بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّهُمَّ صَلِّ عَلىٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی (۲)

رشتهٔ علوم تجربی

پایهٔ یازدهم

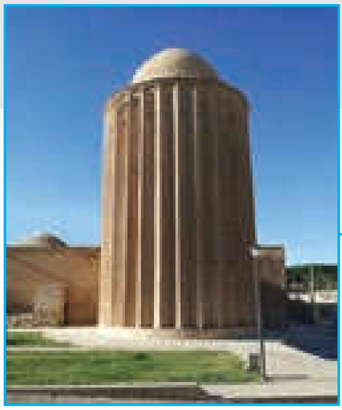
جزوه کامل ریاضی۲

دورهٔ دوم متوسطه

تهیه‌کننده :

سیاوش شریفی

فهــرست



بارم بندی درس **ریاضی ۲**

	فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
(علوم تجربی)	فصل ۱	۶	۲	۲/۵
	فصل ۲	۶	۲/۵	۳
	فصل ۳	۶	۲/۵	۳
	فصل ۴ (تا صفحه ۷۶)	۲	۳	۳
	فصل ۴ (از صفحه ۷۶ تا آخر)	-		
	فصل ۵	-	۳/۵	۳/۵
	فصل ۶	-	۳/۵	۳
	فصل ۷	-	۳	۲

فصل اول

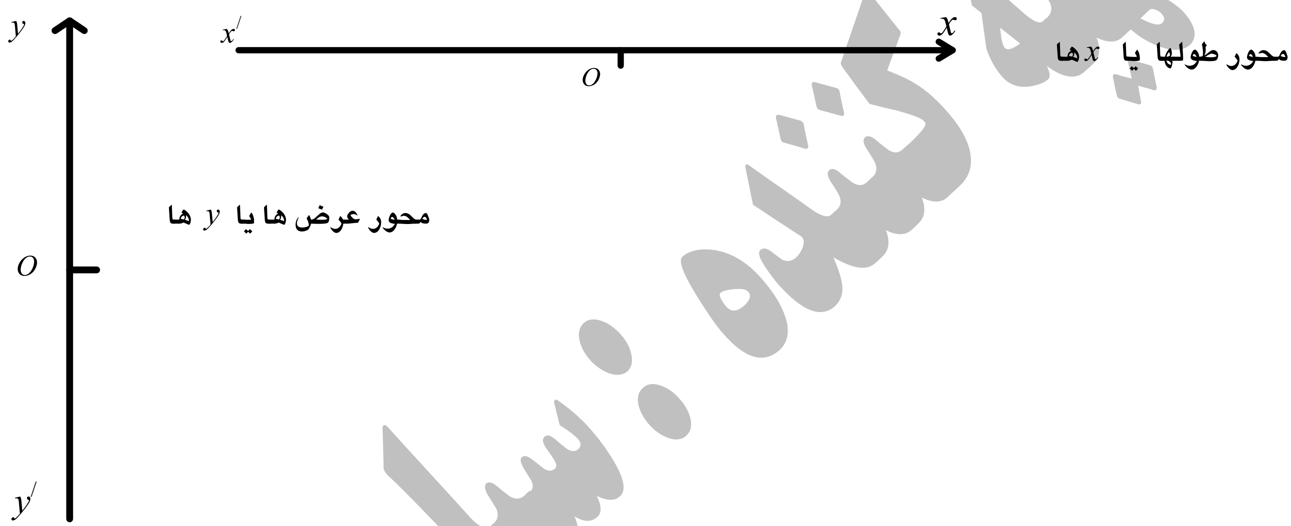
هندسه تحلیلی و جبر

آشنایی با هندسه تحلیلی :

محور:

خطی جهت دار که دارای یک نقطه به عنوان مبدأ و طولی به عنوان واحد اندازه گیری است.

اگر محور افقی باشد آن را محور طولها یا xها واگر عمودی باشد آن را محور عرضها یا y ها می گویند .



هر نقطه روی محور طولها ، دارای یک طول می باشد .

اگر A یک نقطه روی محور طولها باشد طول نقطه ی A را با x_A نمایش می دهند .

اگر A سمت راست مبدأ باشد طول آن مثبت و اگر روی خود مبدأ باشد طول آن صفر و اگر سمت چپ مبدأ باشد طول آن را با منفی نمایش می دهند.

به همین ترتیب :

هر نقطه روی محور عرض ها دارای یک عرض است که عرض نقطه ای مانند A روی محور عرضها را با علامت y_A نمایش می دهند .

عرض های بالای مبدأ را با علامت مثبت و عرض های پایین مبدأ را با علامت منفی نمایش می دهند .

فاصله دو نقطه روی محور طولها (یا طول پاره خط):

اگر A و B دو نقطه روی محور طولها باشند فاصله ی دو نقطه ی A و B (یا طول پاره خط AB) را می توان از رابطه ی زیر حساب کرد :

$$AB = |x_B - x_A|$$

توجه : اگر دو نقطه روی محور عرض ها باشند طول پاره خط به صورت $AB = |y_B - y_A|$ محاسبه می گردد .

مثال۱ :

اگر $x_A = -3$ و $x_B = 8$ باشد . طول پاره خط AB را حساب کنید .

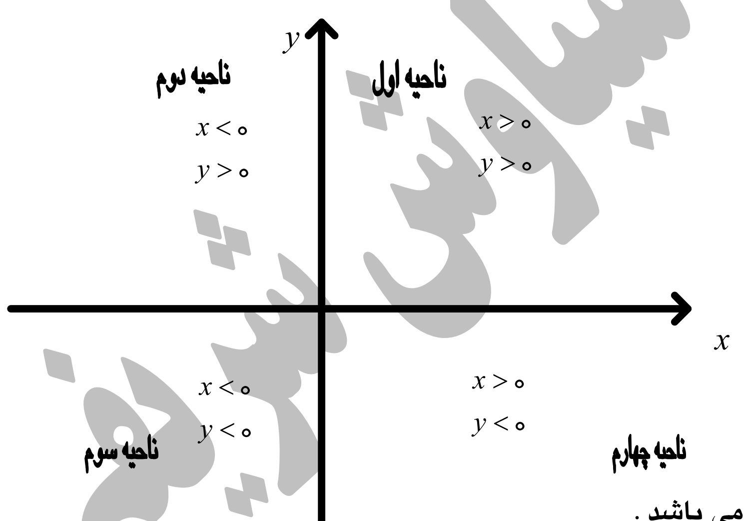
مثال۲ :

اگر $x_A = 3x_B + 2$ و $AB = 8$ باشد . x_A و x_B را حساب کنید .

دستگاه مختصات (دکارتی):

از عمود کردن دو محور طولها (xها) و عرض ها(y ها) در مبدأ آنها ، شکلی حاصل می شود که به آن دستگاه محورهای مختصات یا دستگاه دکارتی گویند .

دستگاه محورهای مختصات صفحه را به چهار قسمت تقسیم می کند که به هر قسمت ناحیه یا ربع گویند .



هر نقطه در صفحه مختصات دارای یک طول و یک عرض می باشد .

اگر A نقطه ای در صفحه مختصات با طول x_A و عرض y_A باشد ، آن را به شکل $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ یا $A(x_A, y_A)$ نمایش می دهند.

توجه :

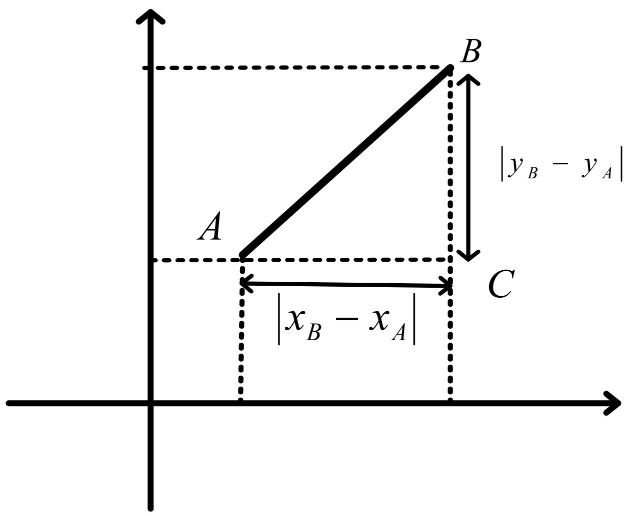
اگر نقطه ی A روی محور طول ها باشد مولفه ی عرض آن صفر است .

همچنین اگر A روی محور عرض ها باشد . مولفه ی طول آن صفر است .

مثال۳ :

اگر $A(3 - 2m, m + 2)$ در ناحیه دوم محورهای مختصات باشد . حدود m را بیابید .

طول پاره خط در دستگاه مختصات :



اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ مختصات دوسر پاره خط AB در دستگاه مختصات باشد . طول پاره خط AB از رابطه ی زیر محاسبه می گردد :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

اثبات :

با توجه به شکل که ، مثلث ABC قائم الزاویه است و بنابر رابطه فیثاغورس داریم :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = (|x_B - x_A|)^2 + (|y_B - y_A|)^2$$

$$\xrightarrow{|a|^2 = a^2} AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

با جذر گیری از دو طرف رابطه به دست می آید :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال۴ :

طول پاره خط AB که $A(-3,7)$ و $B(1,4)$ می باشد را محاسبه کنید .

مثال۵ :

اگر $A(m+1,3)$ و $B(1, m+3)$ باشد . مقدار m را طوری بیابید که طول پاره خط AB برابر با $4\sqrt{2}$ باشد .

مثال ۶ :

نقطه ای روی خط $y = x - ۱$ بیابید که فاصله ی آن از دو نقطه ی $A(۱,۵)$ و $B(۳,۴)$ برابر باشد .

مثال۷ :

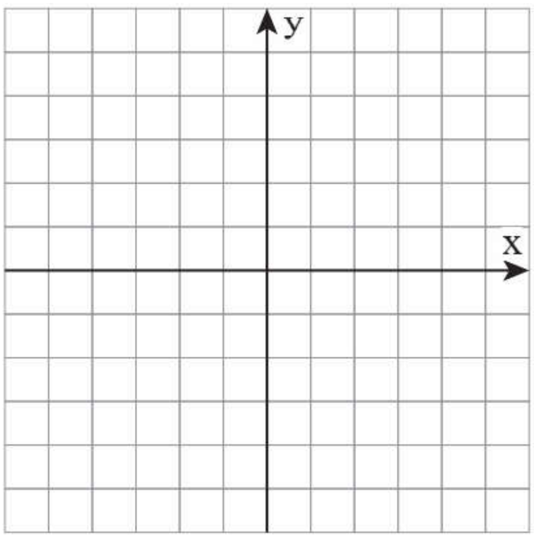
سه نقطه $A(۱,۳)$ و $B(-۱,۲)$ و $C(۵,-۵)$ سه رأس مثلث ABC هستند .

الف) نمودار مثلث را در صفحه مختصات رسم کنید .

ب) طول اضلاع مثلث را حساب کنید.

ج) ثابت کنید مثلث قائم الزاویه است.

د) مساحت مثلث را حساب کنید .



نکته :

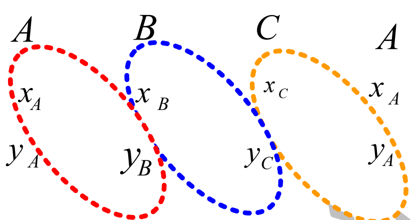
اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ سه رأس مثلث ABC در صفحه مختصات باشند می توان مساحت این مثلث را از رابطه ی زیر به دست آورد:

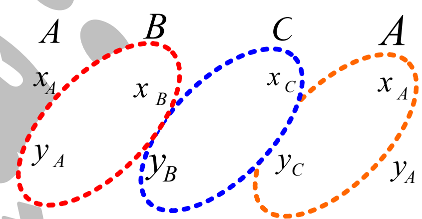
$$S=\frac{۱}{۲}\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}\left|(x_Ay_B+x_By_C+x_Cy_A)-(x_Ay_C+x_Cy_B+x_By_A)\right|$$

$$=\frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)\right|$$

یا به شکل زیر می توان این رابطه را یاد گرفت :

ابتدا مختصات هریک از رئوس را به صورت ستونی درکنارهم می نویسیم . در ستون چهارم هم ، همان مختصات ستون اول را مینویسیم.





$P=x_Ay_B+x_By_C+x_Cy_A$

$q=y_Ax_B+y_Bx_C+y_Cx_A$

$$S=\frac{۱}{۲}|p-q|$$

مثال۸ :

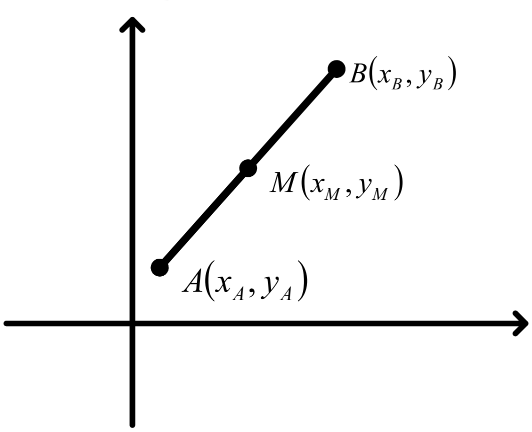
مساحت مثلثی به سه رأس $A(۲,۵)$ و $B(۳,۰)$ و $C(۰,۲)$ را حساب کنید(تجربی ۹۲)

۱) ۶ ☐ ۲) ۶/۵ ☐ ۳) ۷ ☐ ۴) ۷/۵ ☐

مختصات وسط یک پاره خط :

اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ مختصات دوسر پاره خط AB و نقطه $M(x_M,y_M)$ وسط آن ، در دستگاه مختصات باشد . مختصات M از روابط زیر به دست می آیند :

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲} \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$



توجه :

نقطه A و B نسبت به نقطه M قرینه یکدیگرند .

