فصل ۶. شمارش، بدون شمردن

۱. شمارش
۲. جایگشت
۳. ترکیب

۱. شمارش computation

در این درس به دنبال یافتن ابزارهایی برای شمارش هستیم. قواعد شمارش، قواعدی هستند که به ما کمک می کنند بعضی از اتفاقات که به سادگی قابل شمارش نیستند، قابل محاسبه شوند. به طور مثال، زمانی که یک سکه "coin" ۱۰ بار پرتاب می شود، شاید به سادگی نتوانیم حالات ایجاد شده را شمارش کنیم در صورتی که با دانستن قواعد شمارش حالات به وجود آمده را بهتر می توان دید. اکنون شاید این سؤال مطرح شود که اصولاً چرا ما به دنبال شمارش کردن (بدون شمردن!) هستیم؟!

در جواب این سؤال می توان گفت که قواعد شمارش پایه ای اساسی برای محاسبهٔ احتمالات است که در فصل بعدی توضیح داده خواهد شد.

قواعد شمارش عبارتند از: ۱. اصل جمع ۲. اصل ضرب ۳. جایگشت ۴. ترکیب

اصل جمع و اصل ضرب موضوع درس اول ماست و جایگشت را در درس دوم و هم چنین ترکیب را در درس سوم مورد بررسی قرار می دهیم.

اصل جمع

+

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به m+n طریق می توان عمل اول **یا** عمل دوم را انجام داد.

- در این اصل تکیه بر روی «یا» می باشد، بنابراین حرف یا نشان دهندهٔ اصل جمع است.
- در این اصل، کار در یک مرحله و به طور غیر همزمان انجام پذیر است.
- اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است؛ یعنی می توان آن را برای بیش تر از دو عمل نیز به کار برد به شرطی که عمل ها با هم انجام نگیرند.

مثال. می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز پایه دهم و ۱۱ دانش آموز پایه یازدهم، یک دانش آموز را انتخاب کنیم. این کار به چند طریق انجام پذیر است؟

توجه کنید که در نهایت یک دانش آموز پایه دهم **یا** پایه یازدهم انتخاب می شود، بنابراین اصل جمع داریم:

$$m+n=۱۰+۱۱=۲۱$$

یعنی به ۲۱ روش این کار شدنی است.

مثال. در کتاب خانه ای ۱۷ کتاب ریاضی و ۱۳ کتاب فیزیک وجود دارد. اگر دانش آموزی فقط یک کتاب با موضوع ریاضی یا فیزیک مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

بنابر اصل جمع داریم:

$$۱۷+۱۳=۳۰$$

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله‌ی اول و مرحله‌ی دوم انجام پذیرد به طوری که در مرحله‌ی اول m طریق **و** در مرحله‌ی دوم هرکدام از این m طریق به n طریق انجام پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است.

- حرف «و» نشان دهنده‌ی اصل ضرب است.
- اصل ضرب را اصل اساسی شمارش نیز می‌نامند.
- اصل ضرب قابل تعمیم به بیش از دو مرحله است یعنی اصل ضرب را می‌توان برای بیش از دو عمل نیز به کار برد به شرطی که عمل‌ها مرحله به مرحله انجام گیرد، یعنی مستقل از هم باشند. [مقصود از مستقل بودن دو مرحله از یکدیگر، آن است که تعداد حالات مرحله دوم به روشی که مرحله اول انجام شده، بستگی نداشته باشد]
- توجه کنید! در اصل ضرب، عملی در دو یا چند مرحله و به طور همزمان انجام پذیر است.

مثال. یک کارخانه خودروسازی، خودروهایی در ۵ رنگ با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

بنابر اصل ضرب داریم: ۵ × ۲ × ۳ = ۳۰

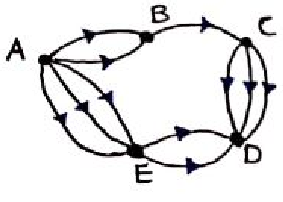
مثال. چند عدد ۳ رقمی وجود دارد؟

هر عدد ۳ رقمی از سه قسمت یکان، دهگان و صدگان تشکیل شده است. از صدگان شروع می‌کنیم که می‌توانیم از بین {۰، ۱، ۲، ...، ۹} هر رقمی به غیر از صفر را انتخاب کنیم یعنی ۹ حالت. (زیرا رقم صفر در صدگان نمی‌تواند قرار گیرد!)
اکنون در دهگان باز هم ۹ حالت قبل را داریم به اضافه آن که صفر نیز اجازه قرار گرفتن دارد (۱۰ حالت) چرا که تکرار مجاز است (در صورت مسأله شرطی برای عدم تکرار نیست!) در یکان نیز همین ۱۰ حالت که در دهگان قرار داده می‌توانند قرار گیرند:

