فصل ششم ، شمارش ، بدون شمردن :

اصل ضرب : اگر عملی از دو قسمت مختلف تشکیل شده باشد که قسمت اول به a روش و قسمت دوم به b روش قابل انجام باشد ، این عمل به $a \times b$ روش قابل انجام است . (برای انجام عمل مورد نظر هر دو مرحله نیاز است .)

اصل جمع : اگر عملی را بتوان به دو روش کلی انجام داد، به طوری که روش اول به a روش و روش دوم به b روش قابل انجام باشد ، این عمل به a+b روش قابل انجام است . (عمل مورد نظر نهایتا قرار است به یک روش انجام شود.)

روش به دست آوردن تعداد شمارنده های یک عدد طبیعی :

برای به دست آوردن تعداد شمارنده های یک عدد طبیعی ، ابتدا لازم است عدد را به شمارنده های اول آن تجزیه کنیم ؛ $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

سپس توان های شمارنده های اول را با یک جمع می کنیم و در هم ضرب می کنیم . $(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24$

برای به دست آوردن شمارنده های زوج ، همه توان ها را با یک جمع می کنیم ، به جز توان ۲ !

جایگشت :

فاکتوریل : اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را n فاکتوریل می خوانیم و با نماد n! نشان می دهیم . مطابق این تعریف :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

نکته : طبق قرار داد $0! = 1$ می باشد.

نکته : می توان ثابت کرد : $n(n-1)(n-2)\dots(n-k) = \frac{n!}{(n-k-1)!}$

جایگشت : اگر چند شیء متمایز داشته باشیم ، به هر حالت چیدن آن ها کنار هم یک یک جایگشت از آن اشیاء گفته می شود .

طبق اصل ضرب تعداد جایگشت های n شیء متمایز در کنار هم برابر است با n! .

نکته : اگر n شیء داشته باشیم که n_1 تا از آن ها از یک نوع ، n_2 تا از نوع دوم ، ... و n_k تا از آن ها از نوع kام باشند ، تعداد جایگشت های آن ها کنار هم برابر است با : $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

ترتیب : اگر بخواهیم r شئ از بین n شئ متمایز انتخاب کنیم ، به نحوی که هر انتخاب متمایز از دیگر انتخاب ها باشد (تکرار نداشته باشیم) طبق رابطه زیر عمل می کنیم ؛ $p(n.r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad n \geq r$

به هر جایگشت r شئ از بین n شئ متمایز یک **ترتیب** r تایی از n شئ متمایز گفته می شود . تعداد ترتیب های r شئ از بین n شئ متمایز را با $p(n.r)$ نمایش می دهند.

ترکیب : به هر انتخاب انتخاب r شئ از n شئ متمایز که ترتیب انتخاب شدن اشیأ در آن اهمیتی نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیر مجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی ، یک ترکیب r تایی از n شئ می گویند .

تعداد ترکیب های r تایی از n شئ متمایز را با C(n,r) یا $\binom{n}{r}$ نمایش می دهند که برابر است با : $(n \geq r) \qquad C(n.r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$

نکته : اگر محل قرار گیری اعضا یا ترتیب انتخاب آن ها مهم باشد ، از ترتیب استفاده می کنیم ، در غیر این صورت از ترکیب استفاده می شود.

نکته : با توجه به تعریف ترکیب می توان نشان داد :

$$\binom{n}{0}=1 \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{0}=1$$

$$\binom{n}{1}=n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{1}=10$$

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{10}{4}=\binom{10}{6}$$

رابطه پاسکال : $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$

نکته : طبق اصل ضرب تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با 2^n .

نکته : $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$