0<a<1$: $a<\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}<\dots<1$

$-1<a<0$: $a>\sqrt[3]{a}>\sqrt[5]{a}>\dots>-1$

$a<-1$: $a<\sqrt[3]{a}<\sqrt[5]{a}<\dots$

(اعداد منفی ریشه زوج ندارند!)

← اگر $a>1$ آنگاه با بزرگ شدن ریشه، حاصل عدد کوچک‌تر می‌شود.

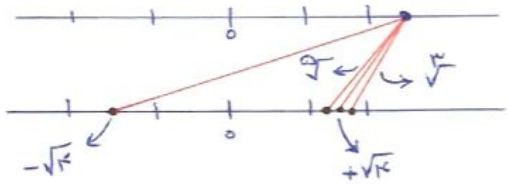
← اگر $0<a<1$ آنگاه با بزرگ شدن ریشه، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود.

← اگر $-1<a<0$ آنگاه با بزرگ شدن ریشه، عدد حاصل کوچک‌تر می‌شود. (ریشه زوج اعداد منفی تعریف نمی‌شود)

← اگر $a<-1$ آنگاه با بزرگ شدن ریشه، عدد حاصل بزرگ‌تر می‌شود. (ریشه زوج اعداد منفی تعریف نمی‌شود)

مثال. در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشهٔ سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است، آن‌ها را مشخص کنید.

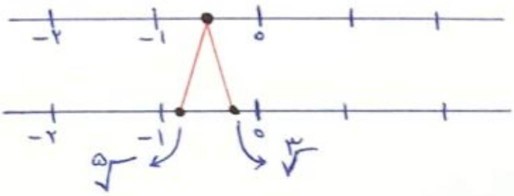
حل آ. عدد مشخص شده روی محور، مثبت است پس این عدد دارای دو ریشهٔ چهارم قرینه هم و یک ریشه سوم و یک ریشه پنجم است.
از طرفی بنابر تذکر قبلی $\sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a}$ بنابراین



حل ب. بعنوان تمرین!

حل پ. بعنوان تمرین!

حل ت. عدد مشخص شده، عددی منفی بین ۰ و ۱- می‌باشد. این عدد ریشهٔ چهارم ندارد امّا یک ریشه سوم و یک ریشه پنجم دارد که بنابر تذکر قبلی رابطه $\sqrt[3]{a} < \sqrt[5]{a}$ بین آن‌ها برقرار است. بنابراین



مثال. اگر $a=\sqrt[3]{5}$ باشد، حاصل a^3+1 را بدست آورید.

$$a=\sqrt[3]{5} \Rightarrow a^3=5$$
$$\Rightarrow a^3+1=(5)+1=6$$

مثال. اگر $\sqrt[3]{x}=-8$ باشد، حاصل $\sqrt[9]{x}+1$ را بدست آورید.

$$\sqrt[3]{x}=-8 \Rightarrow x=(-8)^3=((-2)^3)^3=(-2)^9 \Rightarrow \sqrt[9]{x}+1=\sqrt[9]{(-2)^9}+1=-2+1=-1$$

تمرین. اگر $x=\sqrt[3]{5}$ باشد حاصل عبارت $\frac{\sqrt{x^9}}{\sqrt{5}}$ را به دست آورید.

تمرین. عدد ۰/۸ را در نظر بگیرید. ریشه های سوم، چهارم و پنجم این عدد را به صورت تقریبی روی محور اعداد نمایش دهید.

تمرین. در هر یک از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

$\sqrt[5]{x}=-0/1$ $\qquad$ $\sqrt[4]{x}=1$

تمرین. در نامساوی $2<\sqrt[3]{x}<3$ چه اعداد طبیعی را می توان قرار داد؟

کوتاه سخن اینکه:

- n زوج
  - $a>0$: $\sqrt[n]{a^n}=a$
  - $a<0$: $\sqrt[n]{a^n}=|a|$
- n فرد
  - $a>0$: $\sqrt[n]{a^n}=a$
  - $a<0$: $\sqrt[n]{a^n}=a$

- n زوج
  - $a>0$: $(\sqrt[n]{a})^n=a$
  - $a<0$: $(\sqrt[n]{a})^n=$ تعریف نشده
- n فرد
  - $a>0$: $(\sqrt[n]{a})^n=a$
  - $a<0$: $(\sqrt[n]{a})^n=a$