مثال۹ :

اگر $A(-۳,۵)$ و $B(۳,۱)$ باشد طول پاره خط و مختصات نقطه وسط پاره خط AB را بیابید .

مثال۱۰ :

اگر نقطه ی $M(۲k+۵,t-۲)$ وسط پاره خط $A(۲,k+۲t)$ و $B(۳k,k-t)$ است حاصل $k+t$ کدام است؟

مثال۱۱ :

قرینه نقطه ی $A(-۳,۸)$ را نسبت به نقطه ی $M(-۲,۳)$ بیابید .

نتیجه :

اگر $B(x_B,y_B)$ قرینه نقطه ی $A(x_A,y_A)$ نسبت به نقطه ی $M(\alpha,\beta)$ باشد داریم :

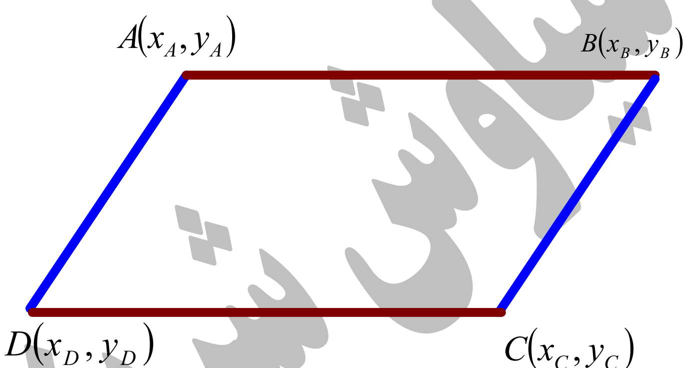
$$x_B=۲\alpha-x_A$$
$$y_B=۲\beta-y_A$$

مثال۱۲ :

اگر قرینه نقطه ی $A(m+3,-1)$ نسبت به نقطه ی $M(-3,2-m)$ روی خط $4x+6y=7$ باشد . مقدار m کدام است؟

نکته :

اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ و $C(x_C,y_C)$ و $D(x_D,y_D)$ رأس های متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند رابطه های زیر را داریم :



$$x_A+x_C=x_B+x_D$$
$$y_A+y_C=y_B+y_D$$

(چرا ؟)

مثال۱۳ :

اگر $A(3,2)$ و $B(-4,6)$ و $C(-1,-3)$ رأس های متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند

الف) مختصات رأس D را به دست آورید .

ب) طول قطر BD را محاسبه کنید .

معادله خط :

معادله هر خط به صورت $ax+by+c=0$ می باشد که در آن c,b,a اعداد حقیقی بوده و b,a همزمان صفر نیستند .

بنابراین

$$by=-ax-c$$

با فرض $b\neq 0$ داریم :

$$\frac{by}{b}=\frac{-ax}{b}-\frac{c}{b}$$

یا
$$y=\underbrace{-\frac{a}{b}}_{m}x+\underbrace{(-\frac{c}{b})}_{n}$$

پس $y=mx+n$ می باشد که m شیب خط و n عرض از مبدأ می باشد .

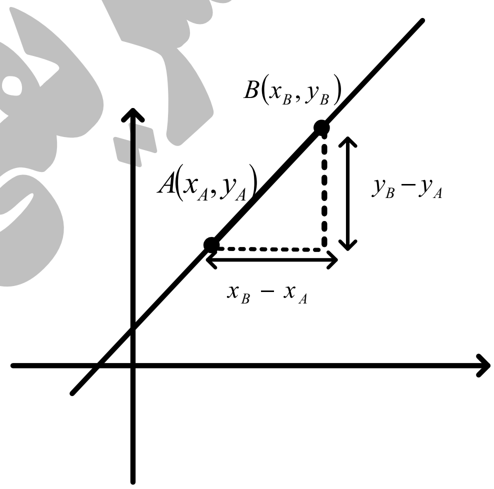
مثال۱۴ :

شیب و عرض از مبدأ خط $2x-3y+6=0$ را تعیین کنید .

به دست آوردن شیب خط و معادله خط :

اگر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ دو نقطه از خط مفروض L باشند . شیب آن از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$



و معادله خط L را می توان از رابطه ی زیر نوشت :

$$y-y_A=m(x-x_A)$$

مثال۱۵ :

معادله خطی را بنویسید که از نقاط $A(1,-4)$ و $B(-1,6)$ می گذرد .

توجه :

سه نقطه ی $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ وقتی بر یک راستا هستند (یا روی یک خط هستند) که

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

مثال۱۶ :

آیا سه نقطه ی $A(۲,۵)$ و $B(-۲,-۳)$ و $C(۰,۲)$روی یک خط قرار دارند ؟ چرا؟

مثال۱۷ :

به ازای چه مقدار a نقاط $(a,۳)$ و $(۶,۴a+۱)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار دارند ؟

دو خط موازی :

دو خط $y = m_۱x + n_۱$ و $y = m_۲x + n_۲$ وقتی موازیند که دارای شیب برابر باشند یعنی $m_۱ = m_۲$.

مثال۱۸ :

خطوط $۳x + ۲y = ۱$ و $۶x + ۴y = ۵$ موازیند زیرا

$$\left.\begin{array}{l} ۳x + ۲y = ۱ \quad \Rightarrow \quad m_۱ = \dfrac{-۳}{۲} \\ ۶x + ۴y = ۵ \quad \Rightarrow \quad m_۲ = \dfrac{-۶}{۴} = \dfrac{-۳}{۲} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad m_۱ = m_۲$$

مثال۱۹ :

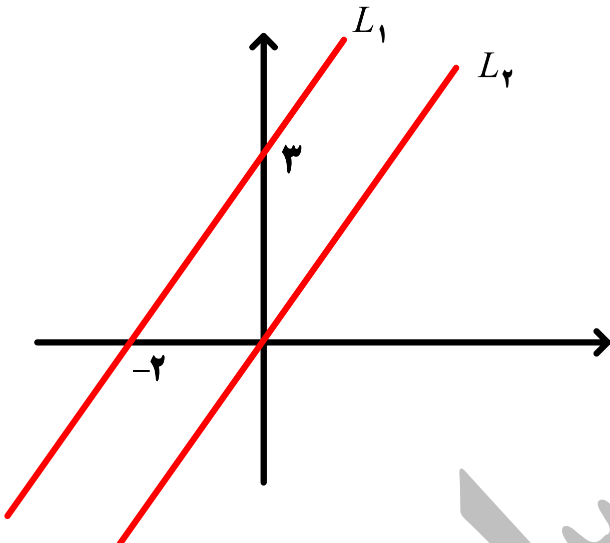
به ازای چه مقدار k دو خط $(۲k - ۱۵)x - ۳y = ۳$ و $(k + ۱)x + y = ۷$ موازیند ؟

نوشتن معادله خطی موازی با خط داده شده که از نقطه $A(x_A , y_A)$ می گذرد :

شیب خط داده شده را تعیین کرده (m) و در رابطه ی $y - y_A = m(x - x_A)$ قرار می دهیم .

مثال ۲۰ :

در شکل زیر دو خط L_1 و L_2 موازیند . معادله آنها را بنویسید .



دو خط عمود برهم :

دو خط $y = m_1x + n_1$ و $y = m_2x + n_2$ وقتی برهم عمودند که شیب های آنها قرینه و معکوس یکدیگر باشند . به عبارتی

$$m_1 \times m_2 = -1$$

مثال ۲۱ :

وضعیت دو خط $3x + 4y = 1$ و $4x - 3y = 7$ را بررسی کنید

نوشتن معادله خطی عمودبر ب خط داده شده که از نقطه $A(x_A , y_A)$ می گذرد :

شیب خط داده شده را تعیین کرده و آن را قرینه و معکوس می کنیم . سپس در رابطه ی $y - y_A = m(x - x_A)$ قرار می دهیم

مثال ۲۲ :

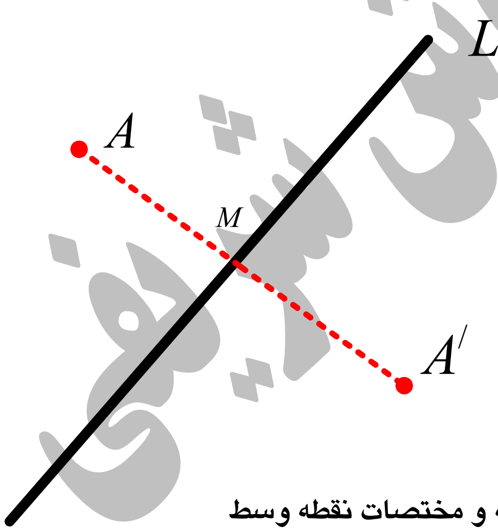
معادله خطی را بنویسید که بر خط $3x + 2y = 5$ عمود باشد و از نقطه $A(6,1)$ می گذرد .

مثال۲۳ : اگر $A(۳,۲)$ و $B(-۴,۶)$ و $C(-۲,-۴)$ مختصات رئوس مثلث ABC باشند .

الف) طول میانه AM وارد بر ضلع BC را حساب کنید.

ب) معادله میانه AM را بنویسید .

ج) معادله ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را بنویسید .



یافتن قرینه یک نقطه نسبت به یک خط :

برای یافتن قرینه نقطه مفروض A نسبت به خط L یعنی نقطه $A^{/}$ به دو نکته باید توجه نمود

۱- مختصات نقطه وسط $AA^{/}$ یعنی در معادله خط L صدق می کند .

۲- خط L بر خطی که ازنقاط A و $A^{/}$ می گذرد عمود است .

بنابراین

ابتدا مختصات نقطه $A^{/}$ را به صورت فرضی به شکل $A^{/}(\alpha,\beta)$ در نظر گرفته و مختصات نقطه وسط پاره خط $AA^{/}$ را تعیین کرده و در معادله خط قرار می دهیم .

شیب خط داده شده ی L و شیب خطی که ازنقاط A و $A^{/}$ می گذرد . این دو شیب باید قرینه و معکوس یکدیگر باشند .

با استفاده از روابط به دست آمده مقدار طول و عرض نقطه ی $A^{/}$ را حسا ب می کنیم .

مثال۲۴ :

قرینه نقطه ی $A(-۲,۶)$ نسبت به خط $x+y=۱$ به دست آورید .

به طور کلی داریم :

۱- قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به محور x ها (خط $y=0$) به صورت $A'(x,-y)$ می باشد .

۲- قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به محور y ها (خط $x=0$) به صورت $A'(-x,y)$ می باشد .

۳- قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات (نقطه $O(0,0)$) به صورت $A'(-x,-y)$ می باشد .

۴- قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) به صورت $A'(y,x)$ می باشد .

۵- قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم (خط $y=-x$) به صورت $A'(-y,-x)$ می باشد .

مثال۲۵ :

قرینه نقطه $A(-2,5)$ را نسبت به

الف) محور x ها　　　ب) محور y ها

ج) مبدأ مختصات　　　د) خط $y=x$

و) خط $y=-x$

بیابید .

مثال۲۶ :

اگر قرینه نقطه ی $A(2m+2,n-5)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت $A'(-3,m+n)$ باشد .

مقدار m و n رابیابید .

دستگاه معادلات خطی (دستگاه دو معادله و دو مجهول) :

هرگاه $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ معادله دو خط باشند در این صورت $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ را دستگاه معادلات خطی گویند .

در این صورت

۱- اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد دو خط در یک نقطه همدیگر را قطع می کنند . پس دستگاه یک جواب دارد جواب آن همان نقطه برخورد دو خط می باشد

۲- اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد . دو خط موازیند . بنابراین یکدیگر را قطع نمی کنند و دستگاه جواب ندارد.

۳- اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد . دو خط برهم منطبق هستند و دستگاه بیشمار جواب دارد .

مثال۲۷ :

دستگاه $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 6y-4x=1 \end{cases}$ چند جواب دارد؟

مثال۲۸ :

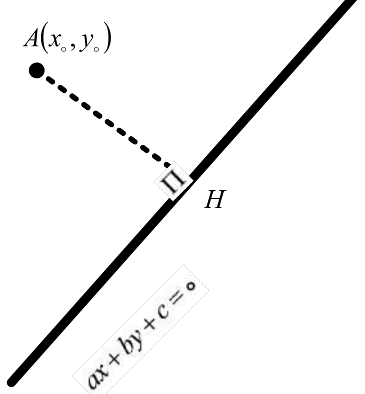
به ازای چه مقدار m دستگاه $\begin{cases} mx+y+1=m \\ 3x+my+2m=2y+4 \end{cases}$ بیشمار جواب دارد ؟

فاصله نقطه از خط :

فاصله نقطه ی $A(x_0,y_0)$ از خط به معادله $ax+by+c=0$

از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$d=AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



مثال۲۹ :

فاصله نقطه $A(-۲,۴)$ از خط به معادله $y=\frac{۴}{۳}x-۴$ به دست آورید .

