فصل دوم

هندسه

مکان هندسی :

مکان هندسی ، مجموعه نقاطی از صفحه است که دارای ویژگی مشترکی باشند .

در این فصل با چند تا از مکانهای هندسی مانند دایره ، عمود منصف یک پاره خط ، نیمساز یک زاویه آشنا خواهیم شد.

دایره :

مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن ها از یک نقطه ثابت مانند O مقدار ثابتی مانند r $(r \neq 0)$ است

مثال ۱ :

مجموعه همه نقاطی از صفحه را مشخص کنید که فاصله آنها از نقطه ای مانند O برابر با ۲ واحد باشد .

حل :

مثال۲ :

مجموعه همه نقاطی از صفحه را مشخص کنید که فاصله آنها از نقطه ای مانند O بیشتر با ۲ واحد باشد .

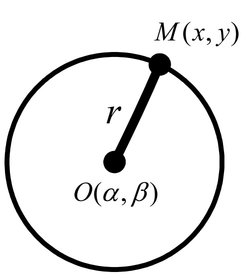
حل :

مثال۳ :

مجموعه همه نقاطی از صفحه را مشخص کنید که فاصله آنها از نقطه ای مانند O کمتر یا مساوی با ۲ واحد باشد .

معادله دایره :

فرض کنید $M(x,y)$ نقطه ای روی محیط دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ باشد . در این صورت بنابر تعریف دایره داریم :



$$r = OM = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$$

اگر دو طرف را به توان دو برسانیم :

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$$

به این معادله ، معادله دایره به مرکز $C(\alpha,\beta)$ و شعاع r می گویند . (مرکز- شعاع)

مثال۴ :

معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن نقطه $O(-۲,۵)$ و شعاع آن ۳ می باشد .

بحث کامل دایره را درریاضی ۳ پایه دوازدهم خواهید خواند .

مثال۵ :

نقاط A و B به فاصله ۶ سانتیمتر از یکدیگر قرار دارند . چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۴ سانتیمتر و از نقطه B به فاصله ۵ قرار دارند ؟

مثال۶ : مثلثی با اضلاع ۳ و ۵ و ۶ واحد رسم کنید .

توجه:

یک مثلث با اضلاع a و b و c زمانی قابل رسم کردن است که داشته باشیم :

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

مثال۷ :

مثلثی با اضلاع ۵ و ۶ و $x+۲$ واحد رسم کرده ایم . حدود x را بیابید .

چندتا اصل مهم را برای این فصل نیاز داریم که به صورت زیر می باشند:

- از هر دو نقطه متمایز فقط یک خط میگذرد .
- از هر نقطه فقط یک خط عمود بر خطی مفروض می توان رسم کرد
- از هر نقطه فقط یک خط موازی با خطی مفروض می توان رسم کرد.

میانه یک پاره خط :

خطی که از نقطه وسط یک پاره خط میگذرد

مثال۸ :

معادله (دسته) میانه پاره خطی که از نقاط $A(۲,۴)$ و $B(-۶,۶)$ می گذرد را بنویسید .

عمود منصف یک پاره خط :

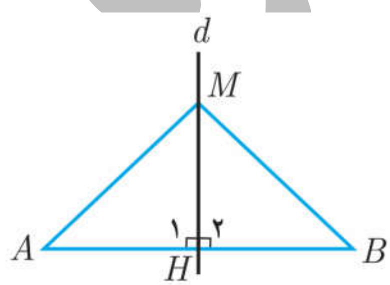
خطی است که برآن پاره خط عمود است و از نقطه وسط آن می گذرد .

خاصیت عمود منصف :

۱- اگر نقطه ای روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دو سرآن پاره خط به یک فاصله است .

اثبات :

فرض کنید خط d عمود منصف پاره خط AB بوده و M نقطه ای دلخواه روی خط d باشد . از M به A و B وصل می کنیم.. بنابراین داریم :



$$\left.\begin{array}{c} MH = MH \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow{(ض\ ز\ ض)} \Delta AMH \cong \Delta BMH$$

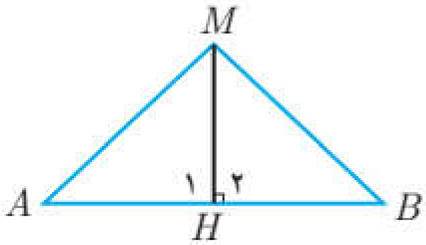
بنابراین $AM = BM$

۲- اگر نقطه ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد ، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد .

اثبات :

فرض کنید نقطه M از نقاط A و B به یک فاصله بوده و روی خط d باشد . از نقطه M عمود MH را بر پاره خط AB وارد می کنیم ، داریم :

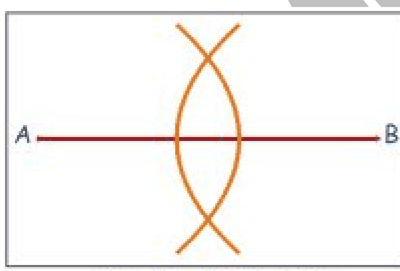
$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک ضلع قائم)}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}$$



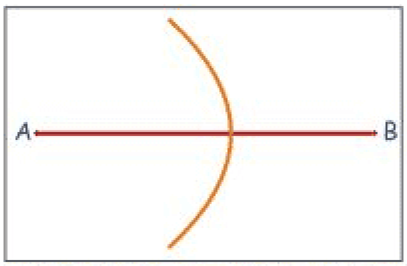
بنابراین $AH = BH$ پس MH عمودمنصف پاره‌خط AB است. در نتیجه M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

رسم عمود منصف یک پاره خط :

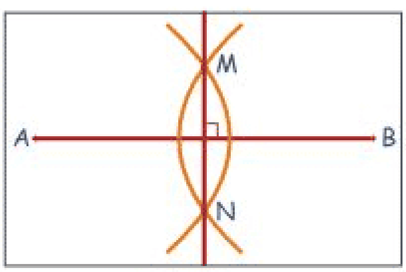
برای رسم عمود منصف پاره خط مفروض AB ، کافی است یک بار به مرکز A و شعاع بیشتر ازنصف پاره خط AB یک دایره و سپس به مرکز B و شعاع بیشتر ازنصف پاره خط AB یک دایره رسم می کنیم . محل تقاطع دو دایره را به هم وصل می کنیم .



دهانه پرگار تغییری نمی کند.
شکل (۲)



دهانه پرگار بیشتر از نصف پاره خط AB باز شود.
شکل (۱)

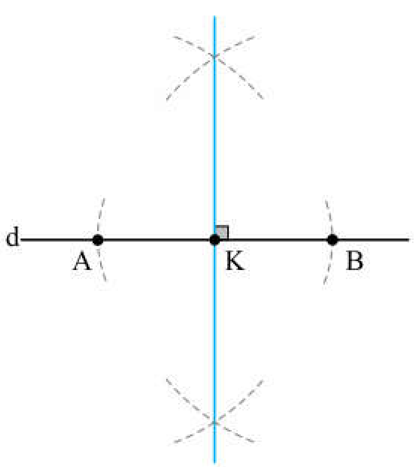


شکل (۳)

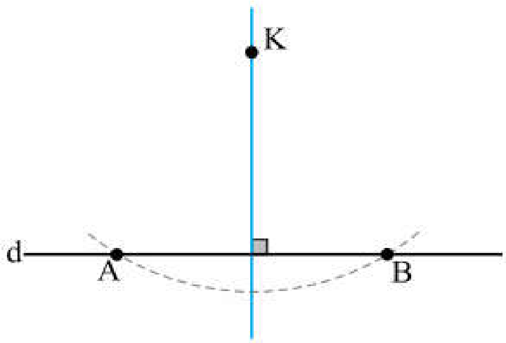
رسم خطی عمود بر یک خط در نقطه ای واقع بر روی آن یا خارج آن :

الف) نقطه ی K روی خط d است

به مرکز نقطه ی K و شعاعی دلخواه دایره ای بزنید تا خط d را در نقطه های A و B قطع کند (شکل روبرو) در این صورت K وسط پاره خط AB است. اکنون اگر عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنیم، حتما از K میگذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره خط AB است.

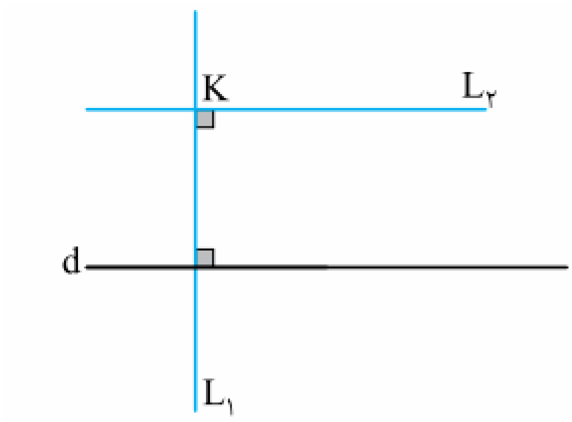


ب) نقطه ی K خارج خط d است



به مرکز نقطه ی K دایره ای رسم می کنیم که خط d را در نقطه هایی مانند A و B قطع کند. در این صورت فاصله ی K از A و B برابر است، پس K روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد. بنابراین اگر عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنیم، از نقطه ی K میگذرد. به این ترتیب، خط مورد نظر، عمودمنصف پاره خط AB است.