۳. توان های گویا

◀ اگر a یک عدد حقیقی مثبت و n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ باشد $(n\in \mathbb{N}$ و $n\geq ۲)$ آنگاه توان $\frac{۱}{n}$ عدد a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

مثال: $۲^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt[۲]{۲}=\sqrt{۲}$ مثال: $۱۵^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۱۵}$

– اگر a منفی باشد، آنگاه $a^{\frac{۱}{n}}$ تعریف نشده است. به عنوان مثال عبارت هایی مانند $(-۱)^{\frac{۱}{۵}}$ ، $(-۳)^{\frac{۲}{۴}}$ و ... که پایه آن ها عددی منفی است، تعریف نمی‌شود.

◀ توجه!

در توان رسانی عدد ۱- به توان $\frac{۱}{۳}$ داریم: $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۶}$ ولی عبارت

$$(-۱)^{\frac{۱}{۳}}=(-۱)^{\frac{۲}{۶}}=\left(\sqrt[۶]{-۱}\right)^{۲}$$

بی‌معناست.

برای آنکه بدون هیچ محدودیتی بتوانیم توان رسانی به توان اعداد گویا را انجام دهیم و از خواص اساسی توان رسانی استفاده کنیم، قرارداد جهانی بر این است که:

"در توان رسانی به توان اعداد گویا، پایه همواره مثبت باشد."

◀ تعریف عبارت $a^{\frac{m}{n}}$:

اگر $a>۰$ و $\frac{m}{n}$ یک عدد کسری غیرصحیح باشد آنگاه $a^{\frac{m}{n}}$ را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$$

قاعده تبدیل توان گویا به رادیکال و برعکس

$$a^{-\frac{۱}{n}}=\frac{۱}{a^{\frac{۱}{n}}}\Rightarrow a^{-\frac{m}{n}}=\frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}}$$

مثال. هر یک از توان های کسری زیر را به صورت رادیکال بنویسید.

$۴^{-\frac{۱}{۳}}$ $\left((-۲)^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$ $(۲^{-۱}-۵^{۰})^{\frac{۱}{۱۰}}$ $۵^{\frac{۲}{۵}}$

$$۴^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۴^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}}$$

$$\left((-۲)^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}=۴^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

$(۲^{-۱}-۵^{۰})^{\frac{۱}{۱۰}}=\left(\frac{۱}{۲}-۱\right)^{\frac{۱}{۱۰}}=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۱}{۱۰}}=$ تعریف نشده (پایه منفی است!)

$$۵^{\frac{۲}{۵}}=\sqrt[۵]{۵^{۲}}=\sqrt[۵]{۲۵}$$

تمرین. به صورت رادیکال بنویسید: $(-۵)^{\frac{۱}{۵}}$, $\left(۲^{۰}+\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱}\right)^{-\frac{۳}{۵}}$

مثال. رادیکال های زیر را درصورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$$\sqrt[3]{32} \qquad \sqrt[7]{-3} \qquad \sqrt[4]{\frac{1}{8}} \qquad \sqrt[5]{3^4}$$

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[7]{-3} \neq (-3)^{\frac{1}{7}}$$ امکان پذیر نیست

$$\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[4]{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}$$

تمرین. رادیکال های $\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$ و $\sqrt[3]{-2}$ را بصورت توان گویا بنویسید.

تذکر. (ساده کردن رادیکال های تو در تو)

اگر $a \geq 0$، برای هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

زیرا:

$$a \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

مثال: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{x}}} = ?$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[2]{x}}} = \sqrt[3\times5\times2]{x} = \sqrt[30]{x}$$

تذکر.

۱. توان رساندن رادیکال ها: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

۲. تقسیم ریشه و توان بر یک عدد: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

۳. بردن یک عدد داخل رادیکال و برعکس: $a\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\cdot b}$ (به شرط تعریف شدن رادیکال!)

۴. ساده کردن رادیکال ها: $\sqrt[\text{فرد}]{a^{\text{فرد}}} = a$ ، $\sqrt[\text{زوج}]{a^{\text{زوج}}} = |a|$

مثال. ساده کنید.