مثال۳۰ :

به ازای چه مقدار k فاصله نقطه ی $A(k+۲,۱)$ از خط $x-y-۲k-۳=۰$ برابر $۶\sqrt{۲}$ است ؟

مثال۳۱ :

مساحت مربعی را حساب کنید که یک ضلع آن بر روی خط $۴x+۳y=۲$ قرار دارد و $A(۱,-۵)$ یک رأس آن است.

مثال۳۲ :

اگر $A(۳,۰)$ و $B(-۴,۶)$ و $C(-۲,-۲)$ مختصات رأس های مثلث ABC باشند . طول ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را حساب کنید .

مثال۳۳ :

دونقطه بر خطی به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله ی این نقاط از خط به معادله ی $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است . طول این نقاط کدام است؟

۱) ۹ ، -15 ☐ ۲) ۱۱ ، -15 ☐ ۳) ۱۵ ، -11 ☐ ۴) -9 ، ۱۱ ☐

فاصله ی دو خط موازی :

می دانیم اگر L_1 و L_2 دو خط موازی در دستگاه مختصات باشند . می توان معادله های آنها را ساده کرد که به صورت $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ تبدیل شوند . بنابراین :

فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از رابطه زیر به دست می آید :

$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

اثبات :

خط $ax+by+c'=0$ رابه صورت $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c'}{b}$ می نویسیم .

کافی است فاصله یک نقطه مانند $A(x_0, y_0)$ روی این خط را ، از خط $ax+by+c=0$ به دست آورد .

چون $A(x_0, y_0)$ روی خط $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c'}{b}$ قرار دارد پس : $y_0 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c'}{b}$ در نتیجه

$$A\left(x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c'}{b}\right)$$

حال مختصات نقطه A را در رابطه ی $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ قرار می دهیم :

$$d = \frac{\left|ax_0 + b(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c'}{b}) + c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0 - ax_0 - c' + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال۳۴ :

فاصله بین دو خط $۳x-۴y=۵$ و $۶x-۸y+۲۱=۰$ را به دست آورید .

مثال۳۵ :

مساحت دایره ای را حساب کنید که بر دو خطوط $y=\frac{۱}{۲}x+۴$ و $x-۲y=۲$ مماس است .

زاویه بین دو خط :

اگر θ زاویه حاده (تند) بین دو خط به معادله های $y=m_۱x+n_۱$ و $y=m_۲x+n_۲$ باشد . می توان θ را از رابطه ی زیر حساب کرد :

$$\tan\theta=\left|\frac{m_۲-m_۱}{۱+m_۱m_۲}\right|$$

توجه :

اگر $m_۱=m_۲$ باشد دو خط موازیند بنابراین $\theta=۰^\circ$.

اگر $m_۱m_۲=-۱$ باشد دوخط بر هم عمودندو $\theta=۹۰^\circ$.

مثال۳۶ :

زاویه بین دو خط $y=۱-۲x$ و $۹x-۳y=۱۶$ را بیابید .

خطی که از دو خط موازی به یک فاصله باشد

معادله خطی که از دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ به یک فاصله باشد به صورت زیر می باشد :

$$ax+by+\frac{c+c'}{۲}=۰$$

مثال۳۷ :

معادله خطی بنویسید که از دو خط $y=\frac{2}{3}x-2$ و $6y+2=4x$ به یک فاصله باشد .

تمرین :

۱– نقطه ای روی خط $x-3y=1$ بیابید که فاصله آن از نقطه ی $A(2,7)$ برابر $2\sqrt{7}$ باشد .

۲– نقاط $A(0,6)$ و $B(8,-8)$ دو سرقطر یک دایره اند . مختصات مرکز دایره و مساحت دایره را حساب کنید .

۳–دایره به مرکز $O(-1,2)$ بر خط به معادله $y=-\frac{4}{3}x+5$ مماس است . طول شعاع دایره را محاسبه کنید .

۴–اگر فاصله نقطه ی $A(1,2)$ از خط $ax+4y=1$ برابر با **۲** باشد . مقدار a را حساب کنید .

۵– نقطه ای روی خط $y=2x$ بیابید که مجموع فاصله های آن از مبدأ مختصات و نقطه ی $A(2,4)$ برابر با **۵** باشد

۶– اگر فاصله ی دو خط موازی $ax+by=1$ و $y=\sqrt{3}x+1$ برابر با $\frac{1}{2}$ باشد . مقدار a و b را بیابید .

۷–نقطه ی $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله ی $2y-x=5$ است . مساحت مربع را حساب کنید .

۸– خط $3x-4y=5$ بر دایره ای به شعاع یک مماس است . اگر مرکز دایره روی نیمساز ناحیه سوم باشد . مختصات مرکز دایره را بیابید .

۹– فاصله دو خط موازی $kx+(2k+2)y=k-6$ و $2x+5y=1$ را حساب کنید .

۱۰– اگر فاصله ی A واقع بر نیمساز ربع اول از خط به معادله ی $x+3y=2$ برابر $\sqrt{10}$ باشد طول نقطه ی A را بیابید .

۱۱– فاصله نقطه ی $A(-2,6)$ از عمود منصف پاره خطی که از نقاط $B(-1,2)$ و $C(1,-4)$ می گذرد را بیابید .

۱۲– به ازای چه مقدار k سه نقطه ی $A(2,0)$ و $B(3,k)$ و $C(6,k^2+3)$ روی یک خط راست قرار دارند.

۱۳– خط L از دو خط به معادله های $x+2y=6$ و $x+ky=k$ به یک فاصله قرار دارد . معادله خط L را بنویسید.

تمرین

۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$L: ۲x - y = ۱$ $\quad\quad$ $T: y = ۲x - ۳$ $\quad\quad$ $\Delta: x + ۲y = ۰$

۲ دو نقطهٔ $A(۱۴ , ۳)$ و $B(۱۰ , -۱۳)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به‌دست آورید.

۳ نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(۱ , ۲)$، $B(۲ , ۵)$ و $C(۴ , ۱)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.

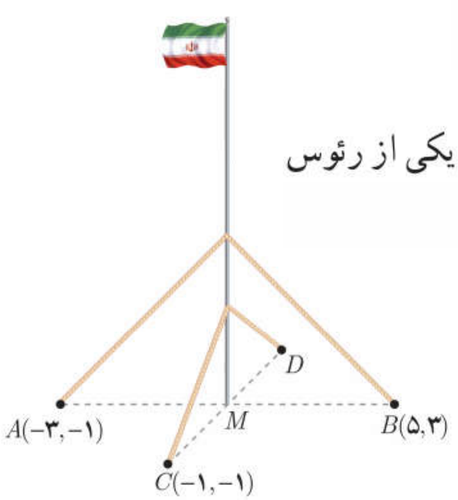
۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲ , -۲)$ و $B(۶ , ۴)$ هستند.

الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطهٔ $C(۷ , ۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۵ نقاط $A(۲ , ۳)$، $B(-۱ , ۰)$ و $C(۱ , -۲)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید.

۶ یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده‌است؛ به طوری که فاصلهٔ هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطهٔ D را به‌دست آورید.



۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L : y = ۲x - ۱$ واقع است. اگر $A(۳ , ۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

درس ۲:

یاد آوری : **معادله درجه دوم :**

هر معادله درجه دوم به شکل استاندارد به صورت $ax^2+bx+c=0$ است که در آن c,b,a اعداد حقیقی و $a\neq 0$ می باشد.

روش های حل معادله درجه دوم :

۱– روش تجزیه :

از روشهای تجزیه معادله درجه دوم را تجزیه کرده و سپس به کمک خاصیت زیر می توان معادله را حل کرد.

خاصیت اعداد حقیقی :

« هرگاه $a,b\in R$ و $ab=0$ باشد . در این صورت $a=0$ یا $b=0$. »

۲– روش ریشه گیری (خاصیت ریشه زوج)

خاصیت ریشه گیری: هرگاه $x^2=k$ ($k\in R$ و $k\geq 0$) باشد . آن گاه $x=\pm\sqrt{k}$

۳– روش مربع کامل :

باید معادله درجه دوم را به شکل اتحاد مربع دوجمله ای نوشت و سپس به کمک خاصیت ریشه گیری معادله را حل کرد.

۴– روش کلی (یا روش دلتا) :

دراین روش ابتدا مقدار Δ را از رابطه ی $\Delta=b^2-4ac$ حساب کرده و در این صورت

الف) اگر $\Delta>0$ باشد معادله دو ریشه حقیقی دارد که می توان ریشه ها را از رابطه های زیر حساب کرد:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

ب) اگر $\Delta=0$ باشد معادله مضاعف (ریشه تکراری) دارد که از رابطه ی $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$ به دست می آید .

ج) اگر $\Delta<0$ باشد معادله ریشه حقیقی ندارد.

۵– روش هندسی

در این روش جمله ی درجه را یک طرف نگه داشته و بقیه جملات را به طرف دیگر معادله منتقل کرده و سپس نمودار هر کدام را جدا رسم می کنیم . تعداد نقاط برخورد دو نمودار ، تعداد جوابهای معادله درجه دوم است .

در ادامه با این روش بیشتر آشنا خواهیم شد.

۶– روش آزمون و خطا

در این روش با مقدار دادن می توان به ریشه های معادله (در صورت داشتن ریشه) دست پیدا کرد .

مثال۳۸ و تمرین :

معادله های زیر را حل کنید .

الف) $3y^2 = 21y$ ب) $(2x-1)^2 = 49$ ج) $2t^2 - 5t = 1$

مثال۳۹ :

به ازای چه مقداری از m معادله ی درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟(کنکور۹۸)

مثال۴۰ :

در معادله درجه دوم $(m-2)x^2 - 2x - 1 = 0$ حدود یا مقدار m را طوری بیابید که معادله :

الف) دو ریشه حقیقی باشد.

ب) ریشه حقیقی نداشته باشد.

ج) اگرعدد $x = 1$ یک ریشه آن باشد . ریشه دیگر را بیابید.

روابط بین ریشه ها :

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta>0$ باشد ، دارای دو ریشه حقیقی مانند x_1, x_2 است که :

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

اگر مجموع دو ریشه را با S نمایش دهیم داریم :

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

پس $S=x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$

و حاصل ضرب دو ریشه را با P نمایش دهیم داریم :

$$P=x_1.x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

لذا $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

نکته :

می توان رابطه های زیر را اثبات کرده و در حل مسائل از آنها استفاده کرد .

۱) $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۲) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

۳) $x_1^3+x_2^3=S^3-3SP$

حفظ کردن روابط دیگر ی ضرورتی ندارد و می توان آنها را به کمک روابط داده شده به دست آورد.

توجه :

هرگاه در مسائلی صحبت از روابط بین ریشه ها شد ابتدا S و P را تشکیل داده و سپس به حل مسئله بپردازید.

مثال ۴۱ :

اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $2x^2-6x+\frac{1}{2}=0$ باشند . حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=$

ب) $\alpha^{۲} + \beta^{۲} =$

ج) $(\alpha - \beta)^{۲} =$

د) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} =$

هـ) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} =$

و) $\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha} =$

ت) $\dfrac{۱}{۲\alpha + ۱} + \dfrac{۱}{۲\beta + ۱} =$

م) $\left(2\alpha^2+6\alpha-\frac{1}{4}\right)\left(2\beta^2+6\beta-\frac{1}{4}\right)=$

مثال۴۲ :

اگر α و β ریشه های معادله $2x^2+3x+2m-1=0$ باشند مقدار m را طوری بیابید که رابطه ی $\alpha^2+\beta^2=8$ برقرار باشد.

مثال ۴۳ :

اگر α و β ریشه های معادله $x^2+2mx+4=0$ باشد . مقدار m و هر دوریشه را طوری بیابید که $\alpha=4\beta$ باشد.

مثال۴۴ :

مقدار m را طوری بیابید که در معادله درجه دوم $x^2+(2m+3)x+5m-1=0$ رابطه ی $\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{2}{3}$ بین ریشه های معادله برقرار باشد.

مثال۴۵ :

به ازای چه مقدار m رابطه ی $\alpha^2+\alpha\beta=6$ بین ریشه های معادله $x^2-3x+m-1=0$ برقرار است ؟

مثال۴۶:

مقدار m را طوری بیابید که ریشه های حقیقی معادله $mx^2+3x+m^2=2$ معکوس یکدیگر باشند. (کنکور ۹۰ ت)

تمرین۱ :

نشان دهید در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد($a+b+c=0$) یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x=1$ و دیگری $x=\frac{c}{a}$ است.

