فصل سوم

تابع

تعریف تابع :

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه ای است بین این دو مجموعه که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود .

مجموعه A را دامنه تابع و مجموعه B را هم دامنه تابع می نامند . برد تابع زیر مجموعه ای از هم دامنه تابع است .

توجه :

۱- اگر f یک تابع از مجموعه A به مجموعه B باشد . معمولاً آن را به شکل $f: A \to B$ می نویسند .

۲- اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد . تعداد n^m تابع از مجموعه A به مجموعه B می توان تعریف کرد.

شناسائی تابع :

تابع به شکل زوج مرتب :

یک تابع مجموعه ای از زوج های مرتب است که درآن هیچ دو زوج متمایزی دارای مؤلفهٔ اول برابر نباشند.

چنانچه مؤله های اول برابر باشند باید مؤلفه های دوم نیز برابر باشند تا مجموعه یک تابع شود.

مثال ۱ :

کدام مجموعه داده شده یک تابع می باشد؟

الف) $f = \{(1,-1),(3,0),(2,5),3,2),(4,1)\}$

ب) $g = \left\{(-2,3),(1,\sqrt{2}),(3,1),(1,\frac{2}{\sqrt{2}})\right\}$

ج) $h = \{(1,6)\}$

مثال۲ :

به ازای چه مقدار m مجموعهٔ $f = \{(3,m^2),(2,1),(-2,m),(3,m+2),(m,4)\}$ یک تابع می باشد؟

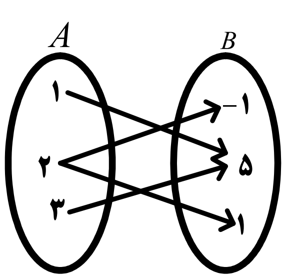
تابع به شکل نمودار وِن (Venn diagram) :

یک رابطه بین مجموعهٔ A و B که با نمودار وِن نمایش داده می شود ، وقتی تابع است که از هر عضو مجموعه A فقط یک فلش خارج شود

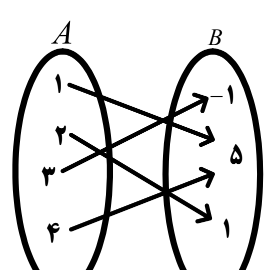
مثال۳ :

کدام رابطه ی داده شده یک تابع است ؟

الف)



ب)



مثال۴ :

الف) تمام توابع از مجموعه $A=\{۱,۲\}$ به مجموعه $B=\{a,b\}$ را بنویسید .

ب) چند تابع از مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به مجموعه $B=\{a,b\}$ می توان نوشت؟

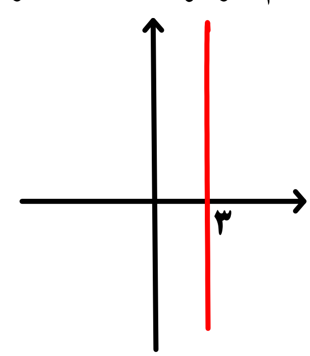
تابع به شکل نمودار هندسی (دکارتی) :

نمودار هندسی (دکارتی) وقتی نشان دهندهٔ یک تابع است که هر خط عمودی دلخواه موازی بامحور عرض ها(y ها) ، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

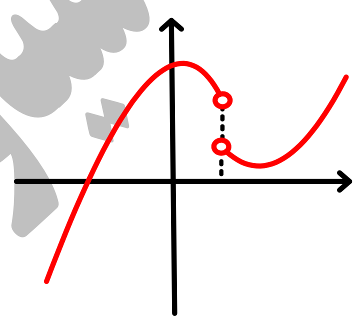
مثال۵ :

کدام نمودار داده شده ، نمودار یک تابع است ؟

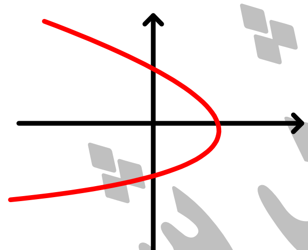
ج)



ب)



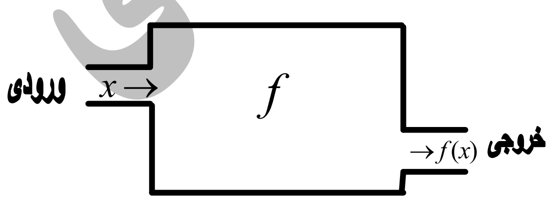
الف)



تابع به عنوان ماشین :

یک تابع وقتی به عنوان یک ماشین می توان در نظر گرفت که به ازای هر ورودی مجاز به آن ، فقط و فقط یک خروجی به آن ورودی نسبت داده شود .

اگر x عضوی دلخواه از ورودی (دامنه) f و y نمایش خروجی نظیر آن باشد ، xرا متغیر مستقل و yرا متغیر وابسته گویند .



تابع به شکل معادله جبری :

یک معادله جبری بر حسب x و y زمانی معادله یک تابع است که به ازای هر یک مقدار از x (طوری که تساوی برقرار باشد) فقط یک مقدار برای y به دست آید .

مثال۶ :

کدام معادله داده شده ، معادله یک تابع می باشد ؟

الف) $y^{2} = x^{2}$

ب) $|y| = x$

ج) $y^{2} - 2y = x + 1$

د) $(x-2)^{2} + y^{2} = 0$

هـ) $x^{2} + y^{2} - 2x + 6y + 10 = 0$

و) $y^{3} = x + 1$

توجه :

۱- در معادلات جبری که متغیر y از درجه عدی طبیعی زوج یا متغیر y درون قدرمطلق است معمولا تابع نیستند .

۲- اگر یک معادله جبری ، معادله تابع شود به آن ضابطه ی تابع گویند .

دامنه و برد تابع

اگر تابع به شکل زوج مرتب باشد :

دامنه : مجموعه ای از همه مؤلفه ای اول تابع

برد: مجموعه ای از همه مؤلفه ای دوم تابع

اگر تابع به شکل نمودار وِن باشد:

دامنه : مجموعه ای از همه عضوهای مجموعه اول

برد: مجموعه ای از همه عضوهای مجموعه دوم که برآنها پیکان وارد شده است.

اگر تابع به شکل نمودار هندسی باشد :

دامنه : تصویر نمودارتابع روی محورطول ها

برد: تصویرنمودارتابع روی محور عرض ها

اگر تابع به شکل معادله جبری باشد :

دامنه وبرد : در ادامه درس ، ضمن شناسائی انواع تابع توضیح خواهیم داد

انواع تابع :

توابع چند جمله ای :

ضابطه ی هر تابع چند جمله ای به شکل $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ است که در آن n عدد حسابی و $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و x متغیر تابع می باشد .

دامنه این توابع برابر با همه اعداد حقیقی (R) می باشد .

مثال۷ :

دامنه توابع زیر را بیابید .

الف) $f(x)=x^{6}-4x^{5}+2x^{3}-1$

ب) $y=(3x^{5}+4x^{2}-8)^{2}(x^{4}-3x^{3})^{7}$

ج) $y=\sqrt{2}+5$

د) $y=\dfrac{3x+\sqrt{2}}{4}$

توابع چند جمله ای شامل توابع خطی (خطی ثابت و غیر ثابت) ، تابع درجه دوم ، تابع درجه سوم و .... می باشد .

تابع خطی ثابت (تابع ثابت) :

هر تابع که برد آن فقط شامل یک عدد حقیقی باشد را تابع ثابت گویند .

تابع ثابت به شکل زوج مرتب :

در تابع ثابت ، مؤلفه دوم همه ی زوج های مرتب با هم برابر است.

تابع ثابت به شکل نمودار وِن :

در تابع ثابت ، همه ی فلش ها(پیکانها) به یک عضو از مجموعه دوم وارد می شوند .

تابع ثابت به شکل نمودار هندسی (دکارتی) :

نمودار هر تابع ثابت با دامنه R ، موازی با محور طولها (xها) است.

تابع ثابت به شکل معادله :

معادله هر تابع ثابت به شکل $y=c$ یا $f(x)=c$ ($c\in R$) می باشد .

مثال۸:

اگر تابع $f(x)=(m+2n-1)x^{2}-(n+3)x-m+2$ یک تابع ثابت باشد . مقادیر m و n را بیابید .

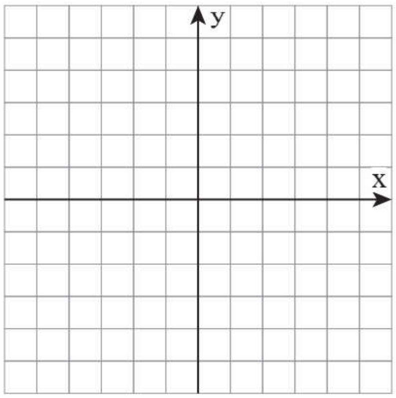
توابع خطی غیر ثابت :

معادله هر تابع خطی غیر ثابت به شکل $f(x)=ax+b$ ($a\neq 0$) می باشد .

نمودار این توابع با دامنه R ، یک خط راست (یا خط) می باشد .

مثال ۹ :

در تابع خطی f ، $f(-1)=-4$ و $f(x+1)=f(x)+2$. معادله تابع f را نوشته و نمودار آن را رسم کنید .