۹ (صدگان) ۱۰ (دهگان) ۱۰ (یکان) ⇐ اصل ضرب ⇐ ۹ × ۱۰ × ۱۰ = ۹۰۰

مهم اما واقعی!!!

اگر در سؤال گفته شود کار اول یا کار دوم یا ... انجام می‌شود برای حل سؤال از اصل جمع و اگر در سؤال گفته شود کار اول و کار دوم و ... انجام می‌شود، برای حل سؤال از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. البته در برخی از مسائل لازم است همزمان از هر دو اصل ضرب و اصل جمع استفاده شود.



مثال. شکل مقابل نشان دهنده‌ی جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E است. اگر همه‌ی جاده‌ها یکطرفه باشند، به چند طریق می‌توان از A به D رفت؟

← برای پر کردن رقم هزارگان ۴ امکان، برای پر کردن رقم صدگان ۳ امکان (از رقمی که در هزارگان قرار گرفته است نباید استفاده کرد!)

و به همین ترتیب برای پر کردن رقم دهگان و رقم یکان به ترتیب ۲ و ۱ امکان وجود دارد. پس بنابر اصل ضرب داریم:

تعداد اعداد حاصل = ۴×۳×۲×۱ = ۲۴

← عددی فرد است که رقم یکان آن فرد باشد. بنابراین ابتدا باید رقم یکان آن را با یکی از ارقام ۱ یا ۳ پر کنیم (۲ حالت). رقم صدگان را می‌توان با یکی از ۳ رقم باقی‌مانده پر کرد (۳ حالت) و در نهایت هر یک از دو رقم باقی‌مانده را می‌توان در مکان دهگان قرار داد (۲ حالت)

پس بنابر اصل ضرب، تعداد اعداد ۳ رقمی فرد با ارقام متمایز ۱و۲و۳و۴ برابر است با:

۳×۲×۲ = ۱۲

تذکر مهم. در حل مسائل مربوط به یافتن تعداد اعداد با شرایط مشخص به کمک ارقامی که رقم صفر نیز یکی از آن‌ها باشد، در صورتی که در شرایط مسئله رقم صفر تعیین کننده باشد، لازم است برای حل آن دو حالت برای مکانی که رقم صفر در آن قرار می‌گیرد، در نظر بگیریم.

مثال. با ارقام {۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰} چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول آن که صفر در یکان قرار بگیرد (به عبارتی ما حالت صفر را جدا می‌کنیم) و دیگری ۲ یا ۴ در رقم یکان قرار گیرد.

I. صفر را در یکان قرار می‌دهیم (۱ حالت) اکنون ۵ حالت برای صدگان وجود دارد: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ تکرار مجاز نیست!
بنابراین ۴ حالت برای دهگان باقی می‌ماند.

II. ۲ یا ۴ را در یکان قرار می‌دهیم (۲ حالت) اکنون برای صدگان به غیر از صفر و یکی از ارقام ۲ یا ۴ که در یکان قرار گرفت بقیه ارقام که ۴ تا هستند باقی می‌ماند. برای دهگان صفر می‌تواند قرار گیرد، بنابراین باز هم برای دهگان ۴ رقم باقی می‌ماند.

ص د ی

(۵) (۴) (۱) ⇨ ۵×۴×۱ = ۲۰

(۴) (۴) (۲) ⇨ ۴×۴×۲ = ۳۲

ص د ی

$\xrightarrow{+}$ ۲۰+۳۲ = ۵۲
تعداد حالات

تذکر.

۱. اعداد یا رمز یا شمارهٔ سریال‌ها می‌توانند دارای ارقام تکراری باشند یا نباشند مانند ۲۲۱ یا ۱۲۳. هنگام شمارش آن‌ها در صورت سؤال این مطلب گفته نشود و شرطی بیان نشود، پیش‌فرض مسئله آن است که تکرار ارقام مجاز است.