تمرین۲ :

نشان دهید در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+c=b$ باشد. یکی از ریشه‌های معادله برابر $x=-1$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}$ است.

بحث در وجود ریشه های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ بر حسب Δ و S و P :

الف) هرگاه $\Delta>0$ باشد معادله دارای دوریشه حقیقی متمایز است.

۱- اگر $P=\frac{c}{a}>0$ باشد هر دو ریشه هم علامتند . $\Leftarrow$
- اگر $S=\frac{-b}{a}>0$ باشد دو ریشه مثبت می باشند.
- اگر $S=\frac{-b}{a}<0$ باشد دو ریشه منفی می باشند.

۲- اگر $P=\frac{c}{a}=0$ باشد $\Leftarrow$ $c=0$ $\Leftarrow$ $x_1=0$ و $x_2=\frac{-b}{a}$

۳- اگر $P=\frac{c}{a}<0$ باشد دو ریشه مختلف العلامتند . $\Leftarrow$
- اگر $S=\frac{-b}{a}>0$ باشد ریشه مثبت از قدرمطلق ریشه منفی بزرگتر است
- اگر $S=\frac{-b}{a}=0$ ($b=0$) باشد دو ریشه قرینه اند
- اگر $S=\frac{-b}{a}<0$ باشد قدرمطلق ریشه منفی از ریشه مثبت بزرگتر است

ب) اگر $\Delta=0$ باشد ، معادله دارای مضاعف (تکراری) $x=\frac{-b}{2a}$ است .

ج) اگر $\Delta<0$ باشد معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال۴۷ :

بدون حل معادله ، دروجود و نوع ریشه های معادله $2x^2+3x-7=0$ بر حسب Δ و S و P بحث کنید .

مثال ۴۸ :

حدود m را طوری تعیین کنید که معادله درجه دوم $۲x^۲ - ۴x + m - ۳ = ۰$ دارای دوریشه حقیقی مثبت باشد.

مثال۴۹:

معادله $(x-۱)(x-۳) + ۲ + k^۲ = ۰$ از نظر جواب چه وضعیتی دارد؟

نوشتن معادله درجه دوم :

اگر در معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ (که $a \neq ۰$) طرفین معادله را بر a تقسیم کنیم داریم

$$x^۲ + \underbrace{\frac{b}{a}}_{-S}x + \underbrace{\frac{c}{c}}_{P} = ۰$$

بنابراین معادله به شکل $x^۲ - Sx + P = ۰$ در می آید .

پس اگر α و β ریشه های یک معادله درجه دوم باشند می توان S و P را محاسبه کرد و در رابطه ی زیر قرار داد.

$$x^۲ - Sx + P = ۰$$

مثال ۵۰ :

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن اعداد ۴ و ۷− باشند .

مثال ۵۱ :

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $۳\sqrt{۲} \pm ۲\sqrt{۳}$ باشند .

****

نوشتن معادله درجه دومی که ریشه های آن رابطه ی خاصی با ریشه های معادله داده شده دارند.

روش اول :

ابتدا برای معادله داده شده مقادیر S و P را محاسبه کرده و سپس با توجه به رابطه بین ریشه های معادله داده شده و معادله خواسته شده ، مجموع (S') وحاصل ضرب (P') برای ریشه های معادله خواسته شده را نوشته و در رابطه ی زیر قرار می دهیم: $x^۲ - S'x + P' = ۰$

روش دوم :

ریشه های معادله داده شده را x و ریشه های معادله خواسته شده را y در نظر می گیریم . با توجه به مسئله ، رابطه بین x و y را نوشته و x را برحسب y حساب کرده و در معادله داده شده قرارداده و ساده می کنیم .

مثال۵۲ :

اگر α و β ریشه های معادله $۳x^۲ - ۶x + ۱۰ = ۰$ باشد . معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $۳ - ۲\alpha$ و $۳ - ۲\beta$ باشند.

روش اول :

روش دوم :

مثال ۵۳ :

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن مربع ریشه های معادله $x^۲ + ۴x - ۶ = ۰$ باشد .

مثال۵۴ :

اگر α و β ریشه های معادله $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ باشند . به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب معادله ی $۸x^۲ + kx - ۱ = ۰$ به صورت مجموعه $\{\alpha^۲\beta, \alpha\beta^۲\}$ می باشد.

مثال۵۵ :

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن از معکوس ریشه های معادله $x^۲ - ۳x - ۸ = ۰$ دو واحد کمتر باشد .

حل برخی معادلات به کمک معادله درجه دوم :

در بعضی از معادله ها می توان با تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرده و آن را حل نمود .

مثال ۵۶ :

معادله $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$ **را حل کنید . (کنکور ت)**

مثال۵۷ :

معادله $x-۶\sqrt{x}-۷=۰$ **را حل کنید .**

مثال۵۸ :

معادله $x^۴-۳x^۲-۴=۰$ **را حل کنید .**

حل مسئله به کمک معادله درجه دوم :

برای حل مسائل با استفاده از معادله درجه دوم ، ابتدا پارامترهای مسئله را مشخص کرده و رابطه ی بین آنها را نوشته و در صورت لزوم همه ی پارامترها را بر حسب یکی نوشته و آن را به یک معادله تبدیل کرده و حل می کنیم .

مثال۵۹ :

محیط یک مستطیل ۳۶cm و مساحت آن ۶۵$cm^۲$ است . طول و عرض مستطیل را محاسبه کنید .

مثال۶۰ :

طول ضلع یک مستطیل سه برابر ضلع یک مربع و ضلع مربع **۴** واحد کمتر از عرض مستطیل است . اگر مساحت مستطیل یک واحد بیشتر از مساحت مربع باشد . طول ضلع مربع را حساب کنید .

تجزیه چند جمله ای درجه دوم ax^2+bx+c به کمک معادله درجه دوم

هرگاه ax^2+bx+c یک چند جمله ای درجه دوم باشد . برای تجزیه آن می توان ابتدا برای معادله $ax^2+bx+c=0$ مقدار Δ را محاسبه کرد.

۱- اگر $\Delta>0$ باشد معادله دو ریشه حقیقی مانند x_1, x_2 دارد . در این صورت

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

مثال ۶۱ :

عبارت $3x^2-7x+4$ را تجزیه کنید .

۲- اگر $\Delta=0$ باشد معادله ریشه مضاعف $x=\frac{-b}{2a}$ دارد . تجزیه عبارت ax^2+bx+c به شکل زیر است :

$$ax^2+bx+c=a(x-(\frac{-b}{2a}))^2=a(x+\frac{b}{2a})^2$$

مثال ۶۲ :

عبارت $x^2-3x+\frac{9}{4}$ را تجزیه کنید .

۳- اگر $\Delta<0$ باشد معادله ریشه حقیقی ندارد . عبارت ax^2+bx+c به کمک ضرائب حقیقی تجزیه نمی شود.

مثال ۶۳ :

عبارت x^2+3x+5 را در صورت امکان تجزیه کنید .

تمرین :

اگر عبارت درجه دوم $mx^2+(m+3)x-1$ به کمک ضرائب حقیقی تجزیه نشود . حدود m را بیابید.

تمرین :

۱- اگر β,α ریشه های حقیقی معادله $(m^2-1)x^2-4x+m=0$ باشند ، به ازای چه مقدار m عدد $\frac{1}{4}$ واسطه حسابی بین β,α است؟

۲- اگر β,α ریشه های حقیقی معادله $2x^2+(m-2)x-1=0$ باشند ، اگر $2,\beta,\alpha$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. واسطه حسابی بین β,α رابیابید .

۳- اگر ریشه های معادله درجه دوم $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه های معادله $3x^2+7x+1=0$ بیشتر باشد ، مقدار a و b را بیابید.

۴- به ازای کدام مقدار m ،معادله درجه دوم $mx^2+5x+m^2=6$ دو ریشه ی حقیقی و معکوس هم دارد؟

۵- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر با ۶ است ؟

۶- به ازای کدام مقدار m رابطه ی $2\alpha+3\beta=2$ بین ریشه های معادله $3x^2-6x+5m-1=0$ برقرار است؟

۷- اگر دو معادله درجه دوم $x^2-3x+m=0$ و $x^2+x-3m=0$ دارای یک جواب مشترک باشند . این جواب مشترک را بیابید .

۸- معادله های زیر را حل کنید

الف) $x^4-10x^2+9=0$

ب) $x^4-5x^2=24$

ج) $(x-1)^2-4|x-1|-5=0$

د) $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$

هـ) $(x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$

و) $(\frac{x^2}{3}-2)^2-11(\frac{x^2}{3}-2)+10=0$

ز) $x^6-9x^3+8=0$

ح) $x-\sqrt{x}=12$

۹- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن از نصف معکوس ریشه های معادله $x^2-4x+1=0$ سه واحد کمتر باشند.

۱۰- اگر β,α ریشه های معادله $x^2-4x+1=0$ باشند حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

الف) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$

ب) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

ج) $\alpha\beta^3+\beta\alpha^3$

۱۱ - بدون حل معادله و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت ریشه های معادله $x^2+x-5=0$ بحث کنید.

۱۲ - معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن مربع ریشه های معادله $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ باشند .

۱۳- دوبرابر عدد مثبتی از ثلث مربع آن ، ۹ واحد کمتر است. این عدد را بیابید.

۱۴- حدود m را طوری بیابید که معادله $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد.

تابع درجه دوم

سال گذشته در ریاضی ۱ خواندید که هر تابع درجه دوم به شکل استاندارد $f(x)=ax^2+bx+c$ می باشد که c,b,a اعداد حقیقی و a مخالف صفر است .

رسم نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$:

می توان از مراحل زیر برای رسم دقیق تر نمودار استفاده کرد .

اگر $a>0$ سهمی دارای مینیمم و اگر $a<0$ باشد سهمی دارای ماکزیمم است .

۱ــ عرض از مبدأ یعنی نقطه $(0,c)$ را تعیین می کنیم.

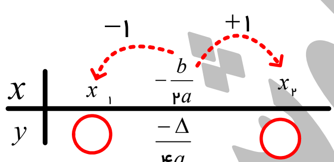
۲ــ طول رأس سهمی (محور تقارن) از رابطه ی $x=\frac{-b}{2a}$ به دست آورد . با جایگذاری می توان عرض رأس را مشخص کرد .

البته می توان از فرمول $y=\frac{-\Delta}{4a}$ نیز عرض رأس را تعیین کرد . پس مختصات رأس به صورت $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ می باشد

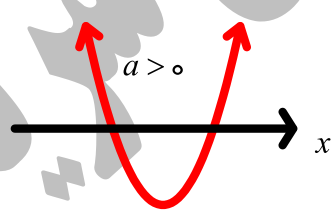
توجه ۱ : اگر معادله سهمی به شکل $y=a(x-h)^2+k$ باشد . خط $x=h$ خط تقارن و نقطه ی (h,k) رأس سهمی است.

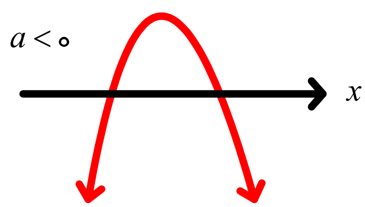
توجه ۲ : همیشه مقدار ماکزیمم (بیشترین مقدار) یا مقدار مینیمم (کمترین مقدار) یک سهمی برابر با عرض رأس سهمی است که به ازای طول رأس به دست می آید .

توجه ۳ : برای رسم سریع ترمی توان از الگوی روبرو استفاده کرد :



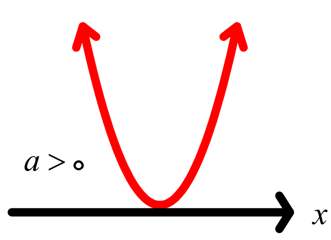
۳ــ اگر Δ معادله درجه دوم بزرگتر از صفر باشد تابع f در دو نقطه محور x ها را قطع می کند یا اصطلاحاً می گویند دارای دو صفر است که با توجه به علامت a به یکی از دوشکل زیر است :

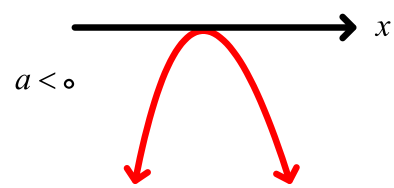




اگر $\Delta=0$ باشد . نمودار تابع در نقطه ای به طول $x=\frac{-b}{2a}$ برمحور x ها مماس است .

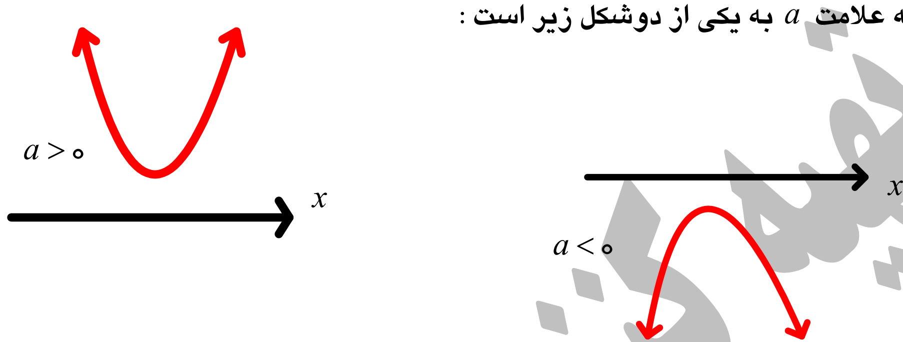
با توجه به علامت a به یکی از دوشکل زیر است :





اگر $\Delta < 0$ باشد . نمودار تابع x ها را قطع نمی کند و همیشه بالای محور x ها یا زیر محور x ها قرار دارد .