تابع همانی :

هر تابع که در آن هر عضودامنه به همان عضو در برد نسبت داده می شود . تابع همانی است .

تابع همانی به شکل زوج مرتب :

در تابع همانی به شکل زوج مرتب ، مؤلفه اول و دوم هر زوج آن باهم برابرند. a

تابع همانی به شکل نمودار هندسی (دکارتی) :

نمودار تابع همانی با دامنه R ، نیمساز ناحیه اول و دوم محورهای مختصات می باشد .

تابع همانی به شکل معادله :

معادله تابع همانی به صورت $f(x)=x$ می باشد .

توجه :

درتابع همانی ، دامنه و برد باهم برابرند.

مثال ۱۰ :

اگر $f=\{(a+3b,2),(c,2a-b),(2c+1,7)\}$ یک تابع همانی باشد . مقدار a و b و c را بیابید .

تابع درجه دوم:

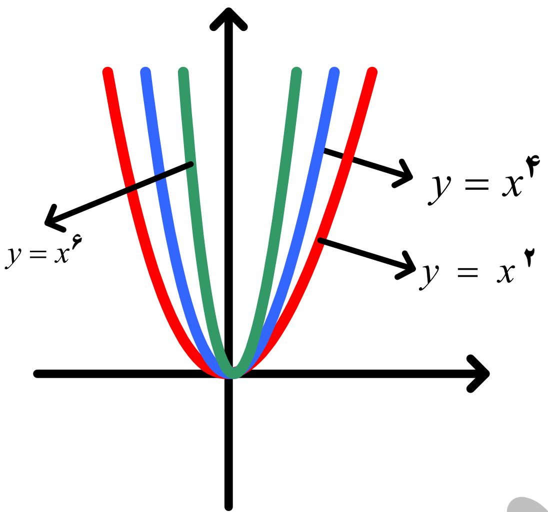
همان طور که در فصل اول گفته شد ، معادله این تابع به شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) است .

دامنه این تابع R می باشد و برد آن با توجه به علامت a به صورت زیر می باشد :

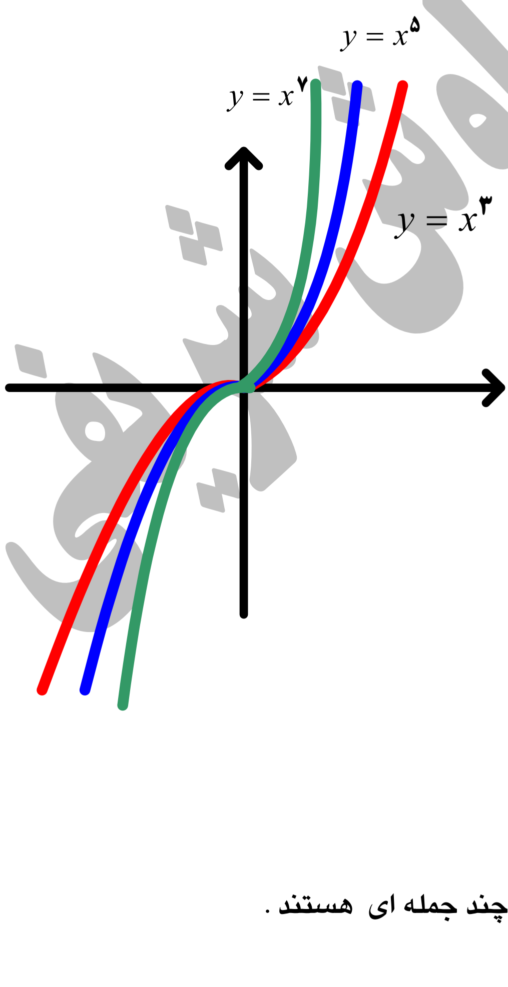
اگر $a>0$ باشد این تابع دارای مینیمم است و برد آن به صورت $\left[\frac{-\Delta}{4a},+\infty\right)$ است .

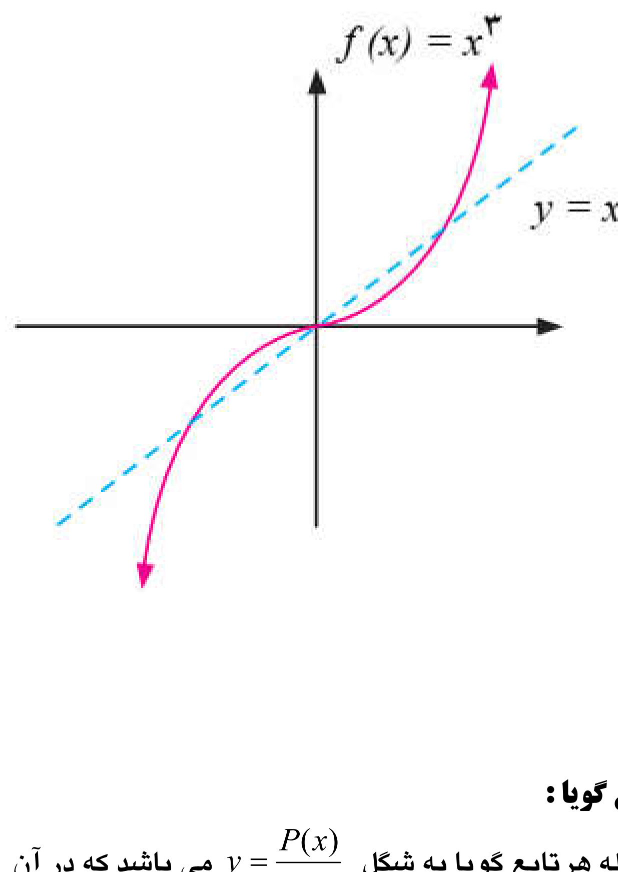
اگر $a<0$ باشد این تابع دارای ماکزیمم است و برد آن به صورت $\left(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}\right]$ است .

به طور کلی نمودار توابع چند جمله ای به شکل $f(x)=x^{2n}$ $(n\in N)$ به صورت زیر است :



به طور کلی نمودار توابع چند جمله ای به شکل $f(x)=x^{2n+1}$ $(n\in N)$ به صورت زیر است :





توابع گویا :

معادله هرتابع گویا به شگل $y=\frac{P(x)}{q(x)}$ می باشد که در آن $P(x)$ و $q(x)$ چند جمله ای هستند .

دامنه این توابع شکل زیر به دست می آید:

$$D=R-\{x\mid q(x)=0\}$$

مثال۱۱ :

دامنه توابع زیر را بیابید .

الف) $y=\dfrac{3x-1}{x^2-4x}$

ب) $y=\dfrac{x+1}{|x|-2}$

ج) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$

د) $y=\dfrac{x^2}{x^3+5x^2+4x}$

هـ) $y=\dfrac{2}{x-\dfrac{9}{x}}$

و) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+3x+5}$

مثال۱۲ :

اگر دامنه تابع $f(x)=\dfrac{5x+1}{x^2-mx+n+1}$ به شکل $R-\{1,-2\}$ باشد . مقدار m و n را بیابید .

مثال۱۳ :

اگر دامنه تابع $y=\dfrac{x^2-6}{x^2+mx+\dfrac{1}{4}}$ برابر با R باشد . حدود m را بیابید .

مثال۱۴ :

اگر دامنه تابع $y=\dfrac{3}{2x^2-bx+2a+1}$ برابر با $R-\{1\}$ باشد . مقدار a و b را بیابید .

تابع گویای هموگرافیک :

هر تابع باضابطهٔ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ که در آن d,c,b,a و $ad-bc\neq ۰$ باشد را یک تابع هموگرافیک می گویند .

دامنه اینگونه توابع برابر با $R-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ و برد آنها برابر با $R-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ می باشد .

توجه :

در اینگونه توابع خط $x=-\dfrac{d}{c}$ را مجانب قائم و $y=\dfrac{a}{c}$ را مجانب افقی تابع گویند .

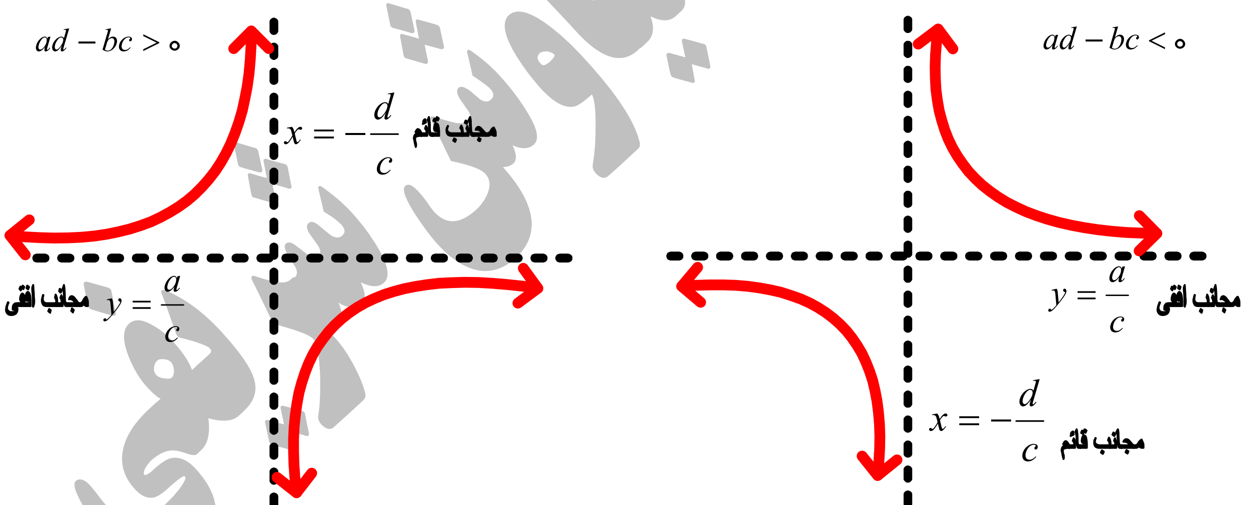
(مجانب ، خطی است که در بینهایت به نمودار تابع نزدیک می شود .)