۲. همیشه برای ساختن اعداد باید سمت چپ به راست حرکت کنیم، مگر آن که شرطی در مسئله قید شود، مانند زوج بودن یا فرد بودن یا مضرب ۵ بودن یا ... که در این صورت ابتدا شرط را اعمال می‌کنیم. مثلاً برای فرد بودن ابتدا یکان را می‌سازیم، پس مجدداً به سمت چپ رفته و از آن‌جا شروع به ساخت عدد می‌کنیم.

توسط دو مسیر ABCD و AED می‌توان از شهر A به شهر D رفت:

$$\underbrace{(۲\times۱\times۳)}_{ABCD} \overset{\text{یا}}{+} \underbrace{(۳\times۲)}_{AED} = ۶+۶ = ۱۲$$

مثال. یک سکه Coin را دو بار و یک تاس TUS را سه بار پرتاب می‌کنیم. چند حالت مختلف ممکن است به وجود بیاید.

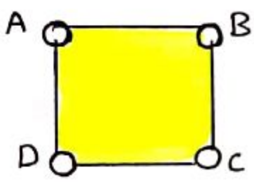
در پرتاب یک سکه، ۲ حالت "رو" و "پشت" و در پرتاب یک تاس، ۶ حالت « ۱و۲و...و۶ » به وجود می‌آید، پس بنابر اصل ضرب تعداد حالت‌های مختلف برابر است با:

$$\underbrace{۲\times۲}_{\text{سکه}} \times \underbrace{۶\times۶\times۶}_{\text{تاس}} = ۸۶۴$$

مثال. یک آزمون تستی شامل ۸ سؤال سه گزینه‌ای و ۷ سؤال دو گزینه‌ای (بله - خیر) می‌باشد و فردی قصد دارد به سؤال‌ها بصورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب بدهد؟

برای هر سؤال سه گزینه‌ای ۳ انتخاب و برای هر سؤال دو گزینه‌ای ۲ انتخاب وجود دارد. بنابراین تعداد راه‌های پاسخ‌گویی به تمام سؤالات برابر است با:

$$\underbrace{(۳\times۳\times\cdots\times۳)}_{\text{۸ سؤال ۳ گزینه‌ای}} \times \underbrace{(۲\times۲\times\cdots\times۲)}_{\text{۷ سؤال ۲ گزینه‌ای}} = ۳^{۸}\times۲^{۷}$$



مثال. می‌خواهیم رأس‌های چهارضلعی مقابل را با ۳ رنگ آبی، سفید و سیاه رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

ب) به چند طریق این کار را انجام پذیر است به گونه‌ای که رأس‌های A و C هم‌رنگ باشند و رأس‌هایی که به هم وصل هستند، هم‌رنگ نباشند؟

← هر یک از رأس‌ها را می‌توان با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد. پس بنابر اصل ضرب به ۸۱=۳×۳×۳×۳ طریق شدنی است.

← رأس‌های A و C را به ۳ طریق می‌توان رنگ‌آمیزی کرد (هر دو را آبی یا هر دو را سفید یا هر دو را سیاه رنگ کرد) و هر یک از رأس‌های B و D را به ۲ طریق می‌توان رنگ‌آمیزی کرد، پس بنابر اصل ضرب به ۱۲=۲×۲×۳ طریق امکان‌پذیر است.

مثال. با رقم‌های ۱و۲و۳و۴

الف) چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد چهاررقمی بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت؟

ج) چند عدد سه‌رقمی فرد با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

← برای نوشتن عدد ۴ رقمی باید مکان‌های یکان، دهگان، صدگان و هزارگان را با ارقام ۱و۲و۳و۴ پر کرد. با توجه به اینکه تکرار ارقام در نوشتن عدد مجاز است (مثلاً ۲۱۲۲)، پس هر یک از این مکان‌ها را به ۴ طریق می‌توان پر کرد:

$$\underset{\text{ه}}{\underline{۴}}\quad \underset{\text{ص}}{\underline{۴}}\quad \underset{\text{د}}{\underline{۴}}\quad \underset{\text{ی}}{\underline{۴}} \xrightarrow[\text{ضرب}]{\text{اصل}} ۴\times۴\times۴\times۴ = ۲۵۶$$

تمرینات :

۱. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۴ و ۵

- چند عدد پنج رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟
- چند عدد چهار رقمی مضرب پنج می‌توان نوشت؟

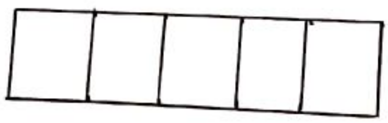
۲. مسأله‌ای طرح کنید که جواب آن $۱۷ = ۳ \times ۳ + ۲ \times ۲ \times ۲$ باشد.