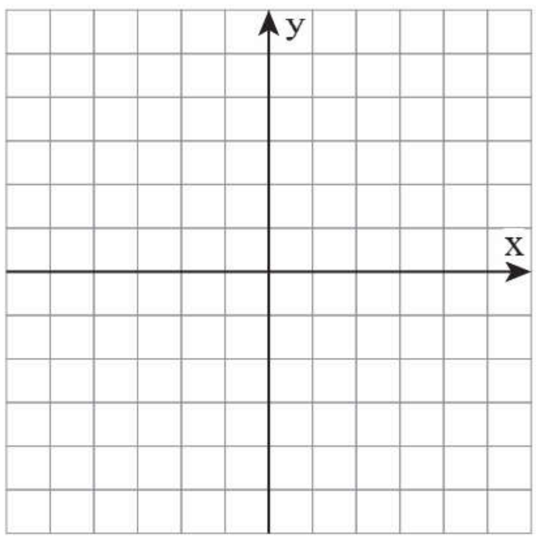
با توجه به علامت a به یکی از دوشکل زیر است :



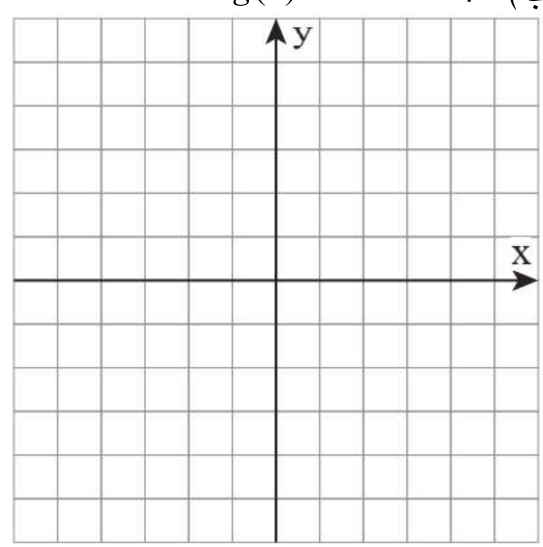
مثال۶۴ :

مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را تعیین کرده و نمودار آنها را رسم کنید .

الف) $f(x)=x^2-4x+3$



ب) $g(x)=-x^2-x+2$



مثال۶۵ :

مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=(1-m)x^2+(m^2-5)x+1$ در نقطه ای به طول یک می باشد . مقدار m را بیابید.

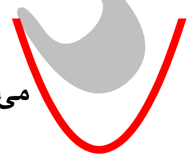
مثال ۶۶ :

به ازای چه مقدار a ، رأس سهمی به معادله $y = ax^{۲} + ۲ax - ۳$ روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

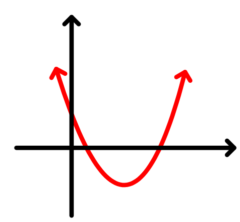
مثال ۶۷ :

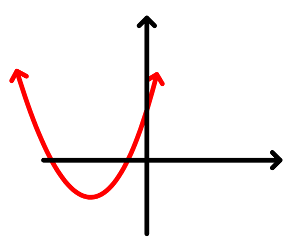
به ازای چه مقدار c ، خط به معادله $y = -۱$ محور تقارن سهمی به معادله $y = \frac{۱}{۳}x^{۲} - ۲x + c$ را بر روی خود سهمی قطع می کند؟

پس به طور کلی در مورد نمودار تابع درجه دوم $y = f(x) = ax^{۲} + bx + c$ ($a \neq ۰$) داریم :

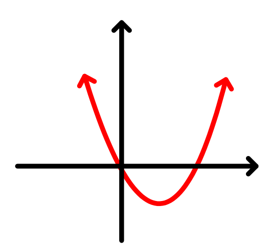
الف - اگر $a > ۰$ تابع دارای **مینیمم** می باشد و نمودار تابع به صورت  می باشد.

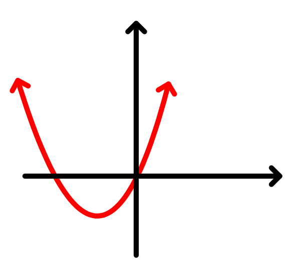
۱- اگر $\Delta > ۰$ و $c > ۰$ نمودار به یکی از دو صورت زیر می باشد. سهمی محور طولها را در**دو** نقطه قطع می کند.



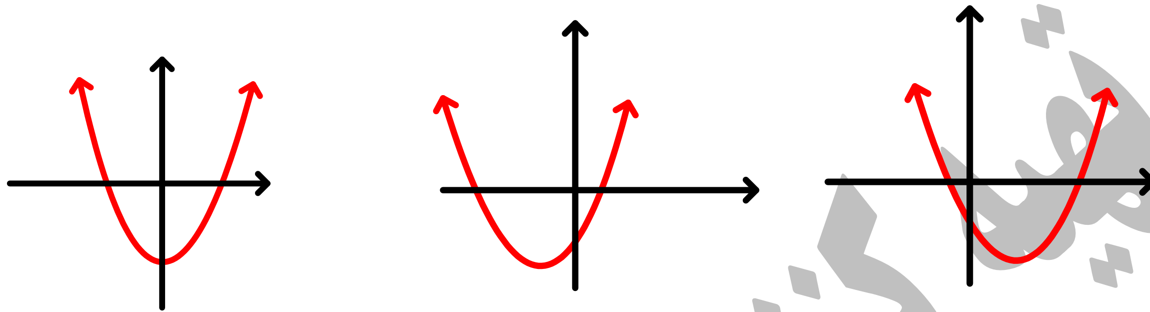


۲ - اگر $\Delta > ۰$ و $c = ۰$ نمودار به یکی از دو صورت زیر می باشد. سهمی محور طولها را در**دو** نقطه قطع می کند.

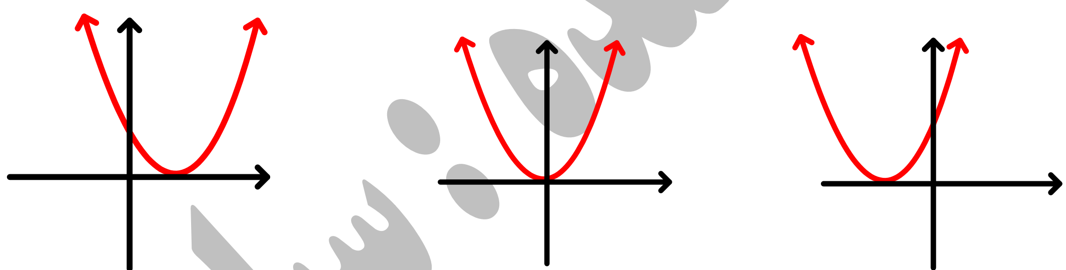




۳– اگر $\Delta>0$ و $c<0$ نمودار به یکی از سه صورت زیر می باشد. سهمی محور طولها را در**دو** نقطه قطع می کند.

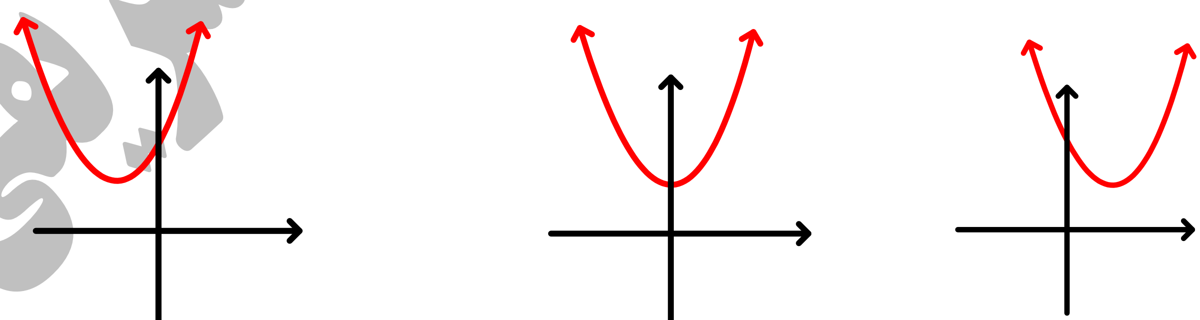


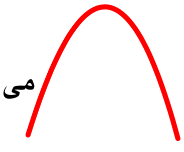
۴– اگر $\Delta=0$ نمودار به یکی از صورتهای زیر می باشد. سهمی از بالا بر محور x ها مماس است.



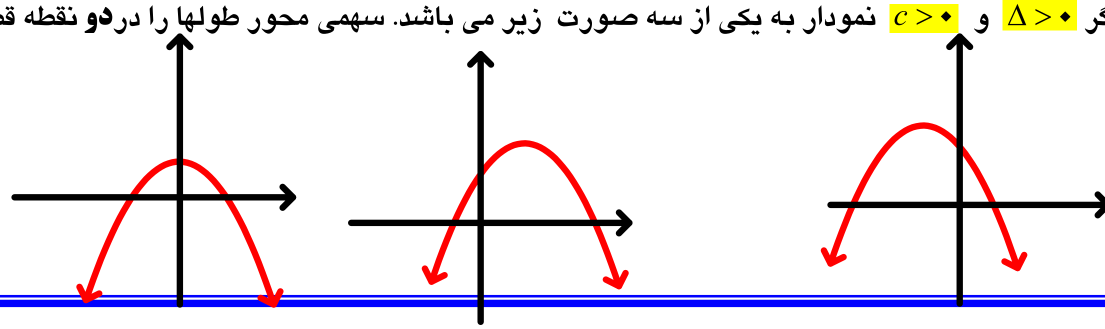
۵ – اگر $\Delta<0$ نمودار به یکی از صورت های زیر می باشد. سهمی محور طولها را قطع **نمی کند**..

نمودار سهمی به طور کامل بالای محور x هاست.

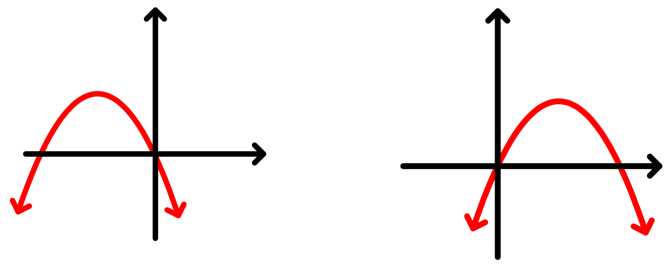


ب - اگر $a<0$ تابع دارای **ماکزیمم** می باشد و نمودار سهمی به صورت  می باشد.

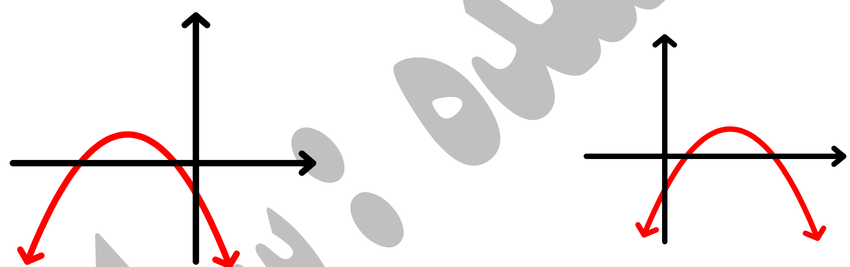
۶– اگر $\Delta>0$ و $c>0$ نمودار به یکی از سه صورت زیر می باشد. سهمی محور طولها را در**دو** نقطه قطع می کند.



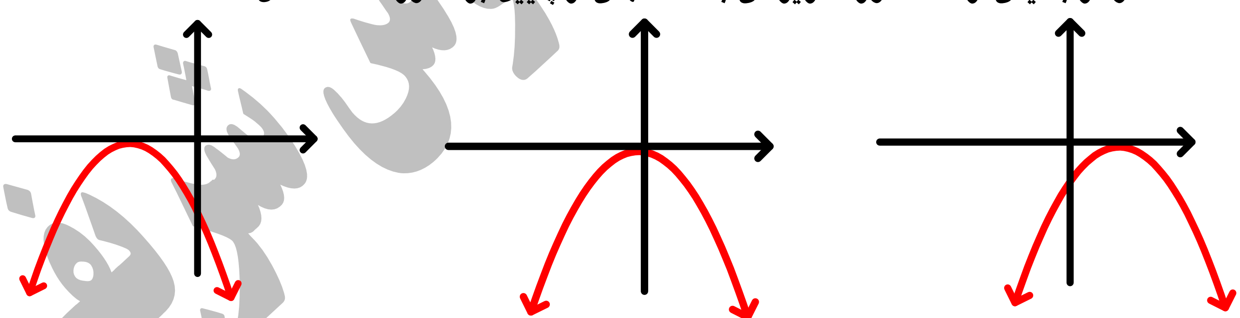
۷– اگر $\Delta > 0$ و $c = 0$ نمودار به یکی از دو صورت زیر می باشد. سهمی محور طولها را در**دو** نقطه قطع می کند.