به عنوان مثال توابع زیر همگی تابع هموگرافیک هستند .

$y=\dfrac{۲x+۵}{x-۳}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x}{۲x+۱}$ $\qquad$ $y=\dfrac{۱}{x}$

نمودار توابع هموگرافیک :

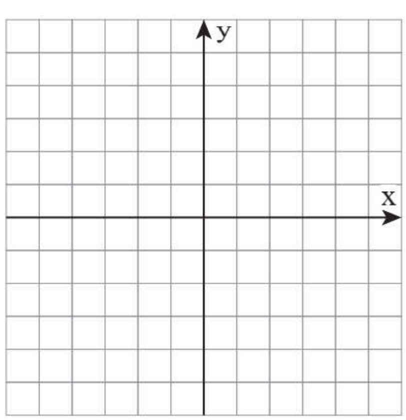
با توجه به اینکه در توابع هموگرافیک $ad-bc\neq ۰$ می باشد نمودار به یکی از دوصورت زیر است :



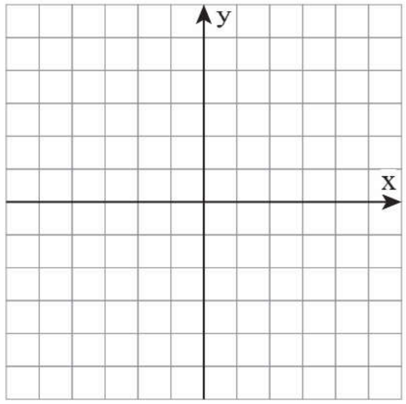
مثال۱۵ :

نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را تعیین کنید .

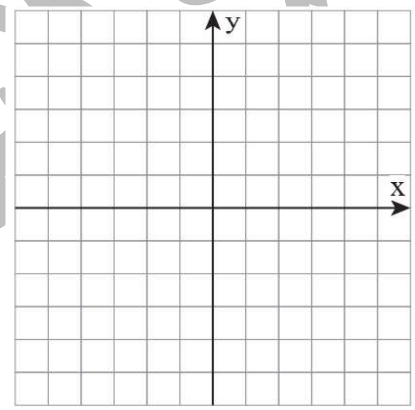
الف) $y=\dfrac{۱}{x}$



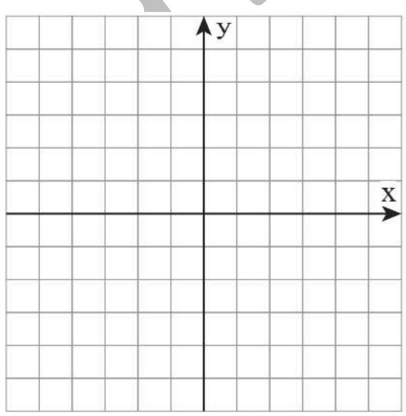
ب) $y=\frac{2x-1}{x+1}$

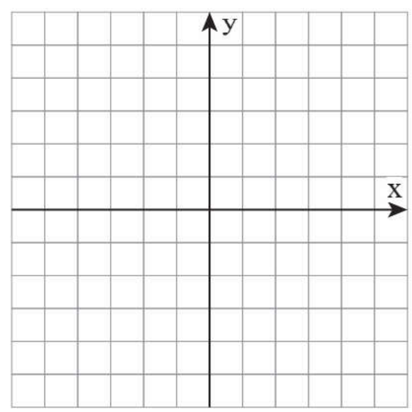


ج) $y=\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$



د) $y=\frac{2|x|-2}{2|x|+1}$

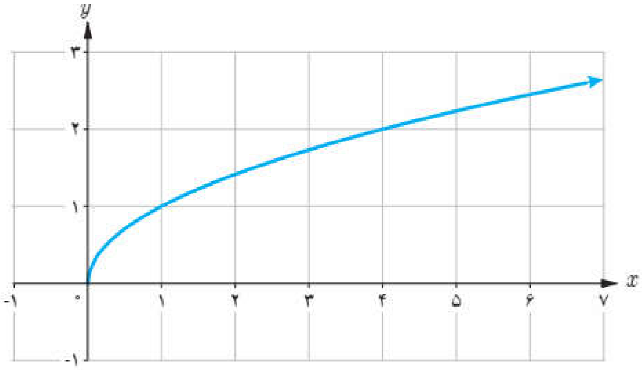




مثال۱۶ :

اگر $f(x)=\frac{(2m-5)x+3}{3-x+n}$ یک تابع هموگرافیک با دامنه $R-\{-1\}$ و برد $R-\{2\}$ باشد . مقدار m و n را بیابید .

توابع رادیکالی :



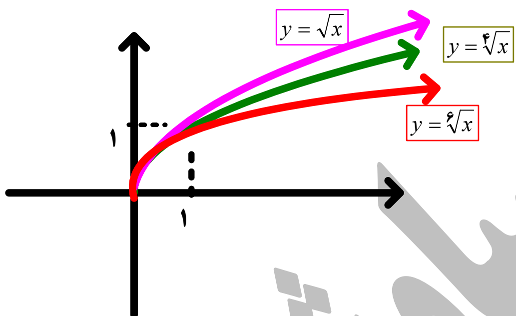
ضابطه ی تابع رادیکالی ریشه دوم به شکل $f(x)=\sqrt{x}$ می باشد

که در آن به هر عدد نامنفی ، جذر آن را نسبت می دهد .

دامنه این تابع $[0,+\infty)$ و برد آن نیز $[0,+\infty)$ می باشد .

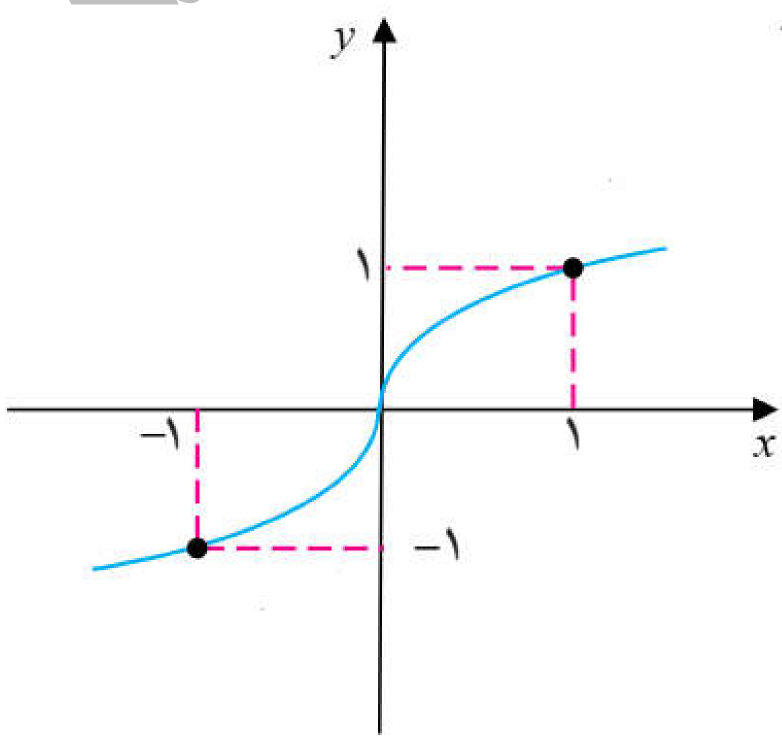
نمودار هندسی این تابع به شکل روبرو است.

به طور کلی نمودارهندسی توابع رادیکالی با فرجه زوج مانند $y = \sqrt[2n]{x}$ ($n \in N$) به صورت زیر می باشد .



نمودارهندسی توابع رادیکالی با فرجه فرد مانند $y=\sqrt[n]{x}$ (n عدی طبیعی فرد بزرگتر از ۲) به صورت زیرمی باشد .

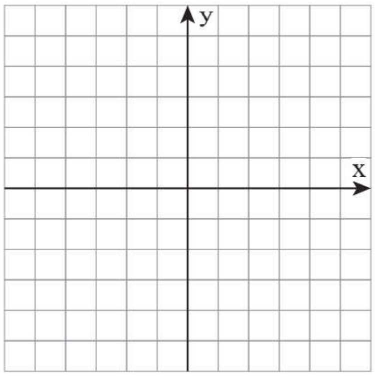
دامنه این توابع برابر R وبرد آنها نیز R است.