۳. رمزی از ۳ حرف تشکیل شده است که هر کدام می‌توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

۴. با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۷

- چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟
- 〃 〃 〃 با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟
- 〃 〃 〃 〃 فرد با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت؟
- 〃 〃 〃 〃 زوج 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃؟

۵. با استفاده از سه رنگ قرمز، زرد، سیاه به چند طریق می‌توانیم خانه‌های شکل زیر را رنگ کنیم به طوری که خانه‌های مجاور رنگ‌های مختلف داشته باشند؟



۲. جایگشت Permutation

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها کنار هم یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

ـ جایگشت به معنی مرتب‌سازی یا تغییر ترتیب اعضای یک مجموعه است.

مثال. تمام جایگشت‌های ممکن با حروف a و b و c را بنویسید.

abc　　acb　　bac　　bca　　cab　　cba

با استفاده از اصل ضرب داریم:

$$\boxed{۳}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱} \Rightarrow ۳\times۲\times۱=۶$$

توجه! مفهوم عبارات زیر این است که تکرار جایز نیست

جایگشت ← 　　کنار هم قرار گرفتن ← 　　رقم یا حروف متمایز ←

مثال. تعداد جایگشت‌های ۵ شیء متمایز چند تاست؟

$$۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$$

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم:

$$n! = n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$$

$$۱! = ۱$$

$$۲! = ۲\times۱=۲$$

$$۳! = ۳\times۲\times۱=۶$$

$$۴! = ۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$$

$$۵! = ۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$$

$$۶! = ۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$n! = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$$

قرارداد: $۰! = ۱$

◄ **تذکر:**

۱. تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

– زیرا بنابر اصل ضرب، تعداد راه های چیدن n شیء متمایز در یک ردیف برابر است با:

$$\underline{n}\times\underline{n-۱}\times\underline{n-۲}\times\cdots\times\underline{۲}\times\underline{۱}=n!$$

۲. وقتی می توان از $n!$ استفاده کرد که اشیاء متمایز باشند.

۳. در فاکتوریل از هر شیء فقط یک بار استفاده می شود و تعداد حالت ها در هر قسمت، نسبت به قبلی، یکی کم می شود.

۴. چون باعث شگفتی و تعجب می شود که چرا اعداد اینقدر بزرگ می شوند، از نماد علامت تعجب **!** استفاده می کنیم.

– مثلاً $۱۰!=۳۶۲۸۸۰۰$

۵. در مسائل فاکتوریل بنابر نیاز هر جا که لازم باشد فاکتوریل را قطع می کنیم.

– به عنوان مثال:

$$۷!=۷\times\overbrace{۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱}$$
$$=۷\times۶!$$
$$=۷\times۶\times۵!$$
$$=۷\times۶\times۵\times۴!$$

بطور کلی:

$$n!=n(n-۱)! \quad \text{یا} \quad (n+۱)!=(n+۱)\cdot n!$$

۶. عملیات فاکتوریل نداریم، به عبارتی فاکتوریل از عملیات های ریاضی $+\ -\ \times\ \div$ تبعیت نمی کند.

– به عنوان مثال: $۲!+۳!\neq۵!$

زیرا $۲!=۲$ و $۳!=۶$ و $۵!=۱۲۰$ بنابراین $۲+۶\neq۱۲۰$.

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$A=(۰!+۲!)^{۳}$$

$$۰!=۱ \text{ و } ۲!=۲ \Rightarrow A=(۱+۲)^{۳}=۳^{۳}=۲۷$$

$$B=\frac{۱۰!}{۸!}$$

$$B=\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times۹\times\cancel{۸!}}{\cancel{۸!}}=۱۰\times۹=۹۰$$

$$C=\frac{۸!}{۷!}$$

$$C=\frac{۸!}{۷!}=\frac{۸\times\cancel{۷!}}{\cancel{۷!}}=۸$$

تمرین: مقادیر D و E را محاسبه نمائید.

$$D=(۰!+۱!+۲!)! \qquad E=\frac{n!}{(n-۲)!}$$

جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز که در آنها ترتیب قرارگرفتن مهم باشد را با $P(n,r)$ نمایش داده و مقدار آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{\text{بزرگ}!}{\text{تفاضل}!}$$

ـ در جایگشت، ترتیب قرارگرفتن اشیاء مهم است یعنی با جابجا کردن اشیاء حالت جدیدی به وجود می‌آید.