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt{2}}} \qquad B = \sqrt{\sqrt[3]{64}} \qquad C = \sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}$$

$$A = \sqrt{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{7}{12}}}$$

$$B = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$C = \sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt{2^3 \times \sqrt[4]{2}}} = \sqrt[4]{2^{12} \times 2} = \sqrt[4]{2^{13}} = 2^{\frac{13}{4}}$$

تمرین. حاصل هر عبارت را بدست آورید.

$$x = \left(\sqrt{5}\right)^{(2-\sqrt{2})^{(2+\sqrt{2})}} \qquad y = 3\sqrt{32\sqrt[4]{256}} \div \sqrt{\sqrt{64}}$$

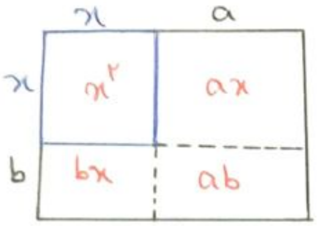
۴. عبارت های جبری

تعریف اتحاد :

اگر دو عبارت جبری به گونه ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، حاصل یکسان داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن ها را اتحاد می نامیم. به عبارتی، اتحاد یک تساوی جبری همیشه برقرار است.

ـ استفاده از اتحادها باعث سرعت عمل در محاسبات ریاضی می شود.

ـ اتحادهای مشهور عبارتند از : ۱ـ اتحاد مربع دوجمله ای ۲ـ اتحاد مزدوج ۳ـ اتحاد جمله مشترک ۴ـ اتحاد مکعب دوجمله ای ۵ـ اتحادهای چاق و لاغر (مجموع و تفاضل مکعبات)



◀ مربعی به ضلع x را در نظر بگیرید به ابعاد آن a و b را اضافه می کنیم

چون $a \neq b$ پس شکل حاصل یک مستطیل به ابعاد زیر است :

درازا $\rightarrow (x+a)$ پهنا $\rightarrow (x+b)$

مساحت جدید : $(x+a)(x+b) = x^2 + \underbrace{ax + bx} + ab$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

مشترک به توان ۲

مجموع جملات غیرمشترک در مشترک

حاصل ضرب جملات غیرمشترک

این اتحاد به اتحاد جمله مشترک معروف است. در این اتحاد اگر $a=b$ فرض کنیم داریم :

$$\text{if}: a=b \Rightarrow (x+a)(x+a) = x^2 + (a+a)x + a.a$$

$$\Rightarrow (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

مربع جمله اولی

دو برابر اولی در دومی

مربع جمله دوم

این اتحاد به اتحاد مربع دوجمله ای معروف است.

در اتحاد جمله مشترک اگر $a=-b$ فرض کنیم خواهیم داشت :

$$\text{if}: a=-b \Rightarrow (x-b)(x+b) = x^2 + \underbrace{(-b+b)}x + (-b)b$$

$$= x^2 - b^2$$

مربع اولی

مربع دومی

این اتحاد به اتحاد مزدوج (تفاضل مربعات) معروف است.

◀ اتحاد مکعب دوجمله‌ای:

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

(اولی + دومی)^3 = مکعب اولی + ۳ برابر مربع اولی در دومی + ۳ برابر اولی در مربع دومی + مکعب دومی

◀ اتحادهای چاق و لاغر:

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \qquad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

(اولی ± دومی)(مربع اولی ∓ اولی در دومی + مربع دومی) = مکعب اولی ± مکعب دومی

← اگر به علامت ab در پرانتز چاق توجه کنیم، مشاهده می‌شود که اگر بین a و b در پرانتز لاغر علامت + بوده، ضریب ab منفی و اگر بین a و b علامت − باشد، ضریب ab مثبت است.

− اثبات رابطه اولی: تک‌تک عبارت‌های پرانتز لاغر را در تک‌تک عبارت‌های پرانتز چاق ضرب می‌کنیم

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-\underbrace{a^2b+\overbrace{ab^2+ba^2}^{0}}_{0}-ab^2+b^3=a^3+b^3$$

اتحادهای اصلی:

مربع ⟵ $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

مزدوج ⟵ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

مشترک ⟵ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)(x)+ab$

مکعب ⟵ $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

چاق و لاغر ⟵ $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

مثال. با استفاده از اتحادها، جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

مربع: $(x+\underline{5})^2=\underline{x^2}+\underset{2(x)(5)}{\underbrace{10x}}+\underline{25}$

مزدوج: $(\underline{\tfrac13 x}+4y^2)(\underline{\tfrac13 x}-\underline{4y^2})=\frac19x^2-\underline{16y^2}$