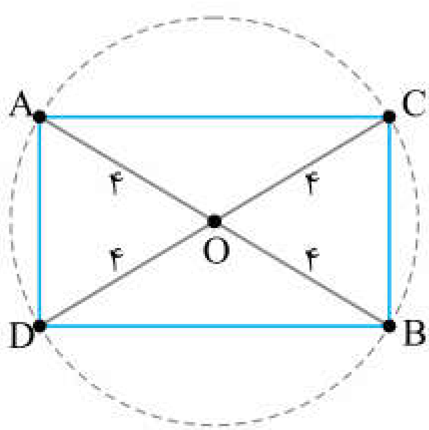
رسم خطی موازی با خط داده شده از نقطه ای خارج آن :



فرض کنید خط d داده شده و K نقطه ای خارج آن است. میخواهیم خطی رسم کنیم که از K بگذرد و با d موازی باشد. ابتدا L۱ را طوری رسم می کنیم که از K بگذرد و بر d عمود باشد. سپس خط L۲ را طوری رسم میکنیم که از K بگذرد و بر L۱ عمود باشد. در این صورت خطه ی d و L۲ بر خط L۱ عمودند، پس موازی اند.

مثال۹ :

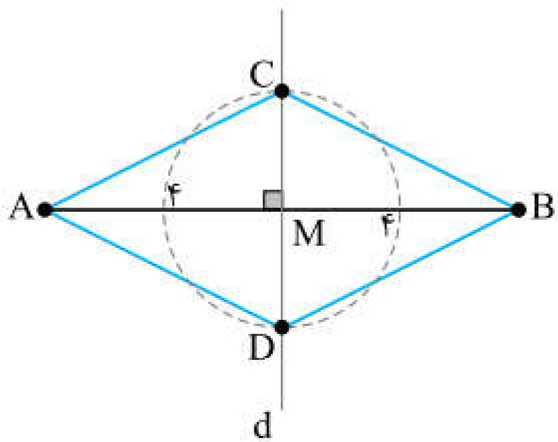
مستطیلی به طول قطر۸ رسم کنید.



میدانیم هرچهارضلعی که قطرهای آن با هم برابر و منصف یکدیگرند، مستطیل است. پس برای رسم مستطیل مورد نظر، نقطه ی دلخواه O را در صفحه در نظر می گیریم. به مرکز O و شعاع ۴ دایرهای رسم میکنیم. دو قطر دلخواه AB و CD را مطابق شکل در این دایره در نظر میگیریم. در چهارضلعی ACBD، قطرها با یکدیگر برابرند و یکدیگر را نصف میکنند، پس این چهارضلعی مستطیل مورد نظر است

مثال ۱۰ :

یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۸ باشد.



میدانیم که برای لوزی بودن چهارضلعی کافی است قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. پس به صورت زیر لوزی را رسم می کنیم.

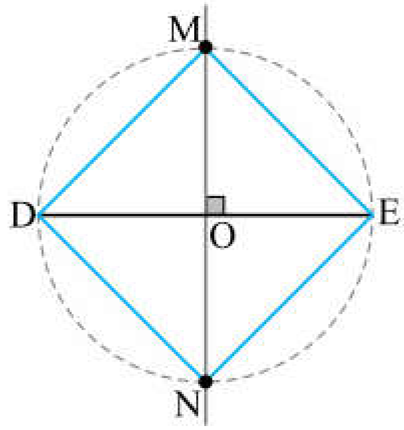
ابتدا پاره خط AB را به طول ۸ رسم میکنیم (شکل روبرو)

سپس عمودمنصف AB را رسم می کنیم (خط d در شکل.)

اکنون به مرکز M، وسط AB، دایره ای به شعاع ۲ می کنیم تا خط d را در نقطه های C و D قطع کند ACBD لوزی مورد نظر است

مثال ۱۱ :

مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد



می دانیم در مربع قطرها عمودمنصف یکدیگر هستند و دارای طول برابرند. پس ابتدا عمودمنصف پاره خط معلوم DE را رسم می کنیم.

سپس به مرکز نقطه ی O، وسط پاره خط DE و شعاع OE دایره ای رسم می کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف DE را M و N می نامیم. چهارضلعی MEND مربع موردنظر است

تمرین۱ :

طول ضلع یک لوزی ۴ و طول یکی از قطرهای آن ۶ است. این لوزی را رسم کنید

تمرین۲ :

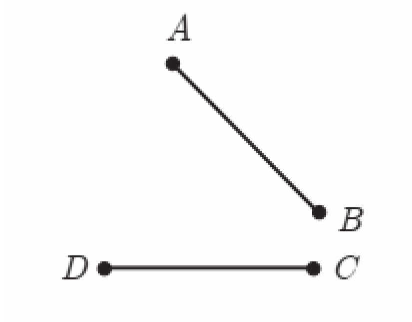
نقاط A و B به فاصله $6cm$ از هم در یک صفحه قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطه A به فاصله $4cm$ و از نقطه B به فاصله $5cm$ باشند ؟

تمرین۳ :

خط d و نقطه A روی آن در نظر بگیرد. نقاطی از صفحه راپیدا کنید که ازنقطه A به فاصله ۴ و از خط d به فاصله ۲ باشد

تمرین ۴ :

دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد



نیمساز :

نیمساز هر زاویه ، نیم خطی است که آن زاویه را به دو زاویه مساوی تقسیم می کند.

نقاط روی هر نیمساز هز زاویه داری ویژگی مشترکی هستند .

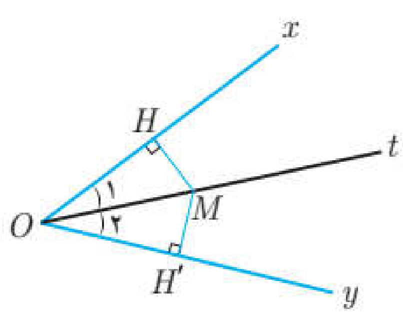
۱– هر نقطه روی روی نیمساز هر زاویه ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است .

اثبات :

فرض کنید Ot نیمساز زاویه xoy باشد . نقطه ای دلخواه مانند M روی Ot انتخاب می کنیم .

از نقطه M دو عمود MH و MH' را بر اضلاع Ox و Oy وارد می کنیم .

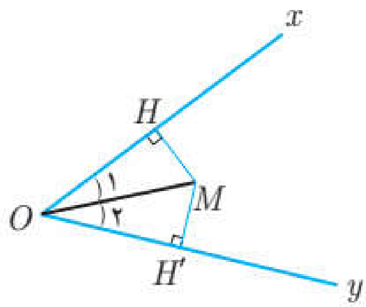
بنابراین داریم :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OM=OM\\ \hat{H}=\hat{H}'=90^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(وتر و یک زاویه ی تند)}}\overset{\Delta}{OMH}\cong\overset{\Delta}{OMH'}$$

در نتیجه $MH=MH'$.

۲– هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد . روی نیمساز آن زاویه قرار دارد .



اثبات :

فرض کنید نقطه M از دو ضلع زاویه xoy به یک فاصله باشد .

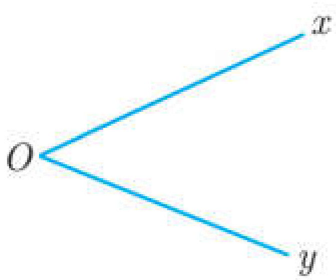
یعنی طول عمودهای MH و MH' باهم برابر باشند . از M به نقطه O وصل می کنیم .

$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ MH = MH' \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وتر و یک ضلع قائم)}} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMH'}$$

بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$. پس OM نیمساز زاویه xoy است .

رسم نیمساز یک زاویه :

برای رسم نمیساز زاویه xoy به شیوه زیر عمل می کنیم .



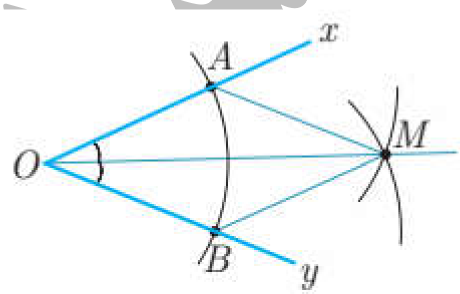
می دانیم که نیمساز نیم خطی است که از نقطه ی O می گذرد .

پس کافی است یک نقطه دیگر از نیمساز را پیدا کنیم .

به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی می زنیم تا ضلع های زاویه را در نقاط A و B قطع کند .

به مرکز نقاط و به شعاع بیشتر از نصف پاره خط AB کمانهایی می زنیم تا همدیگر را در نقطه M قطع کنند .

بنابراین OM نیمساز زاویه xoy است .

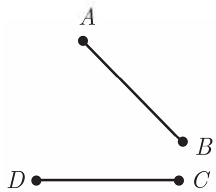


تمرین :

زاویه xOy و خط d موازی ضلع Oy در صفحه در نظر بگیرید .

چند نقطه روی خط d وجود دارند که از Ox و Oy به فاصله مساوی باشند؟

تمرین



۱ الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطهٔ موردنظر در قسمت (الف) را O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمود منصفِ پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویهٔ این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. از نقطهٔ O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۴ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعدهٔ آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $8cm^2$ باشد.