مثال۱۷:

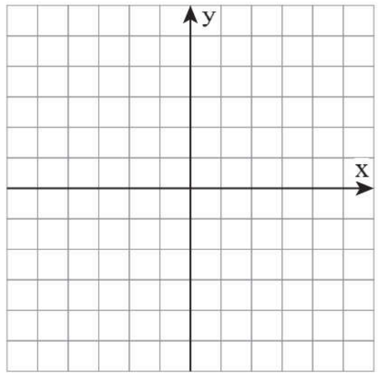
با استفاده از نمودار $y=\sqrt{x}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید .

الف) $y_1=\sqrt{x-2}$



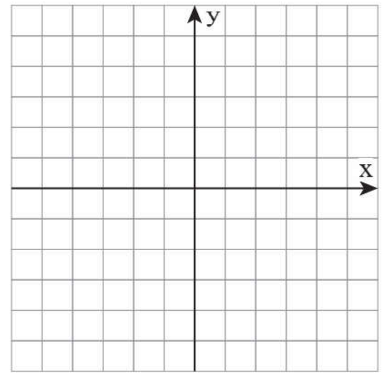
$D=$ ..... $R=$ ......

ب) $y_2=\sqrt{x}+2$



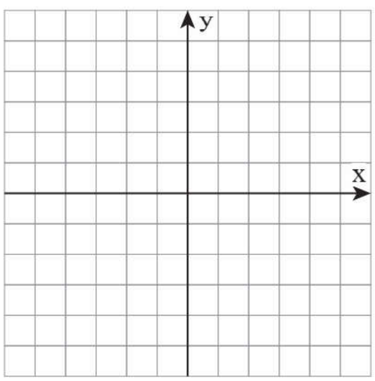
$D=$ ..... $R=$ ......

ج) $y_3=\sqrt{-x}$



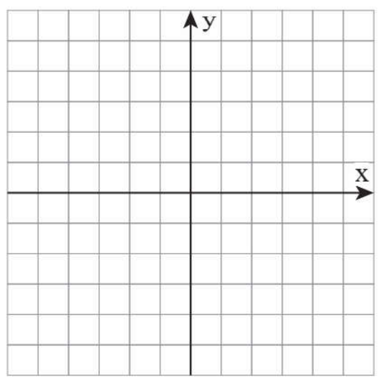
$D=$ ..... $R=$ ......

د) $y_4=-\sqrt{x}$



$D=$ ..... $R=$ ......

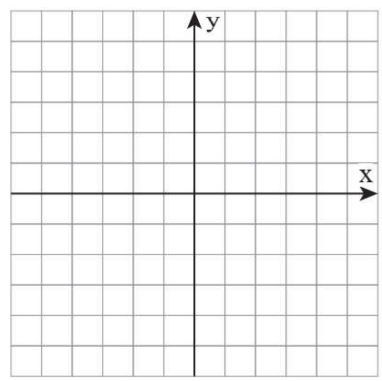
) $y_5=-\sqrt{-x}+2$



ه

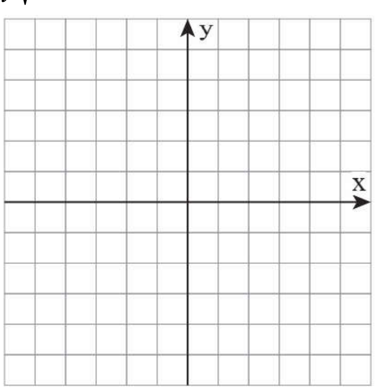
$D=$ ..... $R=$ ......

و) $y_6=\sqrt{|x|}$



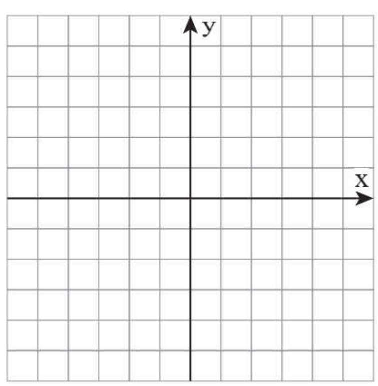
$D=$ ..... $R=$ ......

ز) $y_7=\sqrt{2x-2}$



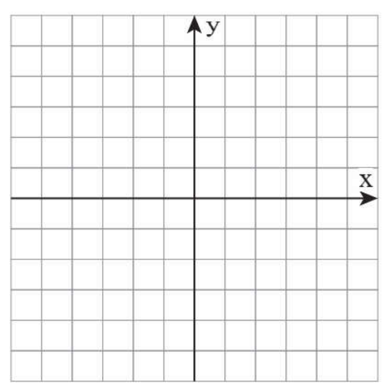
$D=$ ..... $R=$ ......

ح) $y_8=\sqrt{|x-1|}$



$D=$ ..... $R=$ ......

ط) $y_9=2-\sqrt{x-1}$



$D=$ ..... $R=$ ......

دامنه توابع رادیکالی :

الف) دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد :

دامنه توابع رادیکالی به شکل $y=\sqrt[n]{f(x)}$ (n عدد طبیعی فرد بزرگتر از ۲) برابر با دامنه عبارت زیر رادیکال می باشد .

به عبارت دیگر : $D_y = D_f$

مثال۱۸ :

دامنه توابع زیر را به دست آورید .

الف) $y=\sqrt[5]{3x-x^2+6}$

ب) $y=\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{x^2+3x-4}}$

ب) دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج :

دامنه توابع رادیکالی به شکل $y=\sqrt[n]{f(x)}$ (n عدد طبیعی زوج) برابر با جواب نامعادله $f(x)\geq 0$ می باشد .

به عبارت دیگر کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده و جواب نامعادله را به دست آورید .

مثال۱۹ :

دامنه توابع زیر را به دست آورید .

الف) $y=\sqrt{2x-6}$

ب) $y=\sqrt{3-2x-x^2}$

ج) $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-6}}$

د) $y=\sqrt{2-\sqrt{x}}$

هـ) $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x+1}$

و) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+1}}$

دامنه تابع $y=|f(x)|$:

دامنه این گونه توابع برابر با دامنه عبارت درون قدرمطلق می باشد .به عبارت دیگر : $D_y=D_f$

مثال ۲۰ :

دامنه توابع زیر را به دست آورید .

الف) $y=|۴x^۲+۵x-۶|$

ب) $y=\left|\frac{۳x-۱}{x^۲+۶x-۷}\right|$

تشخیص تابع بودن روابط با چند ضابطه :

برای آن که یک رابطه با چند ضابطه ، تابع باشد باید :

۱- همه ی ضابطه ها در دامنه خود تابع باشند .

۲- اشتراک دو به دوی دامنه ها تهی باشد و یا اگر دامنه هااشتراک داشته باشند ، به ازای xهای مشترک ، یک مقدار برای y از ضابطه های مربوط حاصل شود .

مثال ۲۱ :

کدام مورد یک تابع را مشخص می کند ؟

الف) $g(x)=\begin{cases} x^۳+۲ & , \quad x\le ۲ \\ ۵x & , \quad x\ge ۲ \end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & , \quad x<۲ \\ x^۳ & , \quad x\ge ۰ \end{cases}$

مثال۲۲ :

مقدار a را طوری بیابید که رابطه ی $f(x)=\begin{cases} ax+۲ & , \quad x\ge ۲ \\ x^۲ & , \quad x\le ۲ \end{cases}$ **در اعداد حقیقی (R) یک تابع باشد .**

توابع چند ضابطه ای (شرطی) :

هر تابع که در دامنه اش ، دارای چند ضابطه باشد یا بتوان آن را به صورت چند ضابطه نوشت یک تابع چند ضابطه ای گویند.

شکل کلی یک تابع چند ضابطه ای به صورت زیر می باشد :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & , \quad x\in D_1 \\ f_2(x) & , \quad x\in D_2 \\ \vdots & \quad\ \vdots \ \ \vdots \\ f_n(x) & , \quad x\in D_n \end{cases}$$

دامنه توابع چند ضابطه ای :

دامنه هر تابع چند ضابطه ای از اجتماع مجموعه هایی که هر ضابطه در آن تعریف شده به دست می آید یا به عبارتی :

$$D_f = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$$

مثال۲۳ :

دامنه توابع زیر را مشخص کنید .