مثال. با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟

باید تعداد جایگشت‌های ۴ تایی از ۶ شیء متمایز یعنی $P(6,4)$ را به دست آوریم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\Rightarrow P(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!}=\frac{6!}{2!}=\frac{6\times5\times4\times3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}}=360$$

مثال. به چند طریق می‌توان ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز انتخاب کرد و در یک ردیف بچینیم؟

$$P(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}}=60$$

مثال. در یک دورهٔ بازی فوتبال بین ۱۰ تیم به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود، اگر همهٔ تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

چون گفته رفت و برگشت یعنی برای ما مهم است که ابتدا کدام تیم اول و کدام تیم دوم باشد لذا

$$P(10,2)=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{10!}{8!}=\frac{10\times9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}}=90$$

توجه کنید که این مثال را می‌توان به روش دیگری نیز حل کرد؛ هر تیم با بقیهٔ تیم‌ها به غیر از خودش بازی دارد یعنی

$\underline{\quad 10 \quad}\ \underline{\quad 9 \quad}$

$$n(n-1)=10\times9=90$$

که کارایی فرمول $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ را نشان می‌دهد.

روابط ساده و سریع در جایگشت:

$P(n,n)=n!$	$P(n,1)=n$	$P(n,0)=1$
↓	↓	↓
$P(5,5)=5!$	$P(5,1)=5$	$P(5,0)=1$

مثال. اگر $\frac{n!}{(n-2)!}=42$ مقدار n را بدست آورید.

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=42 \Rightarrow n(n-1)=42=7\times 6 \Rightarrow n=7$$

حاصلضرب دو عدد متوالی n و $n-1$ برابر ۴۲ شده است پس بصورت 7×6 است لذا $n=7$. یا اینکه از حل معادله درجه دوم داریم: $n(n-1)=n^2-n=42$

$$n^2-n-42=0 \Rightarrow (n-7)(n+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=7 & \checkmark \\ n=-6 & \times \end{cases}$$

مثال. از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم ۳ کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تاست؟

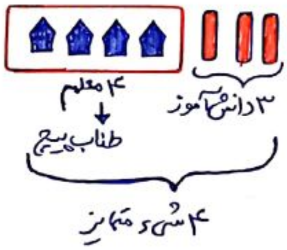
$$P(n,3)=\frac{n!}{(n-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}}=n(n-1)(n-2)$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)=210=7\times 6\times 5 \Rightarrow n=7$$

تذکر. اگر در مسائل مربوط به جایگشت گفته شود «چند شیء خاص کنار هم باشند» یا «دو شیء خاص کنار هم نباشند» باید آن‌ها را به عنوان یک دسته طناب پیچ کرده و آن دسته را مانند یک شیء در کنار بقیه اشیاء در نظر بگیریم.

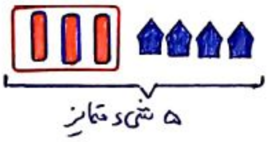
مثال. ۴ معلم و ۳ دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بر روی ۷ صندلی بنشینند به طوری که

- معلم ها همواره کنار هم باشند؟
- دانش‌آموزان همواره کنار هم باشند؟
- یک در میان باشند؟
- در ابتدا و انتهای ردیف، معلم قرار گیرد؟



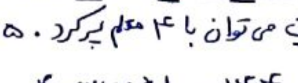
$\Rightarrow$ تعداد $=4!\times 4!=24\times 24=576$ ←

جایگشت های ۴ شیء — جایگشت های ۴ معلم



$\Rightarrow$ تعداد $=5!\times 3!=120\times 6=720$ ←

← ۴ معلم به $4!$ طریق در ۴ مکان مشخص شده، و هم چنین ۳ دانش‌آموز به $3!$ طریق در ۳ مکان مشخص شده جابجا می‌شوند. پس بنابر اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر $4!\times 3!=24\times 6$ یعنی ۱۴۴ طریق می‌باشد:



