## فصل سوم ؛ توان های گویا و عبارت های جبری :

قوانین مهم این فصل به صورت خلاصه در جدول های زیر بیان شده اند.

| قانون | مثال |
|---|---|
| $a>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>0$ | $\sqrt[10]{0/01}>0$ |
| $a<0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}<0$ | $\sqrt[11]{-0/01}<0$ |
| $\left.\begin{matrix}0<a<1\\ m>n\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[m]{a}$ | $\sqrt[4]{0/125}<\sqrt[7]{0/125}$ |
| $\left.\begin{matrix}a>1\\ m>n\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[m]{a}$ | $\sqrt[4]{1/01}>\sqrt[7]{1/01}$ |
| $\left.\begin{matrix}-1<a<0\\ m>n\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[m]{a}$ | $\sqrt[4]{-0/125}>\sqrt[7]{-0/125}$ |
| $\left.\begin{matrix}a<-1\\ m>n\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[m]{a}$ | $\sqrt[4]{-1/01}<\sqrt[7]{-1/01}$ |
| $\left.\begin{matrix}a=\pm 1\\ m>n\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sqrt[n]{a}=\sqrt[m]{a}$ | $\sqrt[11]{-1}=\sqrt[13]{-1}=-1$ و $\sqrt[11]{1}=\sqrt[12]{1}=1$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a>0$ | n زوج | a دارای دو ریشهٔ n اُم $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است. | ۱۶ دارای دو ریشهٔ چهارم $\sqrt[4]{16}=2$ و $-\sqrt[4]{16}=-2$ است. |
| | n فرد | a دارای یک ریشهٔ n اُم $\sqrt[n]{a}$ است. | ۳۲ دارای یک ریشهٔ پنجم $\sqrt[5]{32}=2$ است. |
| $a<0$ | n زوج | a دارای ریشهٔ n اُم نیست. | ۱۶- دارای ریشهٔ چهارم نیست. |
| | n فرد | a دارای یک ریشهٔ n اُم $\sqrt[n]{a}$ است. | ۳۲- دارای یک ریشهٔ پنجم $\sqrt[5]{-32}=-2$ است. |

| قانون | مثال |
|---|---|
| $1^n=1$ | $1^{100}=1$ |
| $0^n=0 \qquad (n\in\mathbb{N})$ | $0^{100}=0$ |
| $a^0=1 \qquad (a\neq 0)$ | $100^0=1$ |
| $a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad (a\neq 0)$ | $2^{-100}=\frac{1}{2^{100}}$ |
| $a^n\times a^m=a^{n+m}$ | $2^7\times 2^8=2^{15}$ |
| $a^n\times b^n=(ab)^n$ | $2^7\times 3^7=6^7$ |
| $a^n\div a^m=a^{n-m} \quad (a\neq 0)$ | $2^{10}\div 2^4=2^6$ |
| $a^n\div b^n=(\frac{a}{b})^n \quad (b\neq 0)$ | $2^{10}\div 3^{10}=(\frac{2}{3})^{10}$ |
| $a^n+b^n\neq(a+b)^n$ | $2^2+3^2\neq 5^2$ |
| $\underbrace{a^n+a^n+\dots+a^n}_{\text{a بار}}=a\times a^n=a^{n+1}$ | $3^4+3^4+3^4=3\times 3^4=3^5$ |
| $(a^n)^m=a^{nm}$ | $(3^7)^8=3^{7\times 8}=3^{56}$ |
| $(a^n)^m\neq a^{n^m}$ | $(2^2)^3=2^6\neq 2^{2^3}=2^8$ |

| قانون | مثال |
|---|---|
| $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a} \qquad (a>0)$ | $81^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$ |
| $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad (a>0)$ | $81^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{81^5}=\sqrt[4]{3^{20}}=3^5 \ , \ 4^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4^3}}=\frac{1}{\sqrt{2^6}}=\frac{1}{2^3}$ |
| $1^{\frac{m}{n}}=1$ | $1^{-\frac{3}{7}}=1$ |
| $a^{\frac{kp}{kn}}=a^{\frac{p}{n}} \qquad (a>0,k\neq 0)$ | $3^{\frac{17}{51}}=3^{\frac{17\times 1}{17\times 3}}=3^{\frac{1}{3}}$ |
| $\sqrt[kn]{a^{kp}}=\sqrt[n]{a^p} \qquad (k\neq 0)$ | $\sqrt[22]{4^{33}}=\sqrt[11\times 2]{4^{11\times 3}}=\sqrt[2]{4^3}=(\sqrt{4})^3=2^3=8$ |
| $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ | $\sqrt[5]{\sqrt{7}}=\sqrt[10]{7} \ , \ \sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[12]{5}$ |
| $\sqrt[p]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}}=\sqrt[mnp]{a}$ | $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{1024^3}}}=\sqrt[30]{(1024)^3}=\sqrt[30]{(2^{10})^3}=\sqrt[30]{2^{30}}=2$ |

همچنین تمامی روابطی که در پایه نهم برای ضرب و تقسیم ریشه دوم و سوم خواندیم ، برای ریشه nام نیز صدق می کنند .

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{ab} & a,b>0 \text{ و } n \text{ زوج}\\ \sqrt[n]{ab} & a,b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد}\end{cases}$$

**نکته:** برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را اینگونه تعریف می کنیم ؛

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

باید به این نکته توجه کرد که اگر $a<0$ باشد ، توان $\frac{1}{n}$ آن تعریف نمیشود .به عنوان مثال عبارتی مانند $(-2)^{\frac{1}{3}}$ تعریف نمی شود.

برای اعداد طبیعی n و m ، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ عدد مثبت a را اینگونه تعریف می کنیم ؛

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

**اتحاد ها :**

**اتحاد مربع دو جمله ای :** $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

**اتحاد مزدوج :** $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

**اتحاد مربع سه جمله ای :** $(a+b+c)^2=a^2+b^2+2ab+c^2+2bc+2ca$

**اتحاد جمله مشترک :** $(a+x)(a+y)=a^2+(x+y)a+xy$

**اتحاد مکعب مجموع :** $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

**اتحاد مکعب تفاضل :** $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

**اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دو جمله :** $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ $\quad$ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

**نکته:** عبارت $(x-1)(x+1)=x^2-1$ را درنظر بگیرید ، هر یک از عبارت های $(x-1)$ و $(x+1)$ یک شمارنده $x^2-1$ محسوب می شوند . همچنین $x^2-1$ یک مضرب این دو عبارت محسوب می شود .

مضرب های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله ای ، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت های جبری دیگر (ویا همزمان هردو ) به دست می آیند ؛

**نکته :** یک عبارت گویا به ازای مقادیری از متغیر که مخرج آن را صفر می کند ، تعریف نمی شود . به عنوان مثال عبارت $\frac{x^2+3x}{x-2}$ به ازای $x=2$ تعریف نمی شود چون مخرج آن صفر می شود .

**گویا کردن مخرج های گنگ :**

برای گویا کردن مخرج های گنگ با توجه به صورت سوال صورت و مخرج عبارت را یا در مزدوج مخرج و یا در بخش دوم اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات و یا ... ضرب می کنیم به گونه ای که عبارت های گنگ (رادیکالی) از مخرج حذف شوند .

اگر در مخرج یک عبارت دو جمله ای با ریشه دو داشتیم ، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

اگر در مخرج یک عبارت دو جمله ای با ریشه سه داشتیم ، صورت و مخرج را در بخش دوم اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات ضرب می کنیم.