مکعب: $(\underline{3}+5y)^3=\underset{3^3}{\underbrace{27}}+\underset{3(3)^2(5y)}{\underbrace{\underline{135y}}}+\underset{3(3)(5y)^2}{\underbrace{\underline{225y^2}}}+\underset{(5y)^3}{\underbrace{\underline{125y^3}}}$

چاق و لاغر: $(5xy-\underline{2})(\underline{25x^2y^2}+\underset{(5xy)(2)}{\underbrace{10xy}}+\underline{4})=\underset{(5xy)^3}{\underbrace{\underline{125x^3y^3}}}-\underset{(2)^3}{\underbrace{\underline{8}}}$

مشترک: $(\underline{2x}+5)(\underline{2x}-3)=\underset{(2x)^2}{\underbrace{4x^2}}+\underset{(+5-3)(2x)}{\underbrace{\underline{4x}}}-\underset{(+5)(-3)}{\underbrace{\underline{15}}}$

تمرین . جاهای خالی را به کمک اتحادها پر کنید.

$$(x^2+\dots)(\dots-x^2+\dots)=\dots+\dots$$

$$(\dots-\dots)^2=\frac{4}{9}x^2-4xy+\dots$$

$$(\dots-\dots)^3=27x^3-\dots+\dots-8$$

$$(\dots+1)^2=\dots+8x+\dots$$

اتحادهای فرعی:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \qquad a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab \qquad (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \qquad a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$

مثال. اگر $x+y=5$ و $xy=-3$ باشد، حاصل x^2+y^2 و x^4+y^4 را به دست آورید.

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(5)^2-2(-3)=25+6=31$$

$$x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(\underbrace{x^2+y^2}_{x^2+y^2=31})^2-2\underbrace{x^2y^2}_{xy=-3}=(31)^2-2(-3)^2=961-18=943$$

مثال. اگر $x+y=7$ و $xy=11$، حاصل x^3+y^3 را به دست آورید.

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=(7)^3-3(11)(7)=343-231=112$$

مثال. اگر $x+\frac{1}{x}=5$ باشد، حاصل $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

عبارت $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ را A فرض می‌کنیم و دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow A^2=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

مربع

$$=(\sqrt{x})^2+2(\cancel{\sqrt{x}})\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+2+\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)+2$$

$$=(5)+2=7$$

$$\xrightarrow[A>0]{\sqrt{\ }} A=\sqrt{7}$$

مثال. حاصل عبارت $\sqrt{7-\sqrt{13}}+\sqrt{7+\sqrt{13}}$ را به دست آورید.

$$A=\sqrt{7-\sqrt{13}}+\sqrt{7+\sqrt{13}} \implies A^2=\left(\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2+2\sqrt{(7-\sqrt{13})(7+\sqrt{13})}+\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}\right)^2$$

$$=7-\cancel{\sqrt{13}}+2\sqrt{49-13}+7+\cancel{\sqrt{13}}$$

$$=14+2\sqrt{36}=14+2(6)=26$$

$$\xrightarrow[A>0]{\sqrt{\ }} A=\sqrt{26}$$

تمرین. اگر $x+y=8$ و $x.y=9$ باشد، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

$$x^6+y^6=? \qquad x^3+y^3=? \qquad x^4+y^4=? \qquad x^2+y^2=?$$

تمرین. اگر $x+\frac{1}{x}=2$ باشد، حاصل $20x^{1399}+\frac{5}{x^{1400}}$ را به دست آورید.

تجزیه:

عکس عمل ضرب چند جمله‌ای‌ها، تجزیه است. (در واقع، در تجزیه یک چند جمله‌ای را به صورت حاصل ضرب دو یا چند چند جمله‌ای دیگر در می‌آوریم.)

— روش‌های مختلف تجزیه عبارتند از: فاکتورگیری — استفاده از اتحادها — دسته‌بندی جملات — کم یا زیاد کردن برخی جملات — شکستن جملات

مثال. تجزیه کنید.