الف) $y=\begin{cases} 3x-1 & , \quad -1\le x<2 \\ 2 & , \quad 2\le x<10 \\ \sqrt{x} & , \quad x\ge 10 \end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & , \quad x>1 \\ \sqrt{1-x} & , \quad x<0 \end{cases}$

ج) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x\ne 0 \\ 5 & , \quad x=0 \end{cases}$

د) $y=\begin{cases} x & , \quad x\in Q \\ -x & , \quad x\in R-Q \end{cases}$

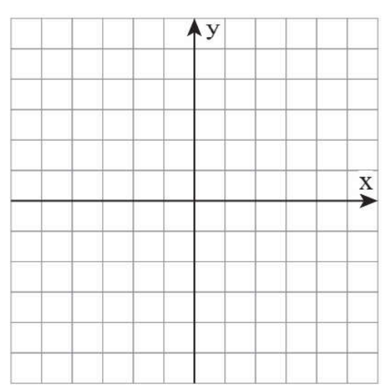
رسم نمودار توابع چند ضابطه ای :

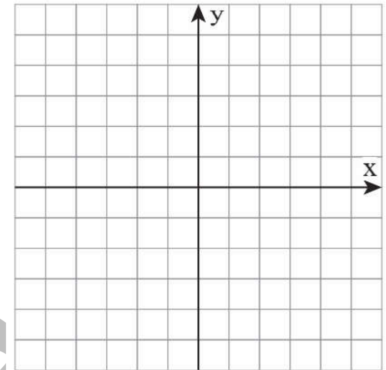
برای رسم نمودار توابع چند ضابطه ای ، کافی است نمودار هر ضابطه را در بازه ای که تعریف شده است رسم کنیم

مثال۲۴ :

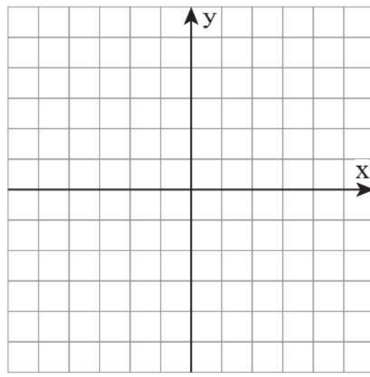
نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید .

الف) $f(x)=\begin{cases} x+1 & , \quad x\ge 0 \\ x^2-1 & , \quad x<0 \end{cases}$





ب) $y=\begin{cases} -x-1 & , \quad x<-1 \\ 2 & , \quad -1\le x\le 1 \\ x-1 & , \quad x>1 \end{cases}$



ج) $g(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1} & , \quad x>1 \\ 1-x^2 & , \quad -1\le x\le 1 \\ -2x & , \quad x<-1 \end{cases}$

توابع پله ای (پلکانی) :

هر تابع چند ضابطه ای که ، هر ضابطه ی آن تابع ثابت باشد را یک تابع پله ای گویند .

مثال۲۵ :

توابع زیر همگی پله ای هستند .

$y=\begin{cases} -1 & , \quad x<-1 \\ 2 & , \quad -1\le x\le 1 \\ 0 & , \quad x>1 \end{cases}$ و $f(x)=\begin{cases} 3 & , \quad x\ge 0 \\ 1 & , \quad x<0 \end{cases}$

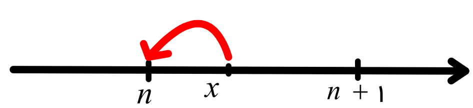
از آنجا که این توابع چند ضابطه ای می باشند تعیین دامنه و برد و رسم نمودار آنها ، همان روشهای توابع چند ضابطه ای هستند.

جزء صحیح و تابع جزء صحیح:

جزء صحیح :

فرض کنید x یک عدد حقیقی باشد. بزرگترین عدد صحیح کوچک تر یا مساوی x را ، جزء صحیح x گویند و با علامت $[x]$ نمایش می دهند . (علامت $[x]$ را جزء صحیح یا براکت x بخوانید .)

بنابراین اگر n عددی صحیح و $n\le x<n+1$ باشد در این صورت $[x]=n$ و برعکس .



$$n\le x<n+1 \iff [x]=n$$

مثال۲۶ :

حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

ج) $[-\sqrt{۳}]=$ ب) $[۳/۲]=$ الف) $[۰/۷]=$

و) $[۱-\sqrt{۵}]=$ هـ) $\left[-\frac{۱}{۳}\right]=$ د) $[۵]=$

نتیجه :

اگر x یک عدد حقیقی باشد داریم : $x=[x]+r$ که $r\in R$ و $۰\le r<۱$.

مثال۲۷ :

اگر $-۱<x<۰$ باشد حاصل عبارت $A=[x]+[x^{۲}]+[x^{۳}]+...+[x^{۱۰}]$ را حساب کنید .

خواص جزء صحیح :

فرض کنید x و y اعداد حقیقی باشند در این صورت :

۱) $[x]\in Z$

۲) $n\le x<n+۱ \xleftrightarrow{n\in Z} [x]=n$

۳) $[n]=n \qquad (n\in Z)$

اگر در نامساوی رابطه ی ۲ بجای n عبارت $[x]$ قرار دهیم داریم : ۴) $[x]\le x<[x]+۱$

اگراز سه طرف نامساوی رابطه ۳ عبارت $[x]$ کم کنیم داریم : ۵) $۰\le x-[x]<۱$

در حالت کلی داریم :

$$۰\le mx-[mx]<۱ \qquad (m>۰)$$

۶) $[x+n]=[x]+n \qquad (n\in Z)$

۷) $[x+y]=\begin{cases}[x]+[y] \\ \text{یا} \\ [x]+[y]+1\end{cases}$

اثبات : بنابرنتیجه صفحه قبل داریم : $x=[x]+r \quad , \quad 0\le r<1$
$y=[y]+p \quad , \quad 0\le p<1$

از جمع این دو رابطه به دست می آید : $x+y=[x]+[y]+r+p$

از دوطرف این تساوی جزء صحیح می گیریم :

$$[x+y]=[[x]+[y]+r+p]$$
$$=[x]+[y]+[r+p]$$ بنابر خاصیت ۶

اگر $0\le r+p<1$ باشد. در این صورت $[r+p]=0$ ودرنتیجه $x+y=[x]+[y]$

اگر $1\le r+p<2$ باشد . در این صورت $[r+p]=1$ ودرنتیجه $x+y=[x]+[y]+1$

۸) $[-x]=\begin{cases}-[x] & , \quad x\in Z \\ -[x]-1 & , \quad x\notin Z\end{cases}$

به عنوان مثال : $[-3/2]=-[3/2]-1$

۹) $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & , \quad x\in Z \\ -1 & , \quad x\in R-Z\end{cases}$

۱۰) $[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right] \qquad (n\in N \quad , \quad n\ge 2)$

مثال : $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$

۱۱) $\begin{cases}[u(x)]>n & \Rightarrow \quad u(x)\ge n+1 \\ [u(x)]\ge n & \Rightarrow \quad u(x)\ge n\end{cases} \qquad (n\in Z)$

۱۲) $\begin{cases}[u(x)]<n & \Rightarrow \quad u(x)<n \\ [u(x)]\le n & \Rightarrow \quad u(x)<n+1\end{cases} \qquad (n\in Z)$

معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح :

معادلات و نیز نامعادلات شامل جزء صحیح را به کمک خواص ذکر شده می توان حل کرد .

مثال۲۸ :

معادلات زیر را حل کنید .

الف) $[۲x+۱]=۵$

ب) $\left[۳x-\frac{۲}{۵}\right]=-۲$

ج) $[[x+۲]+x]=۲$

د) $[x]^{۲}-۲[x]-۳=۰$

مثال ۲۹:

نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $[۲x+۵]\geq ۳$

ب) $[x]^{۲} - [x] < ۲$

ج) $\left[\frac{x}{۲}\right] + \left[\frac{x+۱}{۲}\right] \geq ۱۲$

تابع جزء صحیح :

تابعی که به هر عدد حقیقی مانند x ، جزء صحیح آن را نسبت می دهد تابع جزء صحیح گویند .

تابع جزء صحیح به شکل زیر می باشد : $\begin{cases} f : R \to Z \\ f(x) = [x] \end{cases}$

مثال ۳۰ :

اگر $f(x) = [x]^{۲} + [x]$ باشد حاصل $f(f(۱-\sqrt{۲}))$ را حساب کنید .

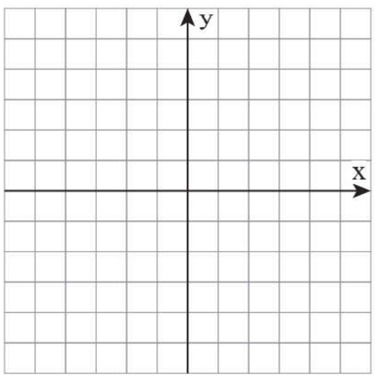
رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح :

برای رسم یک تابع شامل جزء صحیح در یک بازه ، ابتدا باید تکلیف جزء صحیح را مشخص نمود .

برای این کار بازه ی داده شده را به بازه های کوچک تر(زیر بازه ها) طوری تقسیم می کنیم که برای عبارت جزء صحیح در آن زیر بازه فقط یک مقدار صحیح حاصل شود .

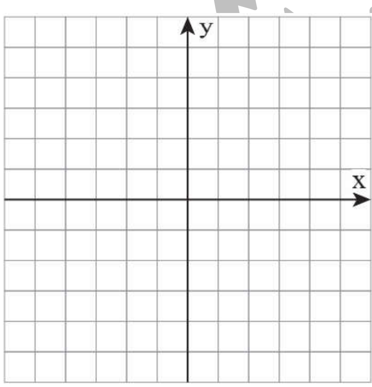
مثال ۳۱ :

نمودار تابع $f(x)=[x]+1$ را در بازه $[-2,3)$ رسم کنید .