درس ۲

نسبت و تناسب :

نسبت : فرض کنید a و b دو عدد حقیقی و $b \neq 0$ باشد . نسبت a به b را به شکل کسر $\frac{a}{b}$ نمایش می دهند .

مثال۱۲ :

نسبت ۳ به ۷ را به شکل $\frac{3}{7}$ نمایش می دهیم .

تناسب :

فرض کنید $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو نسبت باشند . تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را یک نسبت و تناسب گویند .

دو نسبت $\frac{3}{4}$ و $\frac{15}{20}$ مساویند . پس $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ یک نسبت و تناسب است .

توجه :

اگر به عنوان مثال $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ باشد . می توان $a=2k$ و $b=3k$ که $k \neq 0$ در نظر گرفت .

و به طور کلی اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد آن گاه عدد حقیقی $k \neq 0$ وجود دارد که $a=kc$ و $b=kd$.

خواص نسبت و تناسب :

۱– اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد آن گاه $ad=bc$ و برعکس.

اثبات :

اگر دو طرف تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در bd ضرب کنیم . داریم $bd\left(\frac{a}{b}\right)=bd\left(\frac{c}{d}\right)$ بنابراین $ad=bc$.

در تساوی $ad=bc$ دو طرف را بر bd تقسیم کنیم نتیجه می شود : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

خاصیت ۱ را طرفین و سطین گویند .

توجه :

در نسبت و تناسب فوق اگر داشته باشیم $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. آن گاه b را میانگین (واسطه هندسی) بین a و c گویند .

مثال۱۳ :

میانگین هندسی بین دو عدد $3\sqrt{12}$ و $27\sqrt{3}$ را بیابید .

۲- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد آن گاه $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ یا $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$

۳- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد آن گاه $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

۴- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد آن گاه $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ترکیب در صورت) و $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ (ترکیب در مخرج)

اثبات :

۵- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد آن گاه $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (تفضیل در صورت) و $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ (تفضیل در مخرج)

اثبات :

۶-اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد آن گاه $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

اثبات :

۷ - اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ باشد آن گاه $\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$

اثبات :

نتیجه کلی مطلب فوق به صورت زیر می باشد :

$$k=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n} \quad \Rightarrow \quad k=\frac{r_1a_1+r_2a_2+\dots+r_na_n}{r_1b_1+r_2b_2+\dots+r_nb_n}$$

۸- $\frac{x}{y}=\frac{z}{p} \Rightarrow \frac{x+y}{x-y}=\frac{z+p}{z-p}$

مثال۱۴ :

اگر $\frac{۳}{۵}=\frac{z}{۶}=\frac{y}{۳}=\frac{x}{۲}$ باشد . حاصل $x+y+z$ رابه دست آورید .

مثال۱۵ :

اگر $\frac{۵}{۲}=\frac{x+۳y}{y+۱}=\frac{x+۳}{۴-x}$ باشد مقدار x و y را بیابید .

مثال۱۶ :

اگر $\frac{۳}{۴}=\frac{x-y}{۲x+y}$ باشد . نسبت $\frac{x}{y}$ را حساب کنید .

مثال۱۷ :

روی پاره خط $AB=۱۲$ دو نقطه M و N را چنان انتخاب کرده ایم که $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{AN}=۲$. طول پاره خط MN را حساب کنید .

از تناست ها در هندسه استفاده های زیادی می شود .

قبل از پرداختن به قضیه تالس به بررسی استدلال ها در ریاضی می پردازیم

استدلال استقرایی:

روش نتیجه گیری براساس حواس پنجگانه و تجربه و تعداد محدودی آزمایش را « استدلال استقرایی » گویند .

در استدلال استقرایی از یک مطلب جزئی ، یک مطلب کلی نتیجه گیری می کنند که ممکن است نتیجه آن درست یا نادرست باشد.

در این استدلال نمی توان نتیجه قطعی گرفت.

استدلال استنتاجی :

روش نتیجه گیری براساس احکامی که قبلاً اثبات کرده یا درستی آن ها را پذیرفته ایم .

این استدلال از یک حکم کلی ، یک مطلب جزئی را نتیجه گیری می کنند .

نتایج این استدلال قطعی است .

به عنوان مثال نتایج زیر از استدلال استنتاجی به دست می آیند :

- مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابربا ۱۸۰ درجه است .
- هر دوزاویه متقابل به رأس ، مساویند.

مثال۱۸ :

به کمک استدلال استناجی ثابت کنید « هر دو زاویه متقابل به رأس ، مساویند »

مثال۱۹ :

به کمک استدلال استنتاجی ، ثابت کنید مجموع هر دوعدد فرد ، عدد زوجی است.

مثال۲۰ :

به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید « مربع هر عددطبیعی فرد ، عددی فرد است ».

قضیه :

به نتایج همیشه درست که از استدلال استنتاجی به دست می آیند . قضیه می گویند.

هر قضیه شامل دو بخش است :

۱- فرض قضیه : شامل اطلاعات داده شده یا به عبارتی مطالبی که درستی آن ها را قبول داریم

۲- حکم : آنچه بایداز فرض نتیجه گیری یا اثبات شود

مثال۲۱ :

در قضیه های زیر فرض و حکم را مشخص کنید .

۱-مجموع زاویه داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

فرض :

حکم :

۲-در هر متوازی الاضلاع ، قطرها همدیگر را نصف می کنند .

فرض :

حکم :

۳-در هر لوزی ، قطرها عمود منصف یکدیگرند .

فرض :

حکم :

عکس قضیه :

اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را باهم عوض کنیم . عکس آن به دست می آید .

عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد .

مثال۲۲ :

عکس قضیه های زیر را بنویسید .

۱-در هرمثلث قائم الزاویه مربع وتر برابر با مجموع مربع های دوضلع دیگر است.

۲- هر دو زاویه متقابل به رأس ، مساویند .

۳-هر لوزی ، یک مربع است .

۴- هر نقطه روی نیمساز یک زاویه ، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است .

قضیه دو شرطی :

اگر عکس درست باشد ، آن را می توان به صورت یک قضیه بیان کرد . چنین قضیه ای را « قضیه دو شرطی » می نامیم.

قالب کلی یک قضیه دو شرطی به یکی از شکل های زیر می باشد :

- اگر $\boxed{\text{فرض}}$ آن گاه $\boxed{\text{فرض}}$ و برعکس .

- $\boxed{\text{فرض}}$ اگر و فقط اگر $\boxed{\text{حکم}}$.

مثال۲۳ :

کدام قضیه را می توان به صورت دو شرطی بیان کرد؟

۱-در هر مثلث متساوی الساقین ، زاویه های مجاور قاعده باهم برابرند

۲-هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط ، از دوسرپاره خط به یک فاصله است .

۳- اگر دو مثلث همنهشت باشند . مساحت هایشان برابر است .

مثال نقض:

به مثالی که کلیت حکمی یا ادعایی را رد می کند مثال نقض گویند.

مثال۲۴ :

برای رد هر یک از احکام زیر مثال نقض بیاورید.

الف) مجموع هر دوعدد گنگ عددی گنگ است.

ب) همه اعداد اول ، فرد هستند.

ج) مربع هر عدد حقیقی از آن عدد بزرگتر است .

د)ارتفاع هر مثلث ، درون آن قرار دارد .

هـ) مربع هر عدد گنگ ، عددی گویاست .

و) برای هر عدد طبیعی n ، حاصل $3^n + 2$ عددی اول است .

برهان خلف (برهان غیر مستقیم) :

نوعی استدلال است که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد. در روش برهان خلف به صورت زیر عمل می کنیم

گام اول : فرض می کنیم حکم خواسته شده نادرست باشد.

گام دوم : نشان می دهیم که نادرستی حکم با حقایق دانسته شده یا با فرض اولیه تناقض دارد.

گام سوم با نادرست بودن گام اول ، نتیجه می گیریم که حکم درست است .

مثال۲۵ :

با برهان خلف ، ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، اگر n زوج باشد آن گاه $n^{۲}$ نیز زوج است .

مثال۲۶ :

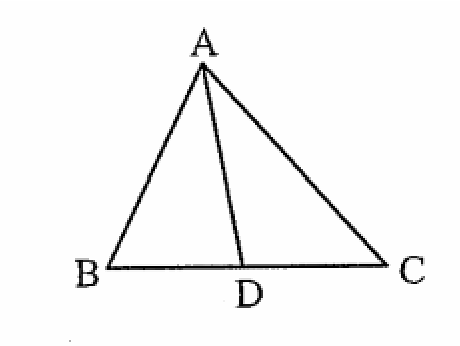
می دانیم $\sqrt{۲}$ گنگ است . با برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{۲}+۳$ گنگ است .

مثال۲۷ :

با برهان خلف ثابت کنید ، اگر $x \neq ۱$ و $\frac{y^{۳}}{۲x}=۴$ باشد . آن گاه $y \neq ۲$ است .