$x^2-13x+40=(x-8)(x-5)$ مشترک

$8x^3-27=(2x)^3-(3)^3=(2x-3)(4x^2+6x+9)$ چاق و لاغر

$16x^4-25y^2=(4x^2)^2-(5y)^2=(4x^2-5y)(4x^2+5y)$ مزدوج

$x^4+8x=x(x^3+8)=x((x)^3+(2)^3)=x(x+2)(x^2-2x+4)$ فاکتورگیری و چاق و لاغر

$$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

مزدوج و چاق و لاغر

$x^6-2x^3+1=(x^3)^2-2(x^3)+1=(x^3-1)^2$ مربع و چاق و لاغر

$$=((x-1)(x^2+x+1))^2$$

$x^3-x^2-20x=x(x^2-x-20)=x(x-5)(x+4)$ فاکتورگیری و مشترک

$$a^3-2ab+a^2b-2b^2=(a^3+a^2b)+(-2ab-2b^2)$$
$$=a^2(a+b)-2b(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-2b)$$

دسته‌بندی مناسب و فاکتورگیری

$$x^3+x+10=x^3+x+8+2=(x^3+8)+(x+2)$$
$$=(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)$$
$$=(x+2)(x^2-2x+4+1)=(x+2)(x^2-2x+5)$$

شکستن، دسته‌بندی مناسب، چاق و لاغر، فاکتورگیری

$$4x^2+16x+15=(2x)^2+8(2x)+15$$
$$=(2x+5)(2x+3)$$

شکستن، مشترک

$2x^2 - x - 15 = ?$

فرض می‌کنیم $A = 2x^2 - x - 15$ باشد، دو طرف تساوی را در ضریب x^2 (یعنی ۲) ضرب می‌کنیم

$$2A = 4x^2 - 2x - 30 = (2x)^2 - 1(2x) - 30 = (2x-6)(2x+5)$$

جمع مشترک — جمع غیرمشترک‌ها — ضرب غیرمشترک‌ها

$$\Rightarrow \cancel{2}A = \cancel{2}(x-3)(2x+5) \Rightarrow A = (x-3)(2x+5)$$

$2x^2 + 7x + 3 = ?$

$$A = 2x^2 + 7x + 3 \xrightarrow{\times 2} 2A = 4x^2 + 14x + 6$$

$$\Rightarrow 2A = (2x)^2 + 7(2x) + 6 = (2x+6)(2x+1)$$

$$\Rightarrow \cancel{2}A = \cancel{2}(x+3)(2x+1) \Rightarrow A = (x+3)(2x+1)$$

تذکر. برای تجزیه عبارت ax^2+bx+c در صورتی که a مربع کامل نباشد، می‌توانیم عبارت را برابر A در نظر بگیریم، سپس دو طرف تساوی را در a ضرب کنیم تا جملهٔ مربع کامل بسازیم، در نهایت از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه استفاده کنیم. [روش A گیری]

تمرین. تجزیه کنید.

$x^3 + x + 2 =$ $\quad$ $2x^2 + 3x + 1 =$ $\quad$ $x^6 - 1 =$

$3x^2 - x - 2 =$ $\quad$ $x^3 - 3x + 2 =$ $\quad$ $a^2 + 6ab + 9b^2 - 25 =$

$x^3 - 2xy + x^2y - 2y^2 =$ $\quad$ $x^3 - 10x + 12$

تمرین. به کمک اتحادها حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$19^3 =$ $\quad$ $107 \times 93 =$ $\quad$ $99^2 =$ $\quad$ $99 \times 101 =$

عبارت‌های گویا:

یک عبارت کسری که صورت و مخرج آن، چندجمله‌ای باشد را عبارت گویا می‌نامیم. مثل: $\frac{xy}{1+x^2}$

– تمام چندجمله‌ای‌ها، عبارت‌های گویا هستند.

– عبارت $\frac{\text{عدد}}{0}$ تعریف نشده می‌باشد. به عبارتی در ریاضی تقسیم بر صفر بی‌معنی است، بنابراین یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

مثال. عبارت گویای $A = \frac{\sqrt{2}}{(x^2+1)(2x-1)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

ابتدا مخرج را مساوی صفر قرار می‌دهیم و جواب‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم:

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ جواب ندارد $\quad$ $2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

بنابراین عبارت گویای A به ازای $x=\frac{1}{2}$ تعریف نمی‌شود (مقدار ندارد). [توجه کنید که x^2+1 همواره مثبت است و هیچگاه صفر نمی‌شود!]

تمرین. مشخص کنید که هر یک از عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری از x مقدار ندارند.

$$\frac{5x+3}{4x+1} \qquad \frac{2x^2}{x^2-4x} \qquad \frac{-x+3}{x^2+3}$$

ساده کردن عبارت‌های گویا:

برای ساده کردن عبارت‌های گویا، ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم و سپس عامل‌های مشترک را از صورت و مخرج Delete می‌کنیم.