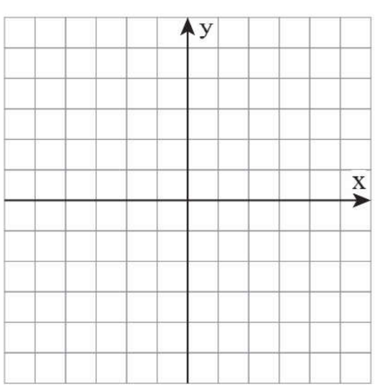
مثال۳۲ :

نمودار تابع $f(x)=[2x]+1$ را در بازه $[-1,2)$ رسم کنید .



مثال۳۳ :

نمودار تابع $f(x)=x-[x]$ را در بازه $[-2,2)$ رسم کنید .



رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$ از روی نمودار $f(x)$:

۱- نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می کنیم .

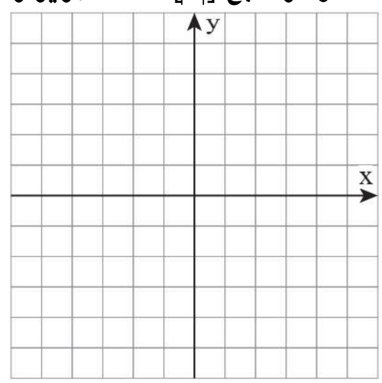
۲- تمام خطوط افقی $y=k$ ($k \in Z$) که نمودار را قطع می کنند رسم می کنیم.

۳- محل تقاطع هر خط افقی و نمودار یک نقطه توپر است .

۴- تصویر بخشی از نمودار که بین دو خط افقی متوالی $y=k$ و $y=k+1$ قرار می گیرد را روی خط پایینی یا همان خط $y=k$ رسم می کنیم .

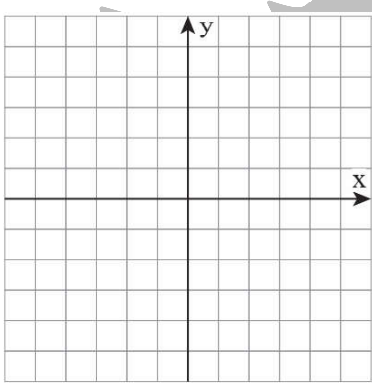
مثال۳۴ :

نمودار تابع $f(x)=[\![x]\!]$ زیر را رسم کنید .



مثال۳۵ :

نمودار تابع $f(x)=[x^2]$ زیر را رسم کنید .



دامنه توابع شامل جزء صحیح :

دامنه تابع $y=[f(x)]$ برابربا دامنه تابع $f(x)$ است .

مثال ۳۶ :

دامنه توابع زیر را مشخص کنید .

الف) $y=[x^3+5x-1]$

ب) $y=\left[\dfrac{3x-1}{x^2-1}\right]$

ج) $y=[x]^2+3x$

د) $y=\dfrac{1}{[x]-2}$

هـ) $y=\dfrac{2}{[x]+[-x]}$

و) $y=\sqrt{3-[x]}$

ز) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{[x]}}$

تساوی دو تابع

دوتابع f و g با دامنه های D_f و D_g را مساوی گویند هرگاه :

۱- $D_f=D_g$

۲- به ازای هر $x\in D_f=D_g$ داشته باشیم $f(x)=g(x)$. (یعنی به ازای طولهای مساوی عرض آنها نیز مساوی باشد.)

مثال۳۷ :

در هر مورد تساوی دو تابع داده شده را بررسی کنید .

الف) $f=\{(1,2),(4,7),(3,0)\}$ و $g=\{(1,7),(4,2),(3,0)\}$

ب) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ و $g(x)=۱$

ج) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱}$

د) $f(x)=۰$ و $g(x)=\left[\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}\right]$

هـ) $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}-۴}{x+۲} & , \quad x\neq -۲\\ ۰ & , \quad x=-۲\end{cases}$

و) $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}-x$ و $g(x)=\frac{۱}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}$

مثال۳۸ :

مقدار k را طوری بیابید که دو تابع $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x-۱} & , \quad x\neq ۱\\ ۲k+۱ & , \quad x=۱\end{cases}$ مساوی باشند .

تمرین :

۱– دامنه توابع زیر را به دست آورید .

الف) $y=\dfrac{\sqrt{۶-x}}{\sqrt{x^۲-۲x}}$

ب) $y=\sqrt{([x]+۲)(۳-[x])}$

ج) $y=\sqrt{۲-\sqrt{x-۱}}$

د) $y=\sqrt{|x|-x}$

هـ) $y=\sqrt{-x^۲(x^۲-۴)^۲}$

و) $y=\sqrt{\dfrac{۱-|x|}{۱+|x|}}$

ز) $y=\dfrac{۲x+۱}{x^۲-۵|x|+۶}$

ح) $y=\dfrac{x+۱}{\sqrt{۱-\sqrt{x-۱}}}$

ع) $y=\begin{cases}-x & , \quad x\in Q\\ x & , \quad x\notin Q\end{cases}$

ت) $y=\dfrac{۱}{x-[x]}$

۲– اگر دامنه تابع $y=\dfrac{x+۲}{ax^۲+۲x+a}$ برابر با R باشد . حدود a را بیابید .

۳– به ازای چه مقدار a و b دامنه تابع $y=\dfrac{x}{۲x^۲-(a+۳)x-۲b+۱}$ برابر با $R-\{۳\}$ می باشد ؟

۴– نمودار توابع زیر را رسم کنید

الف) $y=\dfrac{۲-x}{x+۲}$

ب) $y=\left|\dfrac{x}{x-۲}\right|$

ج) $y=\dfrac{۲|x|}{|x|+۱}$

د) $y=x[x]$ و $-۲\leq x<۲$

هـ) $y=[x]+|x|$ و $-۲\leq x<۲$

خ) $y=-\sqrt{-x}$

ت) $y=\sqrt{۲-x}+۱$

ش) $y=\sqrt{|x|}$

ی) $g(x)=\begin{cases} x-1 & , \quad x>1 \\ 1-x^2 & , \quad -1\le x\le 1 \\ -x-1 & , \quad x<-1 \end{cases}$

چ) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x>0 \\ \sqrt{-x} & , \quad x\le 0 \end{cases}$

ق) $y=[x^3]$ س) $y=[\sqrt{x}]$ م) $y=x([x]+[-x])$

۵– در هر مورد تساوی دو تابع را بررسی کنید .

الف) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=(\sqrt{1-x})(\sqrt{x+1})$

ب) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ و $g(x)=(\sqrt{x})(\sqrt{x-1})$

ج) $f(x)=x^2-x+1$ و $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1} & , \quad x\ne -1 \\ 3 & , \quad x=-1 \end{cases}$

٦– به ازای چه مقدار k ، دوتابع $f(x)=2x-1$ و $g(x)\begin{cases} \dfrac{4x^2-1}{2x+1} & , \quad x\ne -\dfrac{1}{2} \\ k^2-4k+1 & , \quad x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ برابرند؟

۷– اگر $[x^2+x]=-1$ باشد . حاصل $A=[x]+[x^2]+[x^3]+[x^4]$ را حساب کنید.

۸ – فرض کنید n عدد طبیعی بزرگتراز ۲ باشد . حاصل $\left[\sqrt{4n^2-3n+1}\right]-2\left[\sqrt{n^2-2n}\right]$ را حساب کنید .

۹– اگر $g(x)=x^2+x-2$ باشد . مجموعه جواب معادله $g([x]+[-x])=-2$ را تعیین کنید.

۱۰ – معادله های زیر راحل کنید.

ج) $[x]^2+3[x]=4$ ب) $[x+[x+[x+3]]]=15$

الف) $[2x-1]=-2$

و) $\left[\dfrac{1-4x}{3}\right]=-2$ هـ) $[x^2-1]=3$ د) $\left[2x-\dfrac{3}{2}\right]=1$

۱۱– نامعادله های زیر را حل کنید .

ج) $[x]+[-x]+[2x]\le 1$ ب) $([x]-3)([x^2]-1)\le 0$ الف) $\dfrac{[x-2]}{[x]^2+1}\ge 0$

۱۲– در کدام رابطه زیر y تابعی از x است؟

ج) $[y]=x$ ب) $|y|=4-|x|$ الف) $2xy+1=3x-y$

هـ) $|y|+x^2=2x-1$ د) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$

۱۳ - مساحت سطح زیر نمودار تابع $y=[x]-۳\left[\frac{x}{۳}\right]$ با محور xها در بازه $[۰,۳)$ را حساب کنید.

۱۴ـ اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{ax+b}{x-۲} & , x\neq ۲\\ ۳ & , x=۲\end{cases}$ یک تابع ثابت باشد . مقدار a و b را بیابید.

۱۵ - اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲+a & ,a \quad x\geq -۱\\ ۲a-x & , \quad x\leq -۱\end{cases}$ یک تابع باشد . مقدار $f(f(-۲))$ را حساب کنید.

تابع یک به یک :

تابع f را یک به یک گویند ؛ هرگاه به هر عضو در برد دقیقاً یک عضو از دامنه نسبت داده شود .