← ابتدای ردیف را به ۴ طریق و انتهای ردیف را به ۳ طریق می‌توان با ۴ معلم پرکرد. ۵ مکان باقی مانده را به $5!$ طریق با ۵ نفر باقی مانده می‌توان پرکرد. بنابر اصل ضرب:

$$4\times 3\times 5!=1440$$

مثال: با حروف کلمه "جاگیشت" و بدون تکرار حروف

- چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ (با معنی یا بی معنی)
- چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت که با «ج» شروع و به «ت» ختم شود؟
- 〃 〃 〃 〃 〃 〃 که در آن‌ها حروف «ش» و «ت» کنار هم قرار داشته باشند.

← تعداد کلمات ۶ حرفی با ۶ حرف متمایز برابر ۷۲۰ = !۶ می‌باشد.

← $\frac{ت}{1}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{4!}\ \frac{ج}{1}$ ⇐ تعداد کلمات = $1\times 4!\times 1=24$

← حروف ش و ت به دو حالت شت و تش می‌توانند کنار هم بیایند. برای پیدا کردن تعداد کلماتی که در آن‌ها این دو حرف همواره کنار هم باشند باید این دو حرف را طناب پیچ کرد و به عنوان یک بسته در کنار بقیه قرار داد.

$\underbrace{\underset{2!}{\boxed{ت\ ش}}\ \_\ \_\ \_\ \_}_{۵\ تایی}$ ⇐ تعداد کلمات = $2!\times 5!=2\times 120=240$

تمرینات:

۱. به چند طریق می‌توان ۳ تهرانی، ۲ اصفهانی و ۲ کرمانی را در یک صف مرتب کرد بطوریکه تهرانی‌ها کنار یکدیگر باشند.

۲. با حروف کلمه "دانشجو" چند کلمه ۴ حرفی می‌توان ساخت؟

۳. از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم ۳ کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۶۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟

۴. با حروف کلمه "مدرسه" و بدون تکرار حروف:
- چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با "م" شروع می‌شوند؟
- 〃 〃 〃 〃 〃 که در آن حروف س و د همواره کنار هم باشند؟

۵. با ارقام ۱و۲و۳و۴و۵ چند عدد پنج رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت که ارقام فرد آن کنار هم باشند؟

۶. مقدار طبیعی n را از معادله زیر به دست آورید.

$$P(n,2)+n^2=120$$

۳. ترکیب Combination

به هر انتخاب r تایی از n شیء متمایز که در آن ترتیب اهمیت نداشته باشد یا به عبارت دیگر به هر زیرمجموعهٔ r عضوی از n شیء متمایز یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم.

تعداد ترکیبات r تایی از n شیء متمایز را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{\text{بزرگ}!}{\text{تفاضل}!\times\text{کوچیکه}!}$$

— اگر رابطه ترکیب را در $r!$ ضرب کنیم همان رابطه جایگشت‌ها به دست می‌آید:

$$\text{تعداد جایگشت‌های } r \text{ تایی } n \text{ شیء} = r! \times (\text{تعداد ترکیبات } r \text{ تایی } n \text{ شیء})$$

$$\binom{n}{r}\times r! = P(n,r)$$

$$\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

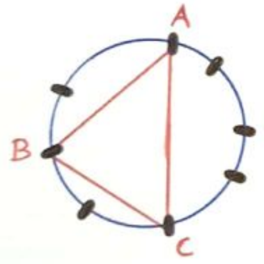
مثال. یک مجموعه هفت عضوی دارای چند زیرمجموعهٔ چهار عضوی است؟

می‌دانیم در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا تأثیری ندارد پس ترتیب مهم نیست لذا

$n=7 \ , \ r=4$

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7!}{4!\,3!}=\frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}\times3!}=35$$

مثال. روی محیط یک دایره ۸ نقطه وجود دارد. مشخص کنید با این نقاط چه تعداد مثلث می‌توان ساخت؟



می‌دانیم $\overset{\Delta}{ABC}=\overset{\Delta}{BCA}=\cdots$ به عبارتی ترتیب اهمیت ندارد، از طرفی با وصل کردن هر ۳ نقطه، یک مثلث ایجاد می‌شود لذا:

$n=8 \quad r=3$

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!(8-3)!}=\frac{8!}{3!\,5!}=\frac{8\times7\times6\times\cancel{5!}}{3!\times\cancel{5!}}=56$$

تذکر.