مثال۲۸ :

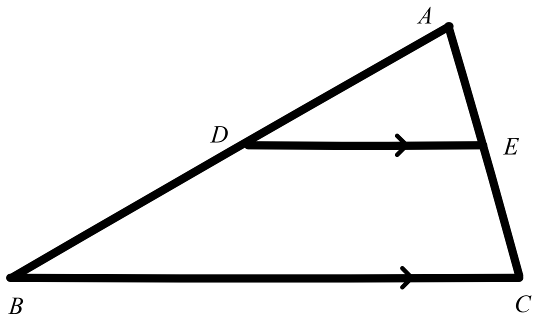
فرض کنید AD نیمساز زاویه A از مثلث ABC باشد . اگر $BD \neq CD$ باشد. آن گاه $AB \neq AC$ (برهان خلف)



قضیه تالس :

در مثلث ABC اگر پاره خط DE موازی BC دو ضلع دیگر را قطع کند . نسبت پاره خط های ایجاد شده روی دو ضلع باهم برابر است .

یعنی اگر $DE \parallel BC$ باشد داریم $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$



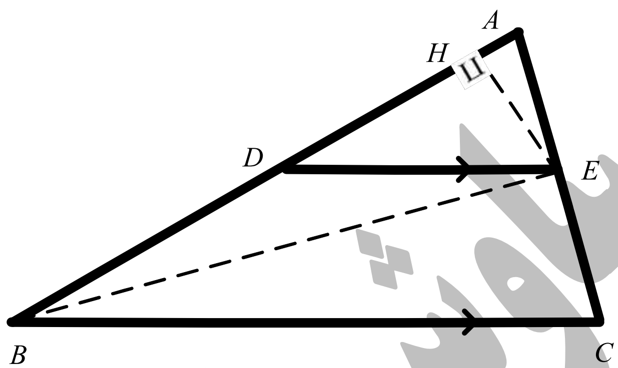
اثبات :

مرحله اول :

از B به E وصل می کنیم.

اگر EH ارتفاع وارد بر ضلع AB باشدداریم :

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{۱}{۲}AD.EH}{\frac{۱}{۲}DB.EH} = \frac{AD}{DB}$$

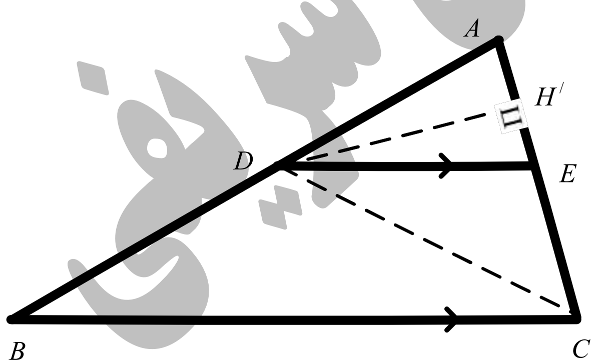


مرحله دوم :

از C به D وصل می کنیم.

اگر DH' ارتفاع وارد بر ضلع AC باشدداریم :

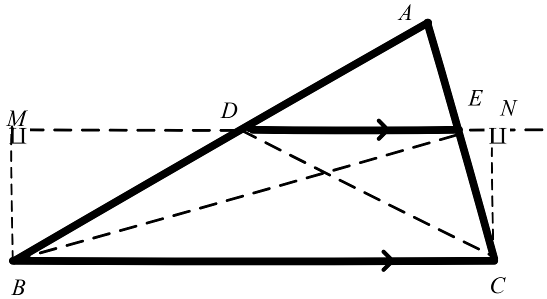
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{۱}{۲}AE.DH'}{\frac{۱}{۲}EC.DH'} = \frac{AE}{EC}$$



مرحله سوم :

اکنون ثابت می کنیم $S_{DEB} = S_{DEC}$

$$\begin{cases} S_{BED} = \frac{۱}{۲}DE.BM \\ S_{DEC} = \frac{۱}{۲}DE.CN \end{cases} \xrightarrow{BM=CN}$$



پس :

$$S_{DEB} = S_{DEC}$$

از مرحله اول و دوم و سوم داریم : $\boxed{\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}}$

نتایج زیر از قضیه تالس به دست می آیند :

۱- با توجه به خاصیت نسبت و تناسب داریم :

$$\frac{BD}{AD}=\frac{CE}{AE}$$

۲- اگر در تساوی $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ترکیب مجموع را در مخرج یا در صورت انجام دهیم داریم :

$$\frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC}\Rightarrow \boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}}$$

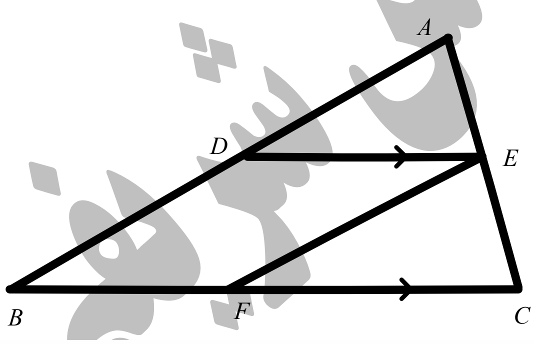
$$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}\Rightarrow \boxed{\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}}$$

۳- همچنین اگر از نقطه E پاره خطی موازی با ضلع AB رسم کنیم که ضلع BC را در نقطه F قطع کند داریم :
چهار ضلعی $DEFB$ متوازی الا ضلاع می باشد .پس :

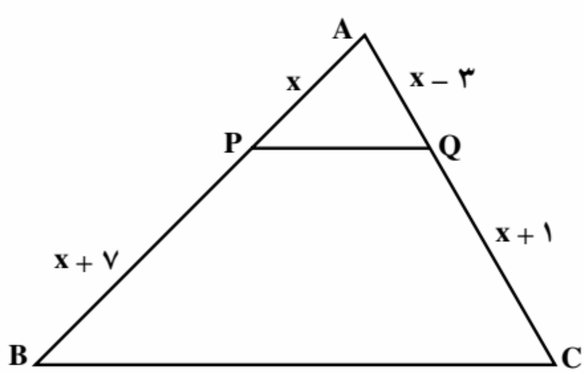
$$DE = BF$$

از طرفی چون $EF \parallel AB$ است بنابر قضیه تالس داریم :

$$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}\xrightarrow{BF=DE}\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$$

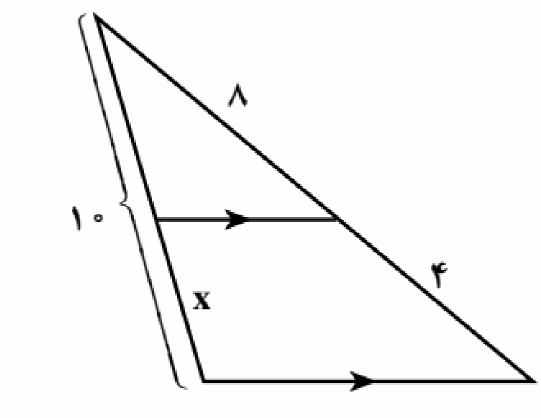


مثال۲۹ : در شکل $PQ \parallel BC$ است . مقدار x را حساب کنید .



مثال ۳۰ :

باتوجه به شکل مقدار x را بیابید .

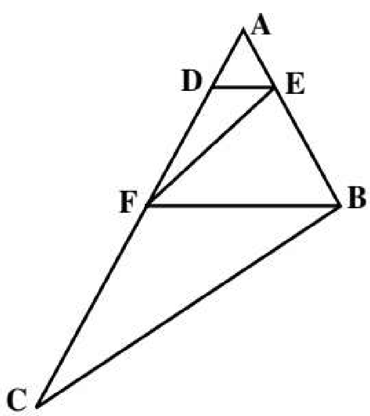


مثال ۳۱ :

در مثلث ABC، در شکل روبه‌رو، DE با FB موازی است و EF با BC. با استفاده از قضیه‌ی تالس ثابت کنید

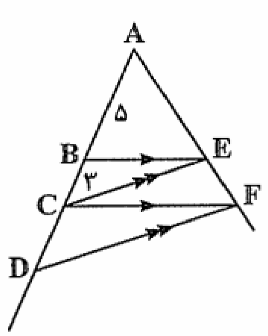
الف) $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$

ب) $AF^۲ = AD \times AC$



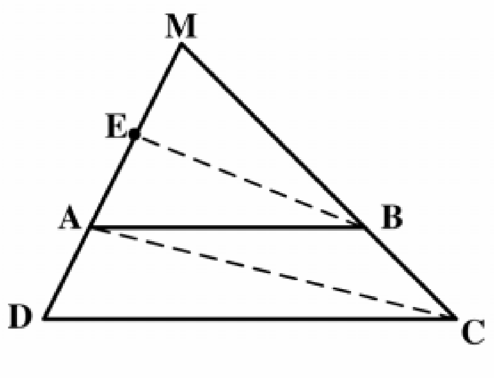
مثال ۳۲ :

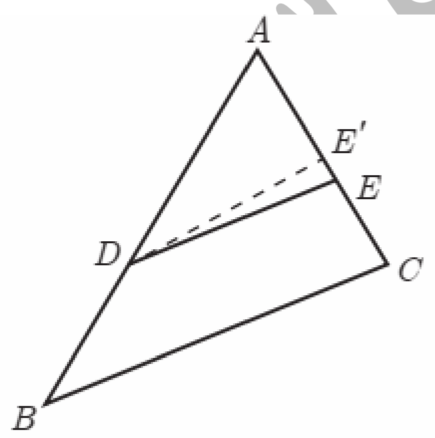
در شکل روبه‌رو $BE||CF$ و $DF||CE$ است. اگر $AB=۵$ و $BC=۳$، آن‌گاه اندازهٔ CD کدام است؟