مثال. عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^2-x-6}{2x^2+5x+2} \qquad \frac{y^3-9y}{y^2+6y+9} \qquad \frac{x^2-16}{x^2-x-12}$$

$$\frac{x^2-16}{x^2-x-12} = \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x-4)}(x+3)} = \frac{x+4}{x+3}$$

$$\frac{y^3-9y}{y^2+6y+9} = \frac{y(y^2-9)}{(y+3)(y+3)} = \frac{y(y-3)\cancel{(y+3)}}{(y+3)\cancel{(y+3)}} = \frac{y(y-3)}{y+3}$$

$$\frac{x^2-x-6}{2x^2+5x+2} = \frac{(x-3)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(2x+1)} = \frac{x-3}{2x+1}$$

$$\xrightarrow{A\ \text{گیری}} A = 2x^2+5x+2 \xrightarrow{\times 2} 2A = 4x^2+10x+4$$

$$\cancel{2}A = (2x)^2+5(2x)+4 = \underbrace{(2x+4)}_{\cancel{2}(x+2)}(2x+1)$$

$$\Rightarrow A=(x+2)(2x+1)$$

تمرین. ساده کنید:

$$A=\frac{x^2y+xy}{x^3-x} \qquad B=\frac{x^2-5x-14}{x^2+x-2}$$

گویا کردن مخرج کسرها:

گاهی اوقات لازم است برای ساده کردن عبارت‌های کسری، مخرج کسر را بدون رادیکال بنویسیم. این کار را گویا کردن مخرج کسر می‌نامیم.

به عبارتی مخرج رادیکالی خوشایند نیست، باید حذف شود. مثلاً اگر $A=\frac{1}{\sqrt{5}}$، برای از بین بردن رادیکال مخرج کافی است صورت و مخرج را در $\sqrt{5}$ ضرب کنیم:

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{1\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

همچنین برای گویا کردن مخرج کسر $B=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ کافی است صورت و مخرج را در $\sqrt[3]{4^2}$ ضرب کنیم:

$$B=\frac{2}{\sqrt[3]{4}}\times\frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}}=\frac{2\times\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4\times4^2}}=\frac{2\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4^3}}=\frac{\cancel{2}^{1}\sqrt[3]{16}}{\cancel{4}_{2}}=\frac{\sqrt[3]{16}}{2}=\frac{\sqrt[3]{8\times2}}{2}$$

$$=\frac{\cancel{2}\sqrt[3]{2}}{\cancel{2}}=\sqrt[3]{2}$$

تذکر. برای گویا کردن کسرهایی که به یکی از صورت های $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ یا $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ هستند باید به ترتیب از اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر کمک بگیریم. یعنی صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی مخرج ضرب کنیم.

مزدوج اند

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(\sqrt{a}+b)(\sqrt{a}-b)=a-b^2$$

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$

مزدوج اند

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$$

$$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x+y$$

مثال. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$A=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\qquad B=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-3}\qquad C=\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}\qquad D=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$$

$$A=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{\cancel{(x-y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{(x-y)}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$B=\frac{1}{\sqrt[3]{x}-3}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}{(\sqrt[3]{x})^3-(3)^3}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9}{x-27}$$

$$C=\frac{2}{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}\times\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2}=\frac{\cancel{2}(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})}{\underbrace{18-20}_{\cancel{-2}\ -1}}=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$$

$$D=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{y})^3}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x+y}$$

مثال. حاصل عبارت $\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5}-\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}-\frac{100}{x-25}$ را به دست آورید.

$$\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5}\times\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}=\frac{(\sqrt{x}+5)^2}{x-25}$$

$$\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}\times\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-5}=\frac{(\sqrt{x}-5)^2}{x-25}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5}-\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5}-\frac{100}{x-25}=\frac{(\sqrt{x}+5)^2}{x-25}-\frac{(\sqrt{x}-5)^2}{x-25}-\frac{100}{x-25}=\frac{x+5\sqrt{x}+25-x+5\sqrt{x}-25-100}{x-25}$$

$$=\frac{10\sqrt{x}-100}{x-25}$$

تمرین. گویا کنید:

$$\frac{3}{3+\sqrt{7}}\qquad\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}\qquad\frac{6}{3\sqrt[3]{2}-1}\qquad\frac{2}{3\sqrt{2}+6}$$