۱. در مسائل مربوط به جایگشت ترتیب مهم بود یعنی با جابجایی اشیاء، چینش جدیدی به وجود می‌آمد امّا در مسائل مربوط به ترکیب، ترتیب انتخاب اهمیت ندارد. در واقع با مجموعه‌های r عضوی سروکار داریم که می‌دانیم در مجموعه‌ها جابجایی عضوها مهم نیست. به عنوان مثال اگر در مجموعه $\{a,b,c\}$ جای دو عضو a و b را عوض کنیم و به صورت $\{b,a,c\}$ بنویسیم، آنگاه مجموعهٔ جدیدی به وجود نمی‌آید.

۲. در هدیه دادن، ساختن تیم، انتخاب مهره‌ها، شمارش n ضلعی‌ها با داشتن تعدادی نقطه، مجموعه‌ها ترتیب مهم نیست لذا از ترکیب استفاده می‌کنیم.

۳. به طور کلی برای محاسبه $\binom{n}{r}$ در صورت کسر از عدد n شروع می‌کنیم و حاصل ضرب $n(n-1)(n-2)\cdots$

را تا ۲ جمله می‌نویسیم و در مخرج کسر ۲! را قرار می‌دهیم. برخی از مقادیر $\binom{n}{r}$ عبارتند از:

$$\binom{n}{0}=1 \quad \text{و} \quad \binom{n}{1}=n \quad \text{و} \quad \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2!} \quad \text{و} \quad \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \quad \text{و} \quad \dots$$

به عنوان مثال:

$$\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$$

۴. در مسائل جایگشت و ترکیب اغلب در صورت سوال هیچ اشاره‌ای به اینکه مسئله جایگشت است یا ترکیب ندارد و دانش‌آموز خودش باید تشخیص دهد که مسئله چگونه است! برای این کار باید پس از بیرون آوردن زیرمجموعه‌های ۲تایی، جای آن‌ها را عوض کنیم. اگر حالت جدیدی به وجود آمد، مسئله از نوع جایگشت است ولی اگر با جابجا کردن ۲ شیء حالت جدیدی به وجود نیامد، مسئله از نوع ترکیب است. خلاصه اینکه تشخیص این هم نیاز به تمرین و ممارست دارد و از راه تجسس ذهنی به دست می‌آید.

۵. حداقل عددی: یعنی آن عدد یا بیشتر از آن عدد و حداکثر عددی: یعنی آن عدد یا کمتر از آن عدد

مثال. می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد هرگاه بخواهیم

الف) به تعداد مساوی دانش‌آموز یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی باشد.

ج) حداقل ۵ نفر آن‌ها دوازدهمی باشند.

← ۳ نفر یازدهمی و ۳ نفر دوازدهمی انتخاب می‌کنیم

$$\binom{5}{3}\times\binom{6}{3}=\frac{5\times4\times3}{3!}\times\frac{6\times5\times4}{3!}=10\times20=200$$

← کاپیتان از قبل انتخاب شده است پس یک نفر از ۶ نفری که قرار بود انتخاب کنیم، کم می‌شود

$$\binom{10}{5}=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5!}=252$$

← حداقل ۵ نفر یعنی ۵ نفر یا بیشتر از ۵ نفر

$$\left.\begin{aligned}\binom{6}{5}\times\binom{5}{1}&=6\times5=30\\ \binom{6}{6}\times\binom{5}{0}&=1\times1=1\end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} 30+1=31$$

مثال. از بین تعدادی دانش‌آموز به ۲۲۰ طریق می‌توان ۳ نفر را برای انجام آزمایش انتخاب کرد. تعداد دانش‌آموزان را به دست آورید.

اگر تعداد دانش‌آموزان برابر n باشد، باید مقدار n را طوری به دست آوریم که $\binom{n}{3}=220$ شود:

$$\binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=220 \Rightarrow n(n-1)(n-2)=6\times220=12\times11\times10$$

$$\Rightarrow n=12$$

مثال. مقدار طبیعی n را از معادله زیر به دست آورید.

$$P(n,2)-C(n,2)=15$$

$$P(n,2)-C(n,2)=\frac{n!}{(n-2)!}-\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}=15$$

$$\Rightarrow n(n-1)=2\times 15=30=6\times 5\Rightarrow n=6$$

مثال. با ارقام ۱و۲و۳و... و ۹ به چند طریق می‌توان یک عدد ۵ رقمی ساخت به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد.