مثال۳۳ :

در ذوزنقه $ABCD$، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصله MD کدام است؟





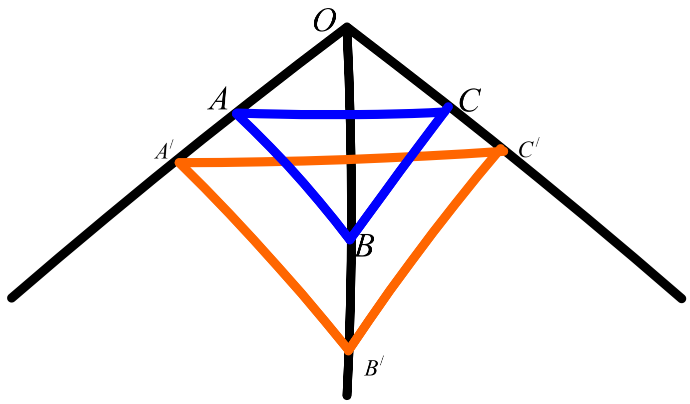
عکس قضیه تالس :

اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ آن گاه $DE \parallel BC$ است .

اثبات :

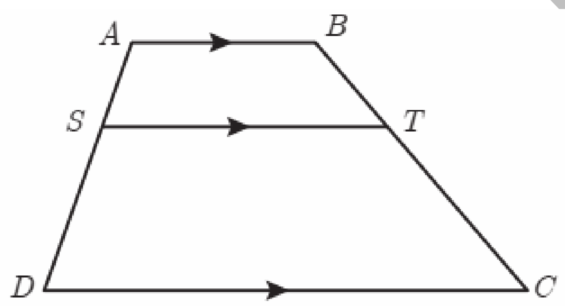
مثال۳۴ :

در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید : $AC \parallel A'C'$



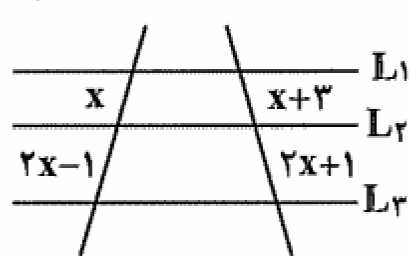
قضیه تالس در ذوزنقه :

در ذوزنقه مقابل $AB \| ST \| DC$ است. ثابت کنید : $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$



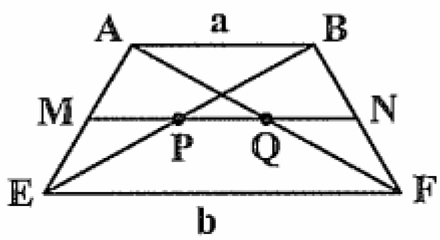
مثال ۳۵ :

در شکل مقابل اگر ۳ خط $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ با هم موازی باشند، آن‌گاه مقدار x کدام است؟



توجه :

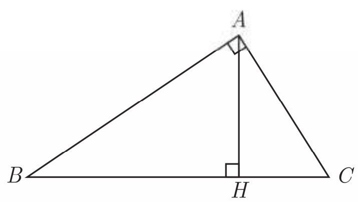
اگر P و Q وسط قطرهای ذوزنقه را به هم وصل کنیم و ادامه دهیم تا ساق‌های ذوزنقه را در M و N قطع کنند، در این صورت MN با دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی بوده و داریم:



$$MN=\frac{a+b}{2} \qquad PQ=\frac{b-a}{2} \qquad PM=QN$$

تمرین

۱) در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به‌دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به‌دست‌آورید.



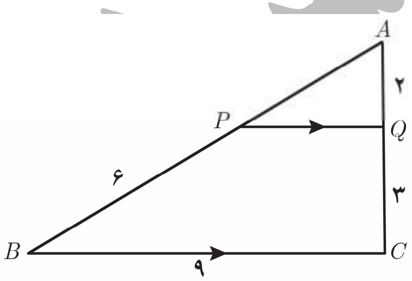
۲) در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

ب) $\frac{3a+10}{10+2a}=\frac{3b+7}{7+2b}$

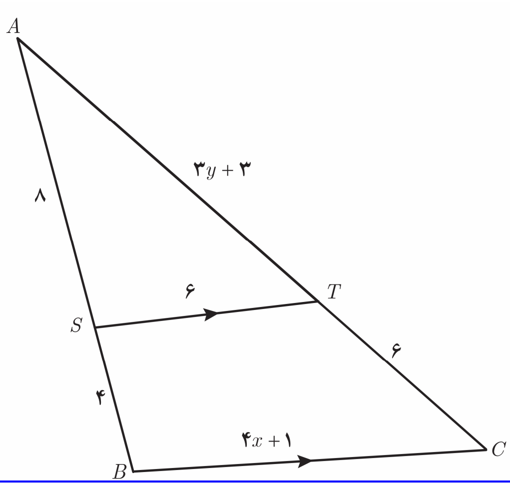
الف) $\frac{a}{10+a}=\frac{b}{8+b}$

۳) ثابت کنید در هر مثلث، پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۴) در شکل مقابل $PQ \| BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.



۵) در شکل مقابل $ST \| BC$ است. مقادیر x و y را به‌دست آورید.



درس۳ :

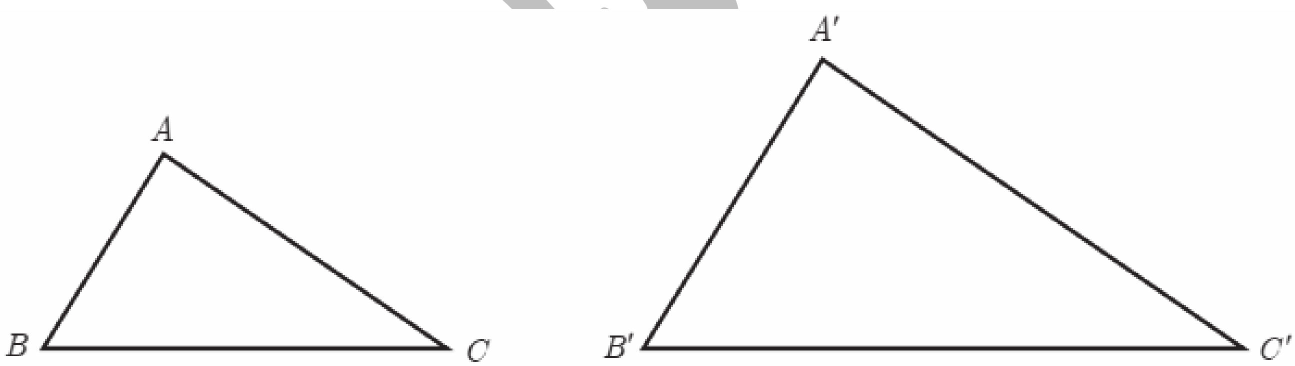
مثلث های متشابه :

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد

یعنی :

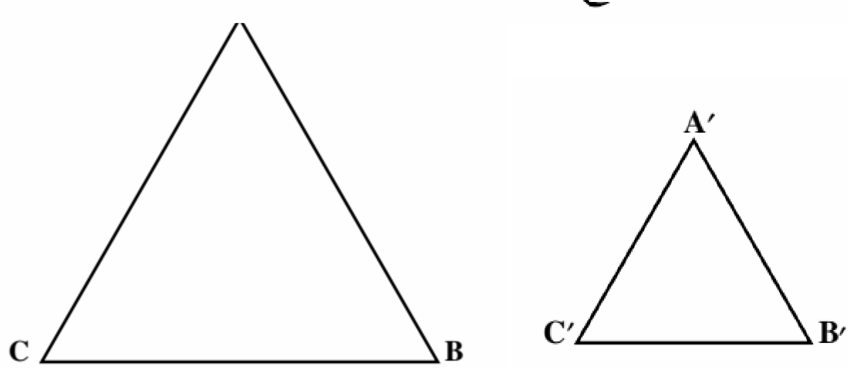
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A'} \quad \text{و} \quad \hat{B}=\hat{B'} \quad \text{و} \quad \hat{C}=\hat{C'} \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

که نسبت $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$ را با حرف K نمایش داده و به آن نسبت تشابه گویند .



مثال۳۶ :

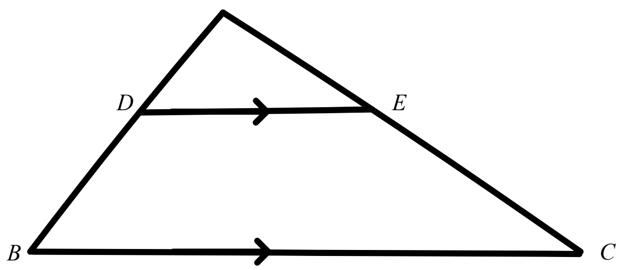
در شکل دو مثلث ABC و A′B′C′ متساوی‌الاضلاع **اند** نشان دهید دو مثلث متشابه‌اند



قضیه اساسی تشابه مثلث ها :

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث ؛ دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی به جود می آید ف با مثلث بزرگ اولیه متشابه است .

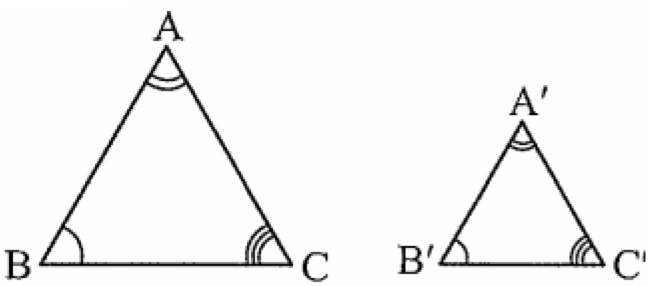
اثبات :



توجه :

برای نوشتن نسبت تشابه (k) به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا زاویه‌های یکی از دو مثلث را نوشته و زیر هر کدام از زاویه‌های نوشته‌شده، زاویهٔ مساوی‌اش از مثلث دیگر را می‌نویسیم و سپس با توجـه بـه فلش‌هـایی که در زیر نحوهٔ رسم آن‌ها را نشان داده‌ایم، اضلاع را زیر هم می‌نویسیم:



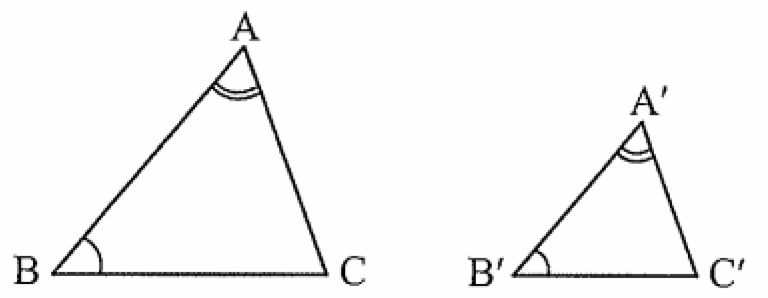
$$\begin{cases}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\\ \widehat{C}=\widehat{C'}\end{cases}\xRightarrow[\text{زوایای برابر}]{\text{زیر هم نوشتن}}\begin{matrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{AB}{A'B'}}}_{\text{فلش اول}}=\underbrace{\boxed{\frac{BC}{B'C'}}}_{\text{فلش دوم}}=\underbrace{\boxed{\frac{AC}{A'C'}}}_{\text{فلش بزرگتره}}$$

حالت‌های تشابه دو مثلث

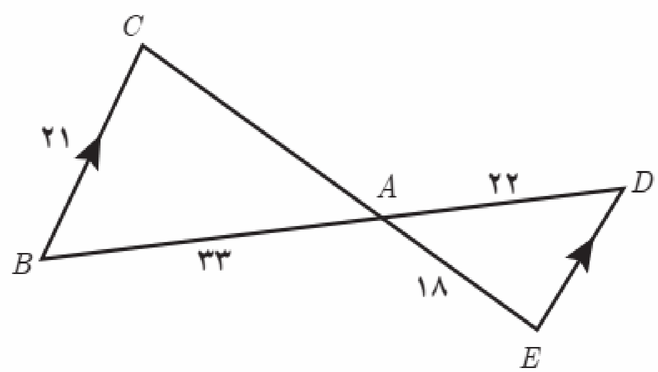
۱ــ تشابه دو مثلث در حالت تساوی دو زاویه

اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند ، آن دو مثلث متشابه اند .



$$\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

مثال۳۷ :



درشکل مقابل $BC \parallel DE$

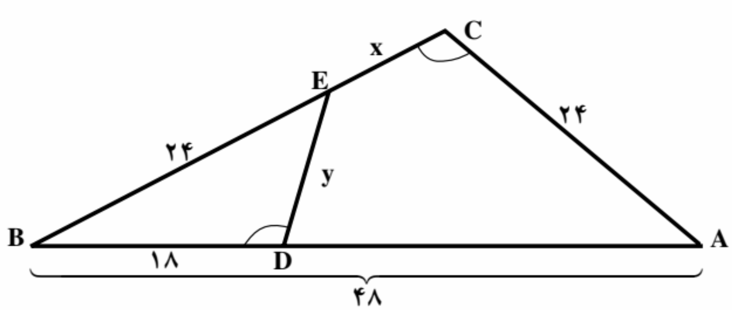
الف) ثابت کنید مثلث‌های ABC و ADE متشابه‌اند.

ب) اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید.

مثال۳۸ :

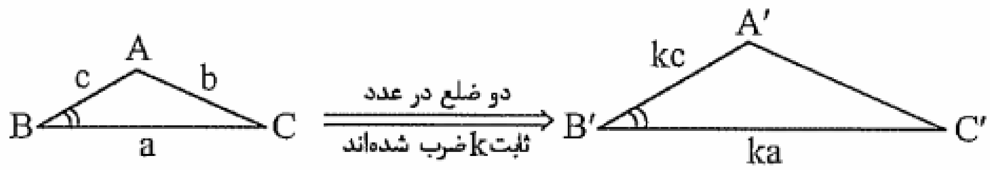
در شکل زیر، الف) چرا دو مثلث ABC و BDE متشابه‌اند؟

ب) طول x و y را پیدا کنید.



۲ــ تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین آنها:

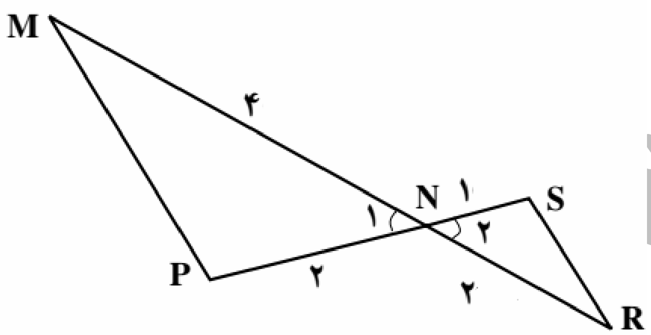
هرگاه اندازه های دوضلع از یک مثلث با اندازه های دوضلع از مثلث دیگر متناسب باشد و زاویه بین آن ها برابر باشد . آن دو مثلث متشابه اند .



$$\hat{B}=\hat{B}' \ , \ \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=k \ \Rightarrow \ \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

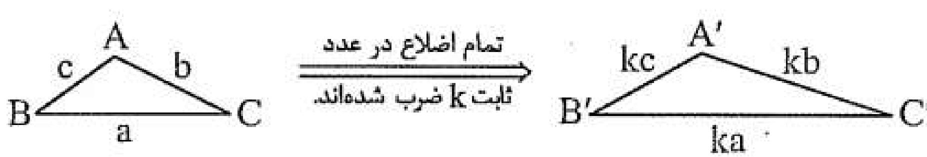
مثال ۳۹ :

نشان دهید، دو مثلث NSR و NPM متشابه‌اند.



۳ــ تشابه دو مثلث در حالت متناسب بودن سه ضلع:

هرگاه سه ضلع از مثلثی، با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابه‌اند

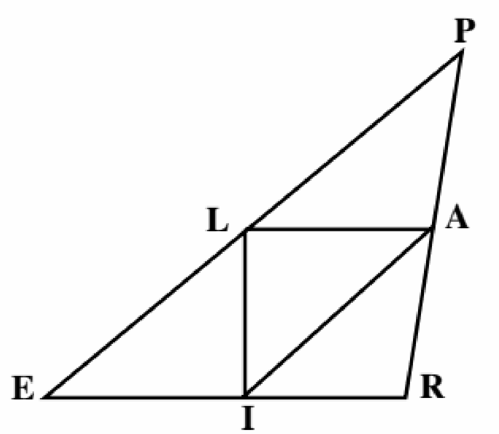


$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k \Rightarrow \ \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

مثال ۴۰ :

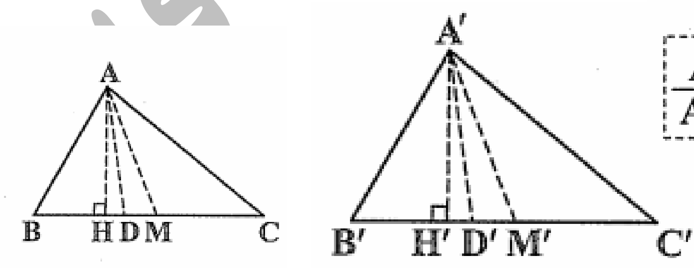
در شکل زیر، نقاط A، L و I به ترتیب نقاط وسط ضلع‌های PR، PE و ER هستند.

چرا دو مثلث ALI و PRE متشابه‌اند؟ دلیل خود را توضیح دهید.



پاره‌خط‌های متناسب ومحیط و مساحت در دو مثلث متشابه

اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ دو مثلث متشابه باشند، آن‌گاه نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها و نیمسازهای متناظر دو مثلث برابر با نسبت تشابه است



اضلاع مثلث — ارتفاع‌ها — نیمسازها — میانه‌ها

$$\boxed{\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{AM}{A'M'}=k$$

همچنین داریم :

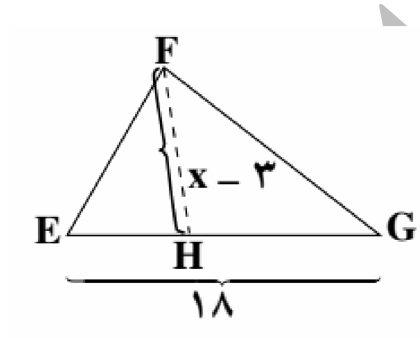
$$\frac{\text{مساحت مثلث } A'B'C'}{\text{مساحت مثلث } ABC}=k^2$$

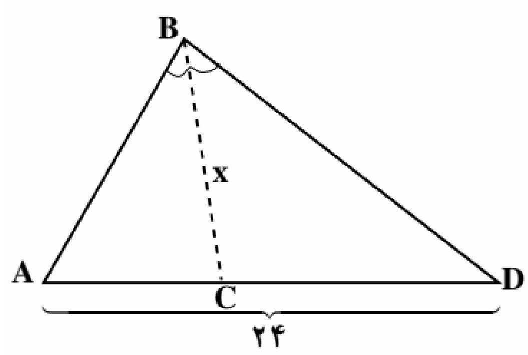
و

$$\frac{\text{محیط مثلث } A'B'C'}{\text{محیط مثلث } ABC}=k$$

مثال ۴۱ :

در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند و BC نیمساز زاویه‌ی B و FH نیمساز زاویه‌ی نظیر B یعنی F است. با استفاده از مقادیر داده شده، x را حساب کنید.





مثال ۴۲ :

نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، ۱۶ است. نسبت محیط‌های آن‌ها را به‌دست آورید.

مثال ۴۳ :

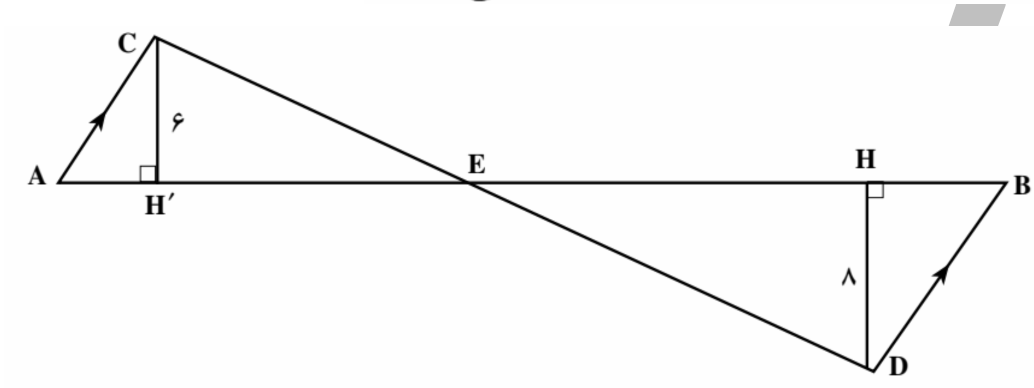
نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۲۱ سانتی‌متر باشد، ضلع متناظر با این ضلع در مثلث بزرگ‌تر چند سانتی‌متر است؟

مثال ۴۴ :

مثلث‌های ABC و A′B′C′ متشابه‌اند. اگر طول ضلع‌های مثلث ABC، ۵، ۸ و ۱۱ سانتی‌متر و محیط مثلث A′B′C′ برابر ۶۰ سانتی‌متر باشد، طول ضلع‌های مثلث A′B′C′ را به‌دست آورید.

مثال۴۵ :

با توجه به اندازه‌های روی شکل و $AB = ۳۵$ ، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

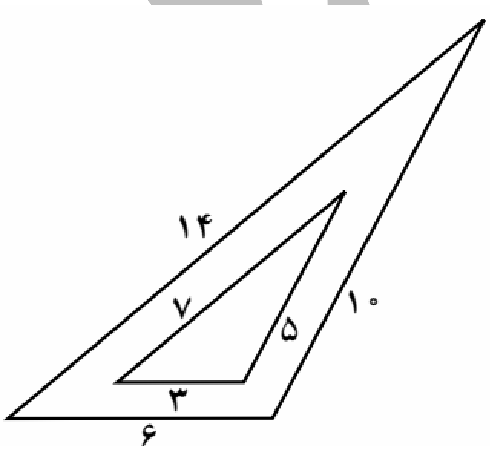


الف) نسبت مساحت‌های مثلث‌های ACE و BDE را بیابید.

ب) مساحت مثلث BDE را به‌دست آورید.

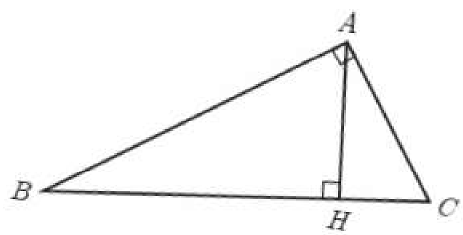
مثال۴۶:

در شکل زیر نسبت مساحت‌ها را بیابید.



روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.



$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

رابطه فیثاغورث

الف) طول اضلاع قائمه را می‌توان از فرمول‌های زیر به‌دست آورد:

$$\boxed{AB^2 = \underbrace{BH}_{\text{تصویر ضلع AB روی وتر}} \times \overbrace{BC}^{\text{وتر}}}$$

$$\boxed{AC^2 = \underbrace{CH}_{\text{تصویر ضلع AC روی وتر}} \times \overbrace{BC}^{\text{وتر}}}$$

ب) ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو قسمت HC و BH تقسیم می‌کند و فرمول زیر بین آن‌ها برقرار است:

$$\boxed{AH^2 = BH \times HC}$$

ج) برای محاسبهٔ ارتفاع وارد بر وتر، می‌توان مساحت مثلث را از دو روش زیر محاسبه نمود و با برابر هم قرار دادن آن‌ها به رابطهٔ زیر رسید:

$$\begin{cases} S = \dfrac{AH \times BC}{2} \\ S = \dfrac{AB \times AC}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \Rightarrow \boxed{AH \times BC = AB \times AC}$$

اثبات :

$$AHC \sim ABC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \times BC$$

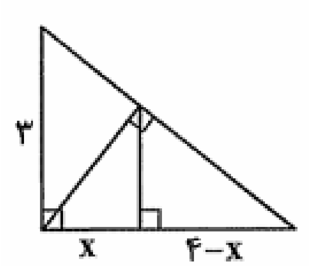
$$ABH \sim ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC$$

$$ABH \sim AHC \Rightarrow \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH^2 = BH \times HC$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

مثال۴۷ :

در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازهٔ x کدام است؟

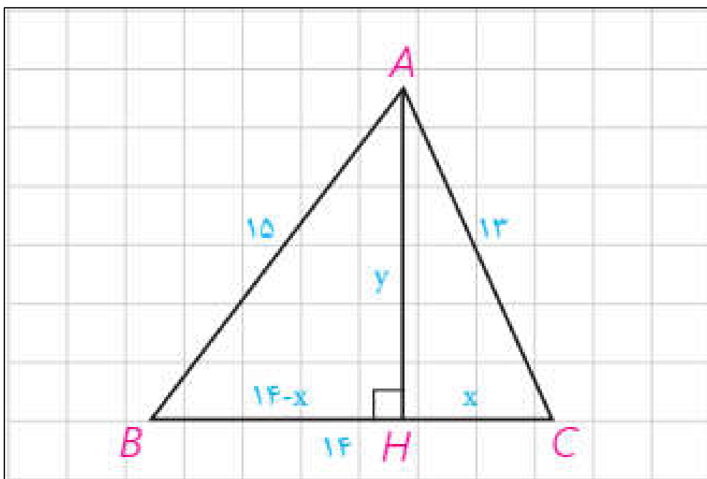


مثال۴۸ :

در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است.

الف) مقادیر x و y را به دست آورید

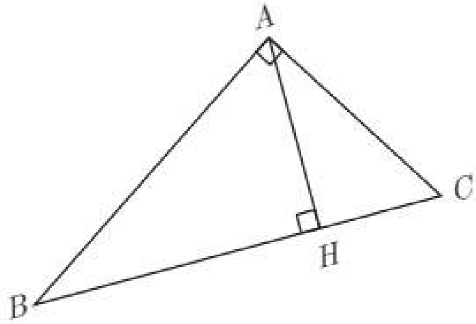
ب) مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.



مثال۴۹ :

درمثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل ،مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

$AB = ۱۲$ و $AH = ۶$ و $BH = ?$ و $BC = ?$ و $AC = ?$



مثال ۵۰ :

در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه‌های قاعدهٔ بزرگ‌تر و قطر آن بــه ترتیــب ۱۰ و ۸ باشــند، انــدازهٔ قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟

دوچند ضلعی متشابه :

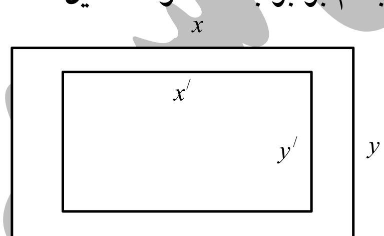
دوچند ضلعی باهم متشابه هستند هرگاه زاویه های نظیر به هم ، باهم برابر باشند و اضلاع متناظر باهم متناسب باشند .

توجه :

دو n ضلعی منتظم ، همیشه باهم متشابه هستند.

(چند ضلعی منتظم : یک چند ضلعی که همه زاویه های آن باهم برابر و همه ضلع های آن نیز باهم برابر باشند .)

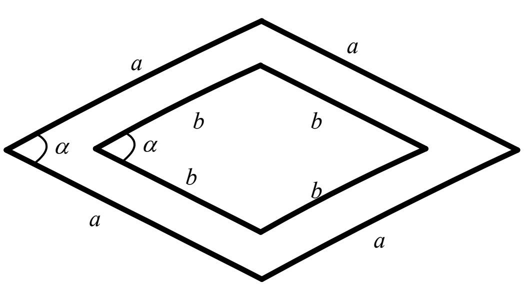
دو مستطیل همواره دارای زاویه های برابر هستند . اگر نسبت طول به عرض آنها باهم برابر باشد ، دومستطیل متشابه هستند.



$\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'} \Rightarrow$ دو مستطیل متشابه اند .

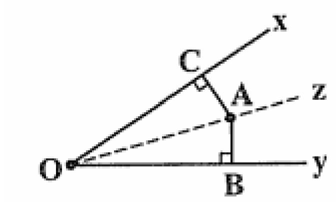
دو مربع همواره متشابه هستند .

اضلاع دو لوزی همواره متناسب هستند .اگر یک زاویه برابر داشته باشند دو لوزی متشابه اند .



تمرین :

۱- اگر Oz نیمساز زاویهٔ $\widehat{O} = 60^\circ$ باشد و $OB = \sqrt{3}$، آن‌گاه محیط مثلث OAC چه‌قدر است؟



۲- فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

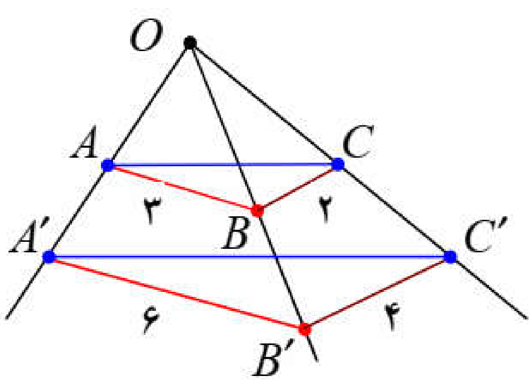
الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعدهٔ آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $8cm^2$ باشد.

۳- ثابت کنید در هر مثلث، پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۴- در شکل زیر $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ می باشد اگر $AC = 4$ باشد طول $A'C'$ را حساب کنید.



۵- هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولِ بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

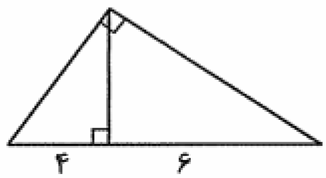
ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

ث) هر مستطیلی یک مربع است.

ج) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ‌تر است.

چ) اگر $ab = 0$، آنگاه $a = 0$ و $b = 0$.

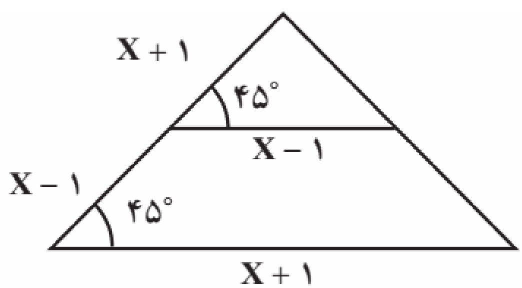
۶- در بزرگ‌ترین مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل، اندازهٔ بزرگ‌ترین میانه کدام است؟



۷- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازه‌های قاعدهٔ بزرگ‌تر و قطر آن بـه ترتیـب ۱۰ و ۸ باشـند، انـدازهٔ قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟

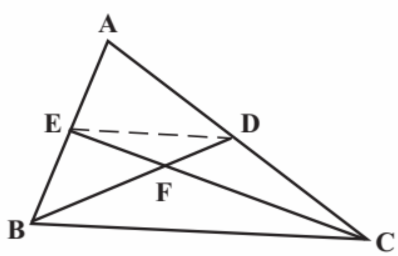
۸-- در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱ و ۳ و مساحت آن ۶۰ واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چه‌قدر است؟

۹- در شکل مقابل مقدار x را بیابید.



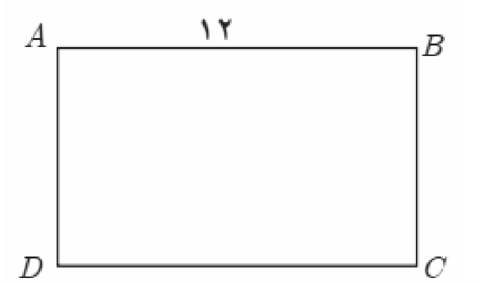
۱۰- مثلثی به طول اضلاع ۳ و ۵ و ۷ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و y و x متشابه است. اگر $x > y > 5$ باشند حاصل $x + y$ را بیابید.

۱۱- در شکل روبه‌رو BD و CE دو میانهٔ مثلث هستند. نسبت مساحت مثلث FBC به FED را بیابید.

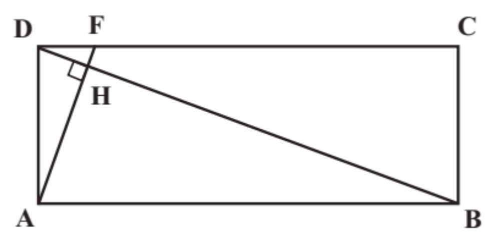


۱۲- در دو مثلث متشابه نسبت بین دو ارتفاع متناظر برابر $\frac{1}{4}$ است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۵ باشد مساحت مثلث بزرگ‌تر چقدر است؟

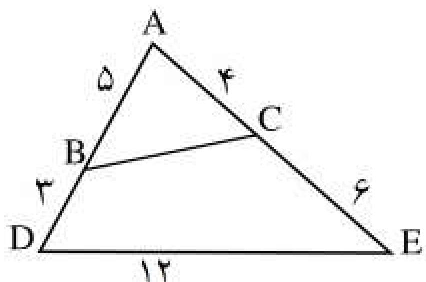
۱۳- شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه کنید.



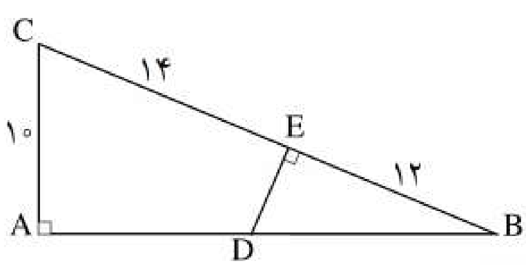
۱۴- چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. F نقطه‌ای از ضلع DC است که AF⊥DB. اگر AB=۳DA باشد آن گاه DC چند برابر DF است؟



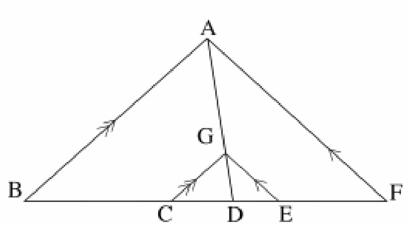
۱۵ - در شکل، با توجه به اندازه‌های داده شده، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱۶- در مثلث زیر، مساحت ۴ ضلعی $ADEC$ چند است؟

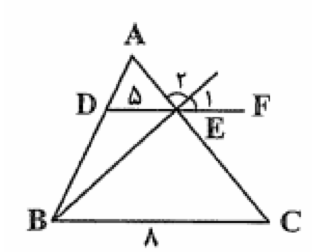


۱۷ - در شکل مقابل $\frac{۱}{۴} = \frac{CD}{BC}$ و $EF = ۳$. مقدار DE کدام است؟

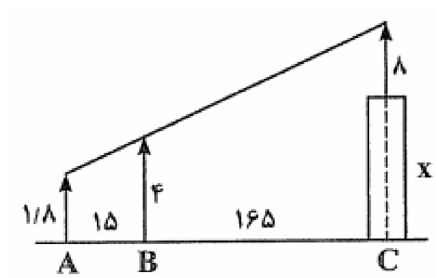


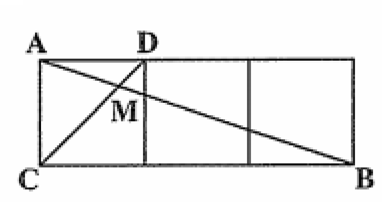
۱۸- در ذوزنقه‌ای اندازهٔ قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شود، کدام است؟

۱۹ـ در شکل مقابل $DF \| BC$ است و $DE = ۵$ و $BC = ۸$ است. اگر $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ باشد، طول AE چند است؟



۲۰ ـ در شکل زیر دکلی به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. شخص A با قد ۱/۸ متر، از پشت یک تیرک ۴ متری به نـوک دکـل نگاه می‌کند. بلندی برج چند متر است؟





۲۱ـ درشکل روبرو سه مربع به اضلاع واحد کنارهم قرار دارند . طول AM را حساب کنید .

۲۲ـ مثلثی به اضلاع ۴،۵ و a، با مثلثی به طول اضلاع ۷،۹ و b متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای عدد a، کدام است؟