۸– اگر $\Delta > 0$ و $c < 0$ نمودار به یکی از دو صورت زیر می باشد. سهمی محور طولها را در**دو** نقطه قطع می کند.

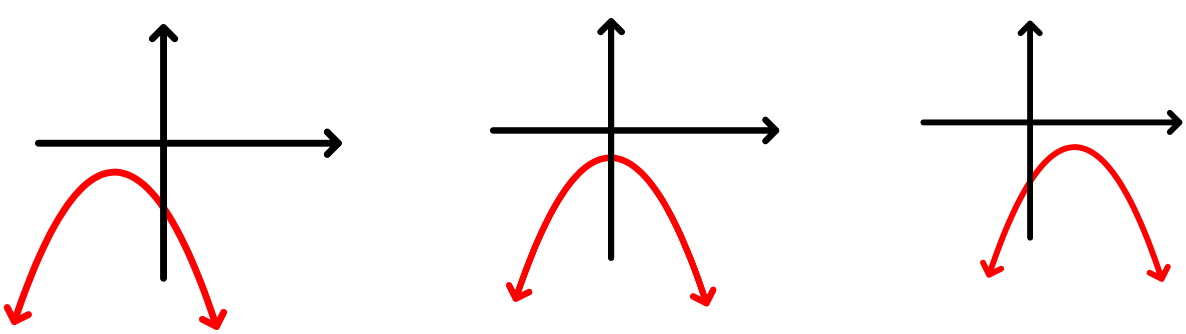


۹– اگر $\Delta = 0$ نمودار به یکی از سه صورت زیر می باشد. سهمی از پایین بر محور x ها مماس است .



۱۰– اگر $\Delta < 0$ نمودار به یکی از سه صورت زیر می باشد. نمودار سهمی به طور کامل پایین محور x هاست.

سهمی محور طولها را قطع **نمی کند**..



تعیین ضابطه (یامعادله) سهمی :

برای یافتن معادله یک سهمی که نمودار آن یا چند نقطه از آن داده شده است می توان معادله سهمی را به شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ یا $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ (که در آن x_2, x_1 طول نقاط برخورد نمودار با محور طولها است) را در نظر گرفته و با استفاده از این نکته که **هر که نقطه روی نمودار تابع است یا نمودار تابع از آن عبور می کند در معادله تابع صدق می کند** و نیز استفاده از فرمول طول رأس سهمی ، می توان ضرائب c,b,a را به دست آورد.

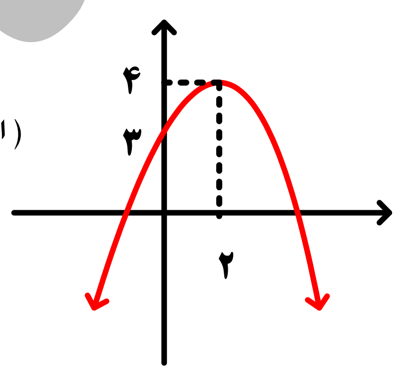
مثال۶۸ :

معادله یک سهمی را بیابید که محور طول ها را در نقطه ای به طول **۱** و محور عرض ها را در نقطه ای به عرض **۲−** قطع کرده و از نقطه $(-1,4)$ عبور می کند.

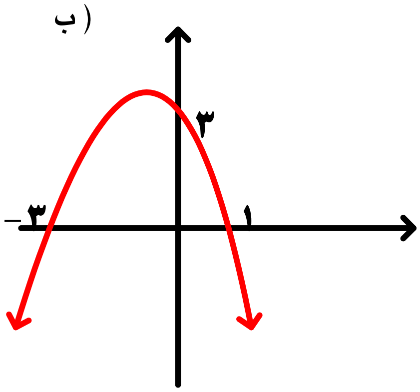
مثال۶۹ :

در شکل های زیر نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است . ضرائب c,b,a را بیابید .

(الف



ب)



تعیین علامت های ضرائب c,b,a از روی نمودار داده شده :

برای تعیین علامت a کافی است مشخص کنیم

دهانه سهمی روبه بالا ست که در این صورت $a>0$

یا دهانه سهمی روبه پایین است که در این صورت $a<0$

برای تعیین علامت c :

اگر نمودار بالاتر از مبدأ محور y ها را قطع می کند دراین صورت $c>0$

اگر نمودار درمحل مبدأ محور y ها را قطع می کند دراین صورت $c=0$

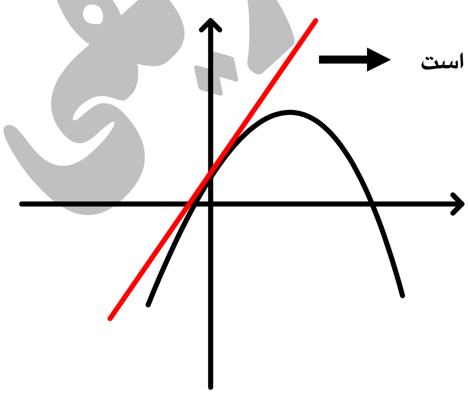
اگرنمودار پایین تر از مبدأ محور y ها را قطع می کند دراین صورت $c<0$

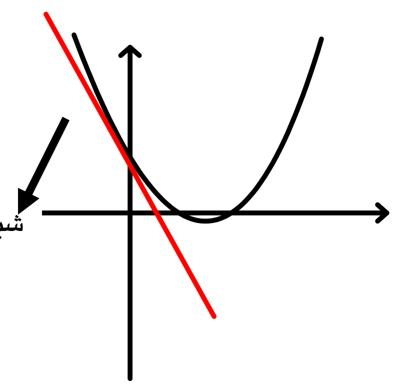
برای تعیین b :

کافی است به کمک علامت a و فرمول $\frac{-b}{2a}$ و علامت طول رأس ، علامت b راتعیین کرد .

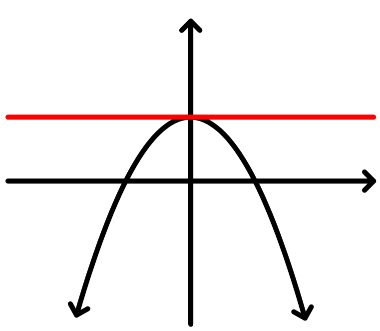
البته یک روش ساده برای تعیین علامت b به این صورت است که <u>علامت شیب خط مماس</u> در محل تقاطع نمودار با محور y ها را تعیین می کنیم . اگر شیب مثبت ، b مثبت و اگر شیب صفر ، b صفر و اگر شیب منفی ، b منفی است.

شیب این خط مثبت است پس b مثبت است





شیب این خط منفی است پس b منفی است

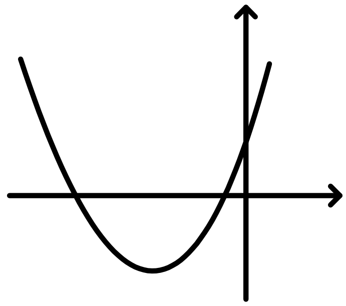


شیب این خط صفر است پس b صفر است

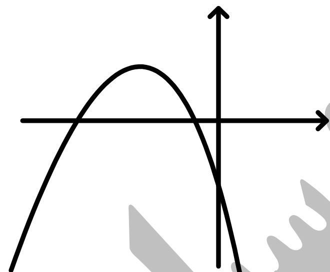
مثال۷۰ :

درشکل های زیر نمودار سهمی $f(x)=ax^{2}+bx+c$ داده شده است . علامت های ضرائب c,b,a و Δ را تعیین کنید .

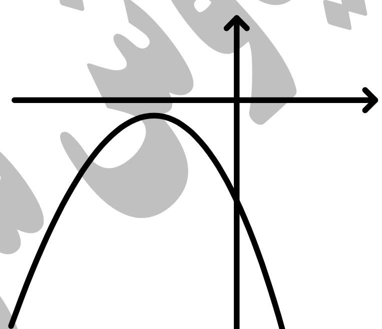
الف)



ب)



ج)



****

شرایط عبور نمودار سهمی از هرکدام ازناحیه های محورهای مختصات :

سهمی ممکن است از دو یا سه یا هرچهار ناحیه دستگاه مختصات بگذرد .

۱) اگر سهمی فقط از **دو** ناحیه بگذرد حتما $\Delta \le 0$

الف) برای $a>0$ سهمی از ناحیه های **اول** و **دوم** می گذرد.

ب) برای $a<0$ سهمی از ناحیه های سوم و چهارم می گذرد

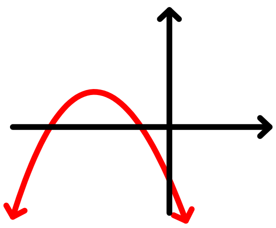
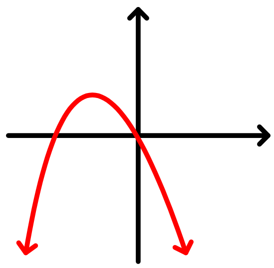
۲) اگر سهمی از چهار ناحیه بگذرد حتماً $P=\frac{c}{a}<0$ است . یعنی c,a هم علامت نیستند و حتماً دو ریشه مختلف العلامت دارد

۳-اگر سهمی فقط از یک ناحیه نگذرد و از سه ناحیه دیگر بگذرد باید معادله درجه دوم آن دوریشه هم علامت داشته باشد.

الف) فقط از ناحیه اول نگذرد.

باید دوریشه منفی یا صفر داشته باشد و دهانه سهمی رو به پایین باشد

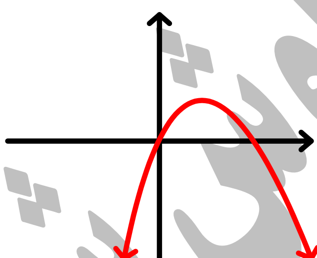
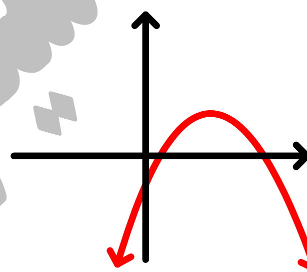
به عبارت دیگرباید: $a<0$ ، $\Delta>0$ ، $P\ge 0$ ، $S<0$ و نمودار به تابع به شکل زیر است :

ب) فقط از ناحیه **دوم** نگذرد.

باید دوریشه مثبت یا صفر داشته باشد و دهانه سهمی رو به پایین باشد

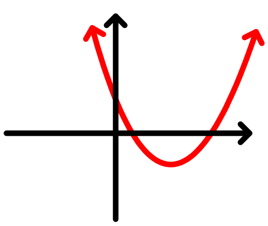
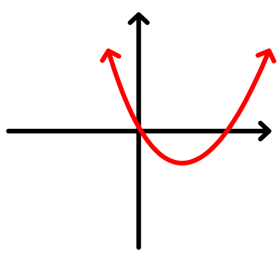
باید $a<0$ ، $\Delta>0$ ، $P\ge 0$ ، $S>0$ و نمودار به تابع به شکل زیر است :

ج) فقط از ناحیه **سوم** نگذرد.

باید دوریشه مثبت یا صفر داشته باشد و دهانه سهمی رو به بالا باشد

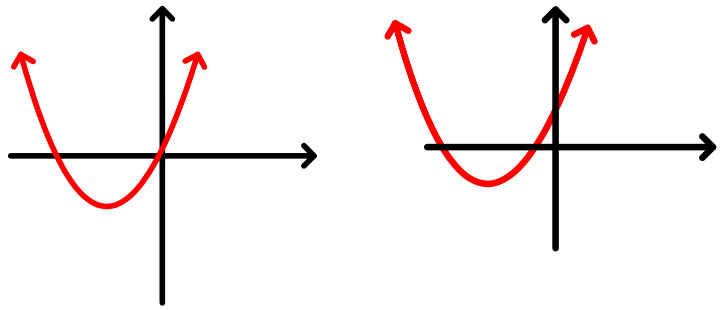
باید $a>0$ ، $\Delta>0$ ، $P\ge 0$ ، $S>0$ و نمودار تابع به شکل روبرو است :

د) فقط از ناحیه **چهارم** نگذرد.

باید دوریشه منفی یا صفر داشته باشد و دهانه سهمی رو به بالا باشد

باید $a>0$ ، $\Delta>0$ ، $P\geq 0$ ، $S<0$ و نمودار تابع به شکل روبرو است :



مثال ۷۱ :

به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $f(x)=(m-2)x^2+mx+2m+1$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات عبور می کند؟

مثال ۷۲ :

حدود a را طوری بیابید که نمودار سهمی $f(x)=ax^2-(a+2)x$ فقط از ربع دوم دستگاه مختصات عبور نکند؟

مثال۷۳ :

به ازای چه مقادیری از m سهمی $y = x^{۲} - ۲mx + ۲m + ۳$ فقط از ناحیه سوم نمی گذرد؟

صفرها یا ریشه های یک تابع :

پیدا کردن صفرهای تابع :

برای پیدا کردن صفرها یا نقاط برخورد با محور xهای یک تابع مانند $f(x)$ در صورت وجود ، کافی است معادله $f(x) = ۰$ را حل کنیم.