دو رقم زوج از بین ۴ رقم زوج $\{2,4,6,8\}$ و سه رقم دیگر از بین ۵ رقم فرد $\{1,3,5,7,9\}$ انتخاب می‌شوند

$$\binom{4}{2}\times\binom{5}{3}\times \underbrace{5!}_{\text{جابه‌جایی ۵ رقم باهم}}=6\times 10\times 120=7200$$

مثال. مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن $\binom{6}{3}\times\binom{5}{2}$ باشد.

طبق اصل ضرب باید دو عمل انجام شود که در اولی از بین ۶ شیء متمایز، ۳ شیء و در دومی از ۵ شیء متمایز، ۲ شیء انتخاب شوند

مسئله: به چند طریق می‌توان از بین ۶ مرد و ۵ زن، کمیته‌ای ۵ نفره شامل ۳ مرد و ۲ زن تشکیل داد؟

روابط ساده و سریع در ترکیب:

$\binom{n}{n}=1$	$\xrightarrow{\text{مثال}}$	$\binom{10}{10}=1$
$\binom{n}{0}=1$	$\longrightarrow$	$\binom{10}{0}=1$
$\binom{n}{1}=n$	$\longrightarrow$	$\binom{10}{1}=10$
$\binom{n}{n-1}=n$	$\longrightarrow$	$\binom{10}{9}=10$
$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$	$\longrightarrow$	$\binom{10}{1}=\binom{10}{9}=10$

مثلاً مفهوم رابطه $\binom{n}{0}=1$ این است که یک مجموعه n عضوی دارای یک زیرمجموعه هیچ عضوی (یعنی تهی $\varnothing$) است:

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{\cancel{n!}}{0!\times\cancel{n!}}\overset{0!=1}{=\!=}1$$

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است. از طرفی این زیرمجموعه‌ها شامل تمام زیرمجموعه‌های صفر عضوی $\left[\text{تعداد}=\binom{n}{0}\right]$، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی $\left[\text{تعداد}=\binom{n}{1}\right]$ و ... و تمام زیرمجموعه‌های n عضوی $\left[\text{تعداد}=\binom{n}{n}\right]$ است، بنابراین:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

مثال • به چند طریق می‌توان از یک گروه ۷ نفره یک تیم حداقل ۲ نفره انتخاب کرد؟

بنابر رابطه $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$ جواب عبارت است از کل حالات منهای دو ترکیب $\binom{n}{0}$ و $\binom{n}{1}$ یعنی:

$$\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\dots+\binom{7}{7}=2^7-\binom{7}{1}-\binom{7}{0}$$

$$=128-7-1=120$$

تمرینات:

۱. در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ سیاه وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره از این جعبه خارج کنیم؟

۲. از بین تعدادی کتاب به ۲۸ روش می‌توانیم ۲ کتاب را به تصادف انتخاب و هدیه داد. تعداد کتاب‌ها را به دست آورید.

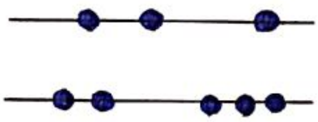
۳. مسئله‌ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

$$\binom{3}{1}+\binom{4}{2}=3+6=9$$

۴. از تساوی زیر مقدار طبیعی n را پیدا کنید.

$$C(n,2)+n=36$$

۵. در شکل روبه‌رو تعداد مثلث‌هایی که با نقاط مشخص شده می‌توان رسم کرد را به دست آورید.



۶. به چند طریق می‌توان از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی، ۶ داوطلب گروه تجربی و ۴ داوطلب گروه انسانی، ۴ نفر را برای انجام یک مصاحبه انتخاب کرد به طوری که؟

الف) هیچ محدودیتی در انتخاب افراد وجود نداشته باشد؟

ب) ۳ نفر از گروه ریاضی و ۱ نفر از گروه تجربی باشند؟

ج) هر ۴ نفر از یک گروه باشند؟

د) حداکثر ۳ نفر از گروه ریاضی باشند؟