تشخیص تابع یک به یک از روی زوج های مرتب :

هرگاه تابع f به شکل زوج مرتب باشد . زمانی یک به یک است که مؤلفه ی دوم تکراری نداشته باشد .

مثال۳۹ :

کدام تابع یک به یک است ؟

الف) $f=\{(-۱,۲),(۲,۳),(۰,۱),(۴,۲),(۷,۰)\}$

ب) $g=\{(۱,۱),(۳,۷),(۲,۹),(۰,۴)\}$

مثال۴۰ :

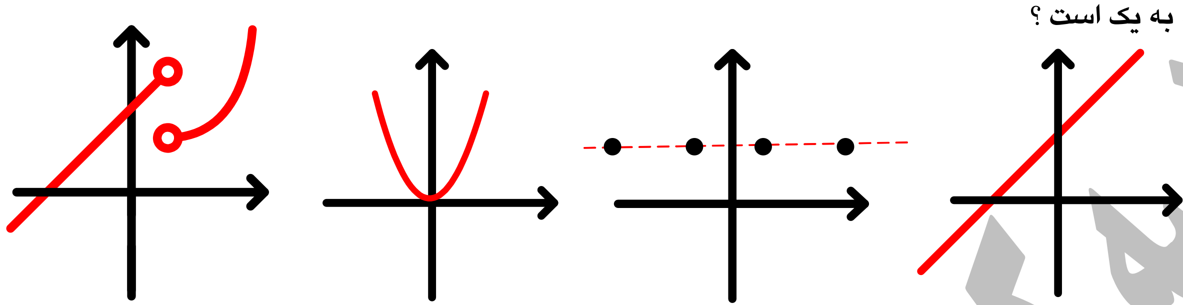
اگر رابطه ی $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ یک تابع یک به یک باشد . مقدار a و b را بیابید.

تشخیص تابع یک به یک از روی نمودار هندسی :

هرگاه نمودار تابع داد شود ، این نمودار زمانی یک تابع یک به یک است که هر خط دلخواه موازی با محور طول ها(xها)

نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند .

مثال ۴۱ : کدام تابع یک به یک است ؟



تشخیص تابع یک به یک از روی ضابطه تابع :

فرض کنید f یک تابع و a و b دو عضو دامنه f باشند.

تابع f یک به یک است هرگاه از تساوی $f(a)=f(b)$ عبارت $a=b$ نتیجه شود .

مثال ۴۲ :

یک به یک بودن توابع زیر را به کمک ضابطه بررسی کنید .

الف) $f(x)=3x-2$

ب) $f(x)=x^2+5$

ج) $f(x)=2x^3-1$

د) $f(x)=x^2-6x$

توجه :

تابع خطی $y=ax+b$ **(** $a\neq 0$ **)** و تابع رایکالی $y=\sqrt{ax+b}$ **(** $a\neq 0$ **)** و تابع هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **(** $ad-bc\neq 0$ **)**

یک به یک هستند .

محدود کردن دامنه تابع و ساختن تابع یک به یک :

در بعضی مواقع تابع داده شده یک به یک نیست . در این صورت می توان دامنه تابع را به بازه ای محدود کنیم که تابع در آن بازه یک به یک باشد .

توجه :

تابع درجه دوم $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ در دامنه اش یک به یک نیست . اما در هر کدام از بازه های $\left[\frac{-b}{۲a}, +\infty\right)$ و $\left(-\infty, \frac{-b}{۲a}\right]$ یک به یک است.

مثال۴۳ :

نشان دهید تابع $f(x) = x^{۲} - ۴x$ برای $x \leq ۲$ یک به یک است .

مثال۴۴ :

تابع $f(x) = |x + ۳|$ در چه بازه هایی یک به یک است ؟

وارون (معکوس) تابع :

اگر تابع f به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب باشد . رابطه ای که از جابجا کردن مؤلفه ی اول و دوم باهم به دست می آید وارون (معکوس) تابع f می گویند .

مثال۴۵ :

معکوس توابع زیر را بنویسید ؟ معکوس کدام تابع ، تابع می باشد؟

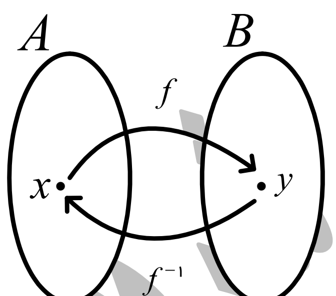
الف) $f=\{(۱,۳),(-۱,۲),(۰,۵),(۴,۲)\}$

ب) $g=\{(۱,۹),(۰,-۲),(۴,۲),(۳,۷),(۵,۱)\}$

توجه : اگر تابع f ، تابعی یک به یک باشد ، وارون آن نیز تابع خواهد که به آن تابع وارون f گویند و با علامت f^{-1} (بخوانید وارون f) نمایش می دهند . پس :

تابع وارون(معکوس) :

فرض کنید f تابعی یک به یک با دامنه A وبرد B باشد . در این صورت تابع معکوس f (یا f^{-1}) دارای دامنه B و برد A است که به صورت زیر تعریف می شود :



برای هر $y\in B$ داریم: $f(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y)=x$

به دست آوردن تابع معکوس:

از روی زوج های مرتب:

اگر تابع f ، تابعی یک به یک باشد ، کافی است جای مؤلفه ی اول و دوم هر زوج مرتب را باهم عوض کنیم تا تابع f^{-1} به دست آید .

مثال۴۶ :

تابع معکوس ، تابع $f=\{(۱,۲),(۰,۳),(-۲,۵),(۷,۸)\}$ را نوشته و دامنه و برد f و f^{-1} را نوشته و باهم مقایسه کنید .

چه نتیجه ای می گیرید ؟

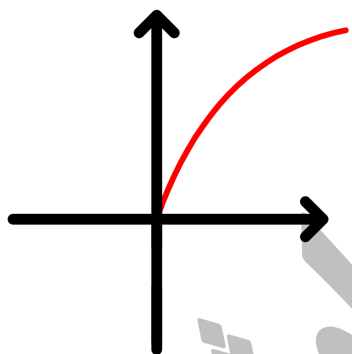
به دست آوردن تابع معکوس از روی نمودار هندسی:

اگر تابع f ، تابعی یک به یک باشد ، کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم(خط $y = x$) رسم کنیم تا تابع f^{-1} به دست آید .

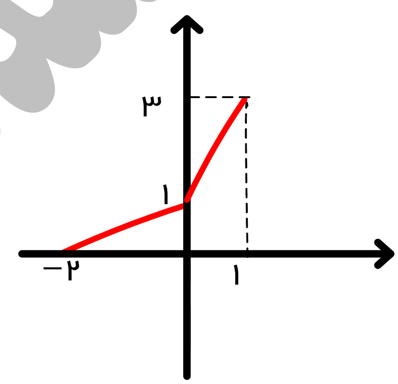
مثال۴۷ :

نمودار تابع معکوس توابع زیر را رسم کنید .

الف)



ب)



به دست آوردن تابع معکوس از روی ضابطه تابع :

اگر تابع f ، تابعی یک به یک باشد ، برای به دست آوردن ضابطه تابع معکوس به شیوه ی زیر عمل می کنیم .

۱- ضابطه (معادله جبری) تابع داده شده را برابر با y قرار می دهیم.

۲- متغیر x را برحسب y به دست می آوریم .

۳- در آخر بجای x عبارت $f^{-1}(x)$ و بجای y متغیر x را قرار می دهیم .

مثال۴۸ :

ضابطه ی تابع معکوس ، توابع زیر را به دست آورید .

الف) $f(x) = ۳x - ۲$

ب) $f(x)=\frac{۲-x}{۳x+۱}$

ج) $f(x)=۲x^{۳}-۱$

د) $f(x)=\sqrt[۵]{۲x-۱}-۳$

هـ) $f(x)=\sqrt{x-۱}-۳$

توجه :

اگر f یک تابع یک به یک ، با تابع معکوس $f^{-۱}$ باشد . در این صورت :

۱- $D_f=R_{f^{-۱}}$ و $R_f=D_{f^{-۱}}$

۲- اگر (a,b) نقطه ای روی نمودار تابع f باشد یعنی $f(a)=b$. در این صورت نقطه ی (b,a) روی $f^{-۱}$ است یعنی $f^{-۱}(b)=a$

مثال۴۹ :

اگر $f(x)=۲x+\sqrt{x}$ باشد . کدام نقطه روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد ؟

۱- $A(\frac{۱}{۴},۱)$

۲- $B(۱,\frac{۱}{۴})$

۳- $C(۰,۱)$

۴- $D(۱,۳)$

مثال ۵۰ :

ضابطه ی تابع معکوس $f(x)=x^{۲}+۴x+۱$ ($x\geq -۲$) کدام است ؟

۱- $f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x+۳}$ ۲- $f^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۳}$

۳- $f^{-۱}(x)=-۲+\sqrt{x+۳}$ ۴- $f^{-۱}(x)=-۲-\sqrt{x+۳}$

مثال ۵۱ :

اگر $f(x)=x^{۳}+۲x+۱$ باشد . حاصل $f^{-۱}(۱)$ را حساب کنید .

نقطه برخورد تابع و تابع معکوس :

اگر f یک تابع معکوس پذیر باشد . برای پیدا کردن نقطه برخورد نمودار تابع f و $f^{-۱}$ در صورت وجود؛ باید ضابطه ی $f^{-۱}$ را پیدا کرده و معادله $f(x)=f^{-۱}(x)$ را حل کنیم .

مثال ۵۲ :

نقاط برخورد نمودار تابع $f(x)=-x^{۳}$ با تابع معکوس آن را بیابید .

تشخیص یک به یک بودن تابع چند ضابطه ای:

یک تابع چند ضابطه ای وقتی یک به یک است که

۱- هر ضابطه ی آن در دامنه اش یک به یک باشد .

۲- اشتراک دو به دوی بردهای ضابطه های آن تهی باشد .

برای تشخیص یک به یک بودن توابع چند ضابطه ای بهتر است نمودار آن ها را رسم کنیم .

برای محاسبه ی ضابطه تابع معکوس ، تابع معکوس پذیر f ، ابتدا معکوس هر ضابطه را به دست می آوریم و سپس با توجه به دامنه هر ضابطه ، برد آن را تعیین کرده و به عنوان دامنه تابع معکوس در نظر میگیریم .

مثال۵۳ :

یک به یک بودن توابع زیر را بررسی نموده و در صورت معکوس پذیر بودن ، ضابطه ی تابع معکوس آن را بنویسید .

الف) $f(x)=\begin{cases} x+2 & , \quad x\le 0 \\ x^2 & , \quad x>0 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\ge 0 \\ x-1 & , \quad x<0 \end{cases}$

ج) $h(x)=\begin{cases} x^2-4x+7 & , \quad x\le 2 \\ 4-x & , \quad x>2 \end{cases}$

تمرین :

۱- اگر رابطه $f=\{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$ یک تابع یک به یک باشد . مقدار a و b را بیابید .

۲- کدام تابع زیر یک به یک است ؟ چرا؟

الف) $f(x)=x+|x|$ ب) $f(x)=x-|x|$ ج) $f(x)=x+[x]$

د) $f(x)=x-[x]$ هـ) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ و) $f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}$

ز) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\le 0 \\ 2x-1 & , \quad x>0 \end{cases}$ ط) $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x\le 0 \\ x+1 & , \quad x>0 \end{cases}$ ح) $f(x)=[x^2-2x]$

۳- ضابطه ی تابع معکوس ، تابع $f(x)=|2x-6|-|x+1|$ در بازه ای که معکوس پذیر است به دست آورید .

۴- اگر $g(x)=f(3x-4)$ $f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}$ باشد . حاصل $g^{-1}(16)$ را بنویسید .

۵ - نقاط برخورد نمودارتابع $f(x)=x^2+2x+1$ (با دامنه $x>-1$) و نمودار تابع معکوس آن را به دست آورید .

۶- نقاط برخورد نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$ و نمودار تابع معکوس آن را بنویسید.

۷- ضابطه ی تابع معکوس (وارون) توابع زیر را بیابید . سپس دامنه و برد تابع های f و f^{-1} را بنویسید .

الف) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ ب) $f(x)=2-\sqrt{x-1}$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\le 0 \\ -x^2 & , \quad x>0 \end{cases}$ د) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x\ge 0 \\ -\sqrt{-x} & , \quad x<0 \end{cases}$

هـ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-x^2} & , \quad x\ne 0 \quad , x^2\ne 1 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$ و) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & , \quad x\ne 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

ز) $f(x)=x|x|$ ح) $f(x)=x+[x]$

ق) $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$

اعمال روی توابع :

اگر f و g با دامنه های D_f و D_g باشند . آن گاه مجموع ($f+g$) و تفاضل ($f-g$ یا $g-f$) و حاصل ضرب ($f.g$) و حاصل تقسیم ($\frac{f}{g}$ یا $\frac{g}{f}$) دو تابع را به صورت زیر تعریف می شود :

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad D_{f+g}=D_f \cap D_g$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x) \qquad D_{f-g}=D_f \cap D_g$

۳) $(f.g)(x)=f(x).g(x) \qquad D_{f.g}=D_f \cap D_g$

۴) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x \in R | g(x)=0\}$

۵) $(Kf)(x)=Kf(x) \qquad D_{Kf}=D_f$

مثال۵۴ :

اگر $f(x)=\frac{x^2+2x}{x-1}$ و $g(x)=\frac{x-1}{x^2+x}$ باشند.

الف) دامنه تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ و f^2 را تعیین کنید .

ب) ضابطه ی $f+g$ و $f.g$ را بنویسید .

ج) حاصل $(3f-5g)(2)$ را به دست آورید .

حل :

الف)

ب)

ج)

مثال۵۵ :

اگر $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ و $g(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ باشد .

الف) دامنه تابع های $g-f$ و $\dfrac{g}{f}$ و $\dfrac{1}{g-3}$ را بنویسید .

ب) حاصل $\left(\dfrac{f-g}{2f-3g}\right)(0)$ را بنویسید .

حل:

الف)

ب)

توجه :

اگر تابع های داده شده f و g به شکل زوج مرتب بودند کافی است ابتدا دامنه آنها را تعیین کرده و بین دامنه ها اشتراک گرفته و برای تقسیم آنها از اشتراک باید عضوهایی حذف کنیم که مؤلفه دوم آن زوج مرتب درتابعی که در مخرج قرار می گیرد صفر است. عملیات جمع و تفریق و ضرب و تقسیم روی مؤلفه های دوم انجام می شود .

مثال۵۶ :

اگر $f=\{(2,1),(-4,3),(5,0),(-6,2)\}$ و $g=\{(7,1),(2,-4),(-4,0),(-6,-1),(0,5)\}$

الف) دامنه تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f\times g$ و $\dfrac{f}{g}$ را بنویسید

ب) تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f\times g$ و $\dfrac{f}{g}$ را به شکل زوج مرتب بنویسید .

اعمال جبری روی توابع چند ضابطه ای :

اگر دو تابع f و g چند ضابطه ای باشند و در هر دو تابع ، **دامنه ضابطه های نظیر به هم باهم برابرباشند** ، برای انجام اعمال جبری روی این دو تابع ، کافی است عمل جبری مورد نظر را روی تک تک ضابطه های توابع و که دارای دامنه یکسان هستند ، اعمال کنیم .

در تقسیم این گونه توابع باید ریشه های مخرج را از دامنه حذف کرد.

اگر دامنه های نظیر به هم از دو تابع باهم برابر نباشند ، ابتدا ضابطه ها را به گونه ای می نویسیم که دامنه های نظیربه هم باهم برابرباشند.

مثال۵۷ :

اگر $f(x)=\begin{cases} x^{2}-x & , \quad x\geq -1 \\ 1-x & , \quad x<-1 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x-3 & , \quad x\geq -1 \\ 2x+1 & , \quad x<-1 \end{cases}$ باشند .ضابطه تابع های $f+g$ و $\frac{g}{f}$ را بنویسید .

مثال۵۸ :

اگر $f(x)=\begin{cases} x^{2}+1 & , \quad x\geq 1 \\ 1-x & , \quad x<1 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x-3 & , \quad x\geq -2 \\ x+1 & , \quad x<-2 \end{cases}$ باشند .ضابطه تابع های $f+g$ و $f\times g$ را بنویسید .

رسم نمودار تابع های $f+g$ و $f-g$ از روی نمودارهای f و g :

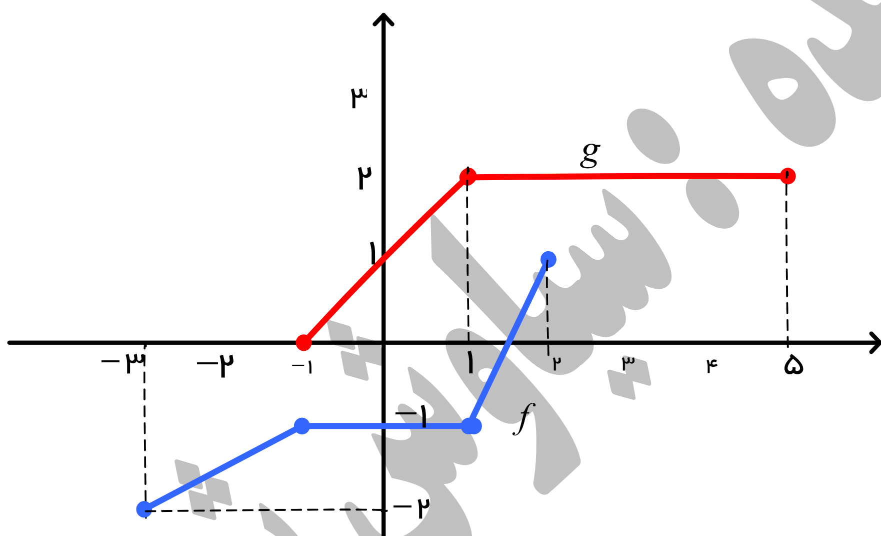
کافی است برای طولهای مشترک دو تابع ، عرض های آنها را باهم جمع یا تفریق کنیم .