نکته :

اگر $x = k$ یک صفر تابع $f(x)$ باشد . در این صورت $f(x)$ بر $x - k$ بخش پذیر است . برای یافتن ریشه های دیگر معادله $f(x) = ۰$ کافی است که $f(x)$ را بر $x - k$ تقسیم کرده و خارج قسمت را برابر صفر قرار داده و حل کنیم.

به طور کلی:

برای پیدا کردن باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $ax + b$ ، کافی است ریشه $ax + b = ۰$ یعنی $x = -\frac{b}{a}$ را پیدا کنیم حاصل $R = P(-\frac{b}{a})$ برابر با باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ می باشد.

بنابراین : چند جمله ای $P(x)$ بر $ax + b$ بخش پذیر است اگر و تنها اگر $R = P(-\frac{b}{a}) = ۰$ باقی مانده

مثال۷۴ :

باقی مانده تقسیم چند جمله ای $۶x^{۴} - ۷x^{۳} + ۳x - ۲$ بر $۲x - ۲$ را بیابید .

مثال۷۵ :

اگر باقی مانده تقسیم $۲x^۳+x^۲-۸x+m+۳$ بر $۳x+۶$ برابر با **۷** باشد . مقدار m را بیابید .

مثال۷۶ :

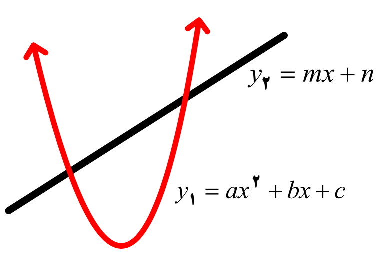
اگر **۲** $x=$ یکی از ریشه های معادله $x^۳-۲x^۲+ax+۲=۰$ باشد . مقدار a و جوابهای دیگر معادله را بیابید .

بررسی وضعیت یک خط و یک سهمی :

برای بررسی یک خط و یک سهمی عرض های (یا y های) آنها را مساوی هم قرار می دهیم .

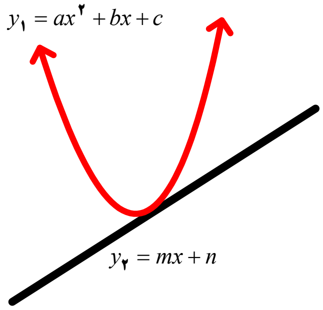
یک خط و یک سهمی نسبت به هم یکی از حالت های زیر را دارند:

۱– خط و سهمی در دو نقطه متقاطع هستند و معادله تلاقی که یک معادله درجه دوم است ، دو ریشه دارد .



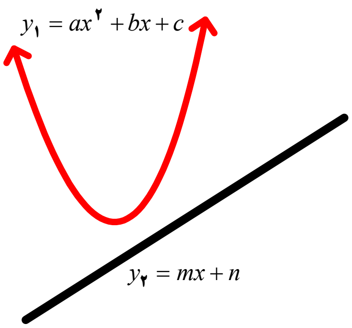
$$y_۱=y_۲ \quad \Rightarrow \quad \Delta>۰$$

۲– خط و سهمی بر هم مماس اند و معادله تلاقی آنها ریشه مضاعف دارد.



$$y_1 = y_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0$$

۳– خط و سهمی یکدیگر را قطع نمی کنند و معادله تلاقی جواب حقیقی ندارد .



$$y_1 = y_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta < 0$$

مثال۷۷ :

خط به معادله $y = mx + 4$ با منحنی به معادله $y = -x^2 + 2x$ هیچ نقطه ی مشترکی ندارند . حدود m را بیابید

مثال۷۸ :

به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز **ناحیه اول** محورهای مختصات مماس است؟

مثال های کاربردی از تابع درجه دوم :

مثال۷۹ :

اگر $2x+y=14$ باشد . مقدار x و y را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم گردد .

نتیجه :

اگر $ax+by=k$ ($a,b,k\in R$ ثابت ومثبت) باشد . حاصل ضرب آن ها وقتی ماکزیمم است که $x=\frac{k}{2a}$ و $y=\frac{k}{2b}$

مثال ۸۰ :

اگر یک موشک به طور عمودی به هوا پرتاب شود و معادله مسیرطی شده به صورت $h(t)=100t-25t^2$ باشد

(t مدت زمان برحسب ثانیه و h ارتفاع از سطح زمین بر حسب متر می باشد)

الف) چه مدت طول می کشد تا به بالاترین ارتفاع خود برسد

ب) ماکزیمم ارتفاع این موشک را حساب کنید .

تمرین

۱ – نمودار تابع $f(x)=x^3-x^2+(m+1)x+4$ محور x هارا در نقطه ای به طول ۱ قطع می کند سایرصفرهای تابع را بیابید.

۲- اگر $x=-1$ و $x=\frac{1}{3}$ ریشه های معادله $6x^3-5x^2+ax+b=0$ باشد . مقادیر b,a وریشه ی دیگر معادله را بیابید.

۳- بیشترین مقدار تابع $f(x)=(k+3)x^2-4x+k$ برابر صفر باشد . مقدار k را بیابید.

۴- رأس سهمی $y=x^2+mx+m-1$ بر روی خط $y=x+1$ قرار دارد . مقدار m را بیابید.

۵- بیشترین مقدار تابع $f(x)=mx^2+mx+5x$ برابر ۴ باشد مقدار m را بیابید.

۶– به ازای کدام مقدار m منحنی به معادله ی $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$ محور x ها را در دو نقطه به طول منفی قطع می کند؟

۷– به ازای کدام مقدار m منحنی به معادله ی $y=(m+2)x^2+3x+1-m$ محور x ها را در دوطرف مبدأ قطع می کند؟

۸– به ازای کدام مقدار m منحنی به معادله ی $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ از بالا برمحور x ها مماس است؟

۹ – حدود m را طوری بیابید که نمودار تابع $y=mx^2-4x+m-3$ بالای محور x ها باشد.

۱۰– به ازای چه مقادیری از a عبارت $ax^2+2x+4a$ همواره مثبت است؟

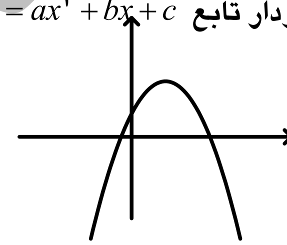
۱۱– به ازای چه مقادیری از m عبارت $\dfrac{(m-1)x^2+(m-1)x+1}{-2x^2-1}$ همواره منفی است؟

۱۲ – به ازای چه مقادیری از m سهمی به معادله ی $y=(m-2)x^2+2x+1-m$ فقط از ناحیه دوم نمی گذرد؟

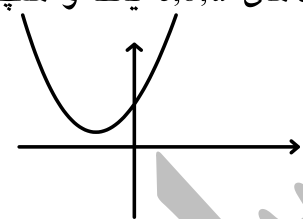
۱۳– به ازای کدام مقادیر از a نمودار سهمی $y=x^2+ax+4-\frac{1}{4}a^2$ فقط از ناحیه چهارم نمی گذرد؟

۱۴– در زیر نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ رسم شده است .علامت های c,b,a یافته و همچنین $f(x)$ را تعیین علامت کنید.

الف)

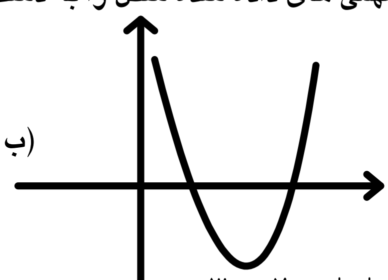


ب)



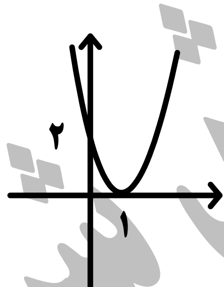
۱۵– معادله سهمی های داده شده شکل را به دست آورید.

ب)



$(3,-2)$ $|a|=1$

الف)



۱۶ – به ازای چه مقادیری از m خط به معادله $y=mx+3$ نمودار سهمی به معادله ی $f(x)=(m-2)x^2+2x$ را در دو نقطه قطع می کند؟

۱۷ – اگر $x=\frac{5}{2}$ یکی از ریشه های معادله $2x^3-3x^2-9x+10=0$ باشد. ریشه های دیگر معادله را بیابید.

۱۸ – اگر در تقسیم چند جمله ای های $P(x)=2x^3-6x^2+mx+3$ و $q(x)=-x^3+2x+5$ بر $2x-1$ دارای باقی مانده مساوی باشند . مقدار m را بیابید.

۱۹ – اگر $3x-4y=24$ باشد . مقدار x و y را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها مینیمم گردد .

۲۰ – معادله های زیر را به روش هندسی حل کنید .

الف) $|x-1|-x^2+1=-x$

ب) $|x|+2x-4=0$

ج) $(x-1)^2+|x|=0$

د) $x^2-2x+1=0$

۲۱– منحنی به معادله $y=(2x+1)(x+8)$ با خطوط $y=mx$ نقطه ی مشترکی ندارد . مجموعه مقادیر m را بیابید .

تمرین

۱ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۲ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{2} - 1$ و $\sqrt{2} + 1$ باشد.

۳ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

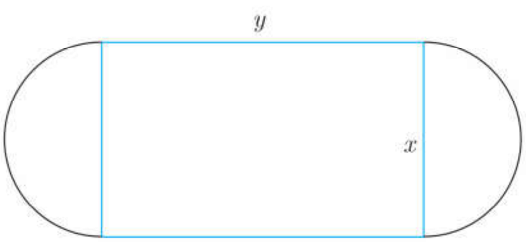
الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

۴ موشکی که به‌طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادلهٔ آن به صورت مقابل است. $h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$

الف) چقدر طول می‌کشد تا موشک به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، موشک به زمین بازمی‌گردد؟

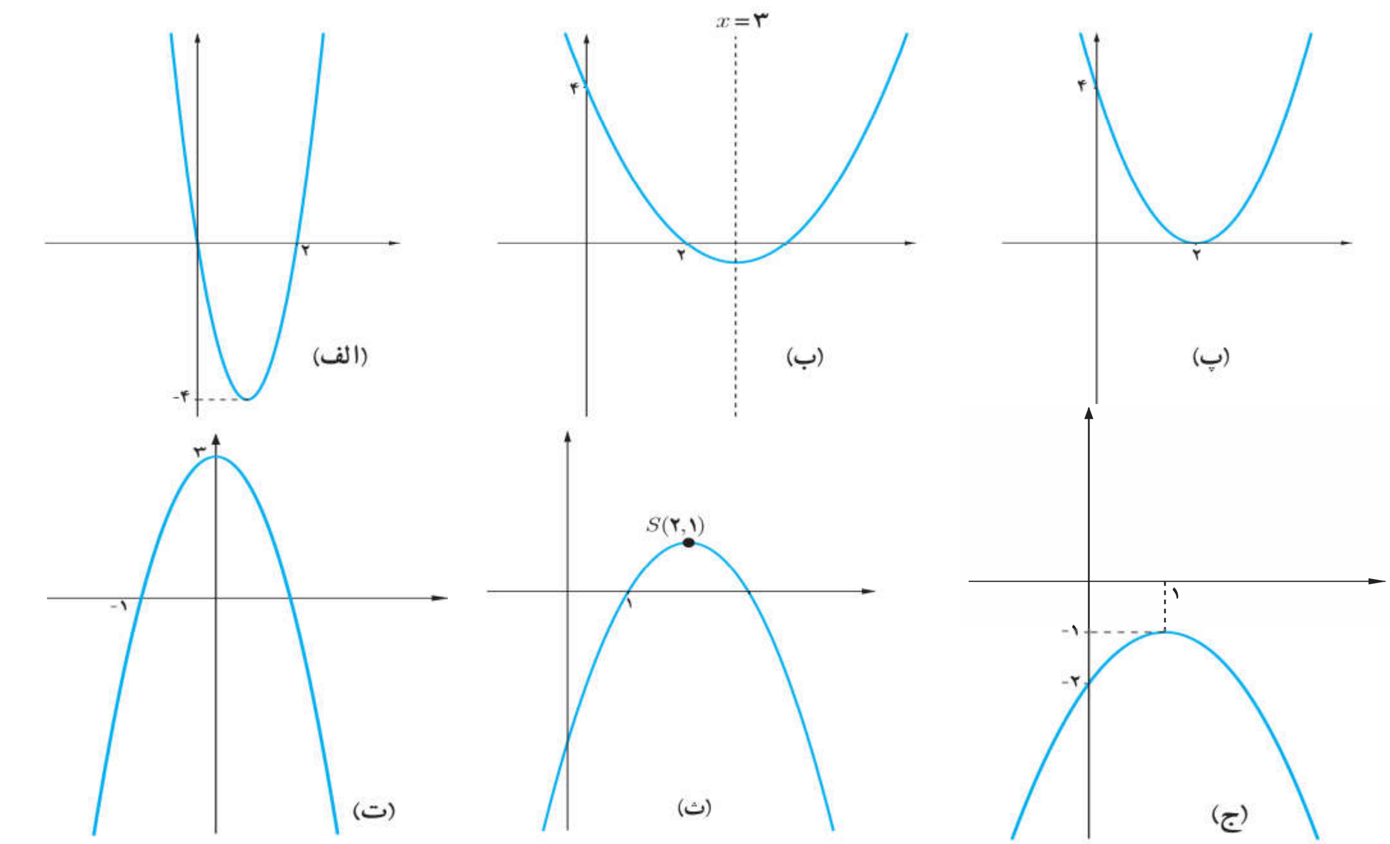


۵ استادیومی به شکل مقابل درحال ساخت است که در آن $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و نیم‌دایره‌ها به شعاع $\frac{x}{2}$ هستند. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، x و y را طوری بیابید که :

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۶ ضابطهٔ جبری سهمی‌های زیر را بنویسید.



معادله های گویا :

هرمعادله که شامل عبارتهای گویا باشد را یک معادله گویا می نامند.

به عنوان مثال هرکدام از معادله های زیر گویا هستند.

$$\frac{x+8}{200+x}=\frac{7}{100} \quad , \quad t-2=\frac{5}{t+2} \quad , \quad \frac{1}{y}+\frac{y-1}{y+1}=\frac{3}{y^2+y}$$

حل معادله های گویا :

ابتدا بین مخرج ها ی کسرها ، کوچکترین مضرب مشترک را انتخاب کرده و طرفین معادله را در این کوچکترین مضرب مشترک ضرب کرده و ساده می کنیم . معادله جبری به دست آمده را حل می کنیم .

جوابهایی قابل قبول هستند که به ازای آنها ، حاصل هیچکدام از مخرج ها صفر نباشد و نیز در واقعیت مسئله صدق کنند.

توجه :

در بعضی مواقع که معادله به شکل $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ باشد ، می توان با طرفین ، وسطین کردن معادله را حل کرد

تعیین کوچکترین مضرب مشترک (ک . م . م) دو چند جمله ای:

برای تعیین ک . م . م دو عبارت چند جمله ای ابتدا آن ها را تجزیه می کنیم.

ک . م . م برابر با حاصل ضرب عوامل مشترک با بیشترین توان ضرب در عوامل غیر مشترک می باشد.

مثال ۸۱) در هر مورد ک. م . م بین عبارت ها را به دست آورید .

الف) $A=6x^3(2x+1)^5(x-1)^2$ و $B=4x^2(2x+1)^7(x+1)^4$

حل :

در این دو عبارت **ک.م.م** بین دو عدد ۶ و ۴ عدد۱۲ می باشد و بین x^2 و x^3 عبارت x^3 و بین دو عبارت مشترک $(2x+1)^7,(2x+1)^5$ عبارت $(2x+1)^7$ را انتخاب می کنیم . بقیه عبارتها غیر مشترک هستند. پس

$$\text{ک.م.م}=12x^3(2x+1)^7(x-1)^2(x+1)^2$$

ب) a^2+3a-4 و a^2-6a+5

ج) x^2-1 و x^2-4x+3 و x^2+8x-9

مثال۸۲ :

معادله های زیر را حل کنید .

الف) $\frac{۱}{x-۱}=\frac{۳x}{x+۱}-\frac{۱۹}{۳}$

ب) $\frac{۳}{x+۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۴x-۴}{x^{۲}-۴}$

ج) $\frac{۳x+۶}{۲x+۳}=\frac{۳}{۲}$

د) $\frac{x+۴}{۳x+۱۲}=\frac{۱}{۳}$

نکته :

هرمعادله درجه اول به صورت $ax=b$ می باشد .

اگر $a \neq 0$ باشد ، معادله یک جواب به صورت $x=\frac{b}{a}$ دارد .

اگر $a=0$ ولی $b \neq 0$ ، معادله جواب ندارد و مجموعه جواب آن تهی است .

اگر $a=0$ و $b=0$ ، معادله بیشمار جواب دارد و مجموعه جواب آن همه اعداد حقیقی هستند.

****

در برخی مسائل یکی از جوابهای معادله را می دهند و از شما یک مجهول را می خواهند که باید ریشه داده شده را در معادله جایگذاری کرده و مقدار مجهول را پیدا می کنیم .

بعضی مواقع علاوه بر مقدار مجهول ، جواب دیگر معادله نیز خواسته می شود که باید بعد از به دست آوردن مقدار مجهول ، معادله راکامل حل کنیم.

مثال۸۳ :

به ازای چه مقدار kمعادله $\frac{3x^2+3}{x^2-4}=\frac{2x-1}{x+2}-\frac{2x+k}{x-2}$ دارای جواب $x=3$ می باشد؟

مثال۸۴ :

اگر یکی از جوابهای معادله $\frac{a+4}{x-1}+\frac{x}{x-3}=5$ برابر با $x=4$ باشد . مقدار a و جواب دیگر معادله را به دست آورید.

مثال۸۵ :

اگر معادله گویای $\frac{۲x-۲}{x+۱}+\frac{m}{x}=۱$ جواب حقیقی نداشته باشد . حدود m را بیابید.

مستطیل طلایی :

اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم $\frac{L}{w}=\frac{L+w}{L}$ ، آنگاه می گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

عدد طلایی :

عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ را عدد طلایی گویند که مقدار تقریبی آن برابر با $۱/۶۱۸$ می باشد .

مثال۸۶ :

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل ، برابر ۱۴۴ متر و طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد .
طول و عرض زمین را محاسبه کنید .

حل مسائل کاربردی به معادلات گویا :

بعضی مسائل کاربردی به حل یک معادله گویا ختم می شوند . در این مدل سئوالات ، مهمترین موضوع نوشتن معادله ی گویاست. برای نوشتن معادله گویا به موارد زیر توجه نمایید :

۱- اگر کاری به صورت دائم و یکنواخت در x روز یا x ساعت انجام می شود آن گاه در هر ساعت و یا در هر روز $\frac{1}{x}$ آن کار انجام می شود.

به عنوان مثال اگر یک استخر در مدت ۵ ساعت با سرعت یکنواخت از آب پر می شود ، در هر ساعت $\frac{1}{5}$ استخر پر می شود

۲- اگر عمل x به اندازه ی n واحد (ساعت ، روز ، ....) بیشتر از عمل y باشد آن گاه داریم : $x = y + n$

مثال ۸۷ :

دو نقاش باهم ساختمانی را در **۳** روز رنگ می کنند . اگر هرکدام به تنهایی کار کند نفر اول **۸** روز ، زودتر ساختمان را رنگ می کند . هر کدام به تنهایی در چند روز ساختمان را رنگ می کنند ؟

مثال ۸۸ :

در یک مغازه ماهی فروشی ماهی های آب شور، ماهی ها را در محلول آب ونمک ۱۰ درصد نگهداری می کنند .

یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب و نمک ۶ درصد تهیه می کند .

الف) چگونه می توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند؟

ب) اگر هیچ نمکی موجود نباشد چقدر از آب محلول باید تبخیر شود؟

ج) اگر فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد چگونه می توان به غلظت مورد نظر رسید ؟

معادلات گنگ (اصم یا رادیکالی) :

هرمعادله که شامل یک یا چند عبارت رادیکالی(که مجهول زیر رادیکال و غیر قابل ساده کردن)باشد را یک معادله گنگ گویند.

به عنوان مثال معادله های زیر همگی گنگ هستند.

$$\sqrt[3]{x}+3=\sqrt{x}+4x \quad , \quad \sqrt{x}+\sqrt{2x+3}=5 \quad , \quad \sqrt{x^2+3x+2}=x^2+3x$$

همانطوریه که می بینید معادلات رادیکالی ممکن است با فرجه های مختلف باشند. دراین پایه تحصیلی ، معمولا معادلات با فرجه **۲** مورد بررسی قرار می گیرند و حل می کنیم.

حل معادلات گنگ بافرجه ۲:

برای حل اینگونه معادلات ،ابتدا باید معادله را به شکل $\sqrt{P(x)}=q(x)$ نوشته وسپس دو طرف را به توان دو رسانده و ساده کرده و معادله حاصل را حل می کنیم . عمل توان رساندن ممکن است چندین بارتکرار شود.

جوابهایی قابل قبول هستند که به ازای آنها ، حاصل هیچ عبارت زیر رادیکالی منفی نشود و نیز تساوی معادله برقرار باشد.

توجه :

گاهی اوقات با یک تغییر متغیر مناسب ، به راحتی می توان معادلات گنگ را حل کرد .

مثال۸۹ :

معادلات زیر را حل کنید .

الف) $x=\sqrt{2x+3}$

ب) $\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}=5$

ج) $\sqrt{x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}=1$

د) $x^{۲} - ۴x + \sqrt{x^{۲} - ۴x - ۱} = ۷$

هـ) $x(x^{۲} - ۱)\sqrt{x^{۲} - ۹} = ۰$

مثال ۹۰ :

اگر یکی $x = ۴$ از جوابهای معادله $x + a = \sqrt{۵x - x^{۲}}$ باشد. مقدار a و جواب دیگر معادله در صورت وجود را بیابید.

نکته :

اگر $\sqrt[۲n]{f(x)} + \sqrt[۲m]{g(x)} = ۰$ ($m, n \in N$) باشد . برای حل کافی است جواب معادله های $f(x) = ۰$ و $g(x) = ۰$ را به دست آورد . (به عبارت دیگر ، مجموع دو عدد غیرمنفی ، وقتی صفر است که هردو صفر باشند.)
جوابهای مشترک بین این دو معادله ، جواب معادله $\sqrt[۲n]{f(x)} + \sqrt[۲m]{g(x)} = ۰$ است .

مثال ۹۱ :

جوابهای معادله $\sqrt[۶]{x^{۲} - ۴x + ۳} + \sqrt{۲x^{۲} + ۳x - ۵} + \sqrt[۴]{x^{۲} + ۵x - ۶} = ۰$ را به دست آورید .

تمرین معادلات گویا و گنگ :

۱– معادله های زیر را حل کنید

الف) $\frac{x}{x-3}+\frac{3}{x-1}=5$

ب) $\frac{y-3}{y-1}+\frac{y-1}{y-3}=\frac{25}{12}$

ج) $\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x-4}=\frac{5}{x^2-3x-4}$

د) $\frac{a}{2a+1}-\frac{2a^2+5}{2a^2-5a-3}=\frac{3}{a-3}$

هـ) $\frac{1}{2x^2-x+1}+\frac{3}{2x^2-x+3}=\frac{10}{2x^2-x+7}$

و) $3-x-x^2=\frac{3}{x^2+x+1}$

ز) $\frac{1}{x^4}-\frac{13}{x^2}+36=0$

ح) $\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{3}{1-x}+2=0$

۲– به ازای چه مقدار k معادله $\frac{1}{x-1}+\frac{38}{k}=\frac{3x}{x+1}$ دارای جواب $x=-2$ است؟

۳– به ازای چه مقدار a,b معادله ی $\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{2-x}{x+1}$ دارای بیشمارجواب است؟

۴– به ازای چه مقدار m معادله ی $\frac{x+2}{x^2-2x}=\frac{m-1}{2x}$ جواب ندارد؟

۵– به ازای چه مقدار m معادله ی $\frac{2}{1+mx}=2+\frac{3x}{x+2}$ فقط یک جواب است؟

۶– یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصدبا چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده اند. با تبخیر چند کیلوگرم از این محلول ، غلظت به ۵۰ درصد می رسد؟

۷– معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{3}{3+\sqrt{x}}=\frac{5}{x+3\sqrt{x}}$

ب) $\sqrt{\sqrt{x+3}-x}=1+\sqrt{1-x}$

ج) $2x+1=\sqrt{11x-2}$

د) $\sqrt{12+x}-\sqrt{2x+7}=2$

هـ) $x^2-4x+3=\sqrt{x^2-4x+5}$

۸ – حدود m را طوری بیابید که معادله $2x^2-4x-m-\sqrt{8x^2-16x-4m}=0$ دقیقاً دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد.

۹– به ازای چه مقدار a معادله ی $\sqrt{3x^2-7x+2}+\sqrt{2x^2+4x-ax-2a}=0$ ریشه ی حقیقی دارد؟

۱۰– اگر معادله $\frac{x}{x-2}+\frac{x+a}{x^2-4}=1$ ریشه نداشته باشد. مقادیر ممکن برای a را بیابید .

تمرین

۱) هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۲}=۵$

ب) $\frac{۱۰}{r}-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۰}{۳r}-۵$

پ) $\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$

ت) $\sqrt{t+۴}=۳$

ث) $k=\sqrt{۶k-۸}$

ج) $x+\sqrt{x}=۶$

چ) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$

ح) $\sqrt{m}+\frac{۱}{\sqrt{m}}=۲$

۲) علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۳) الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۴) معادله‌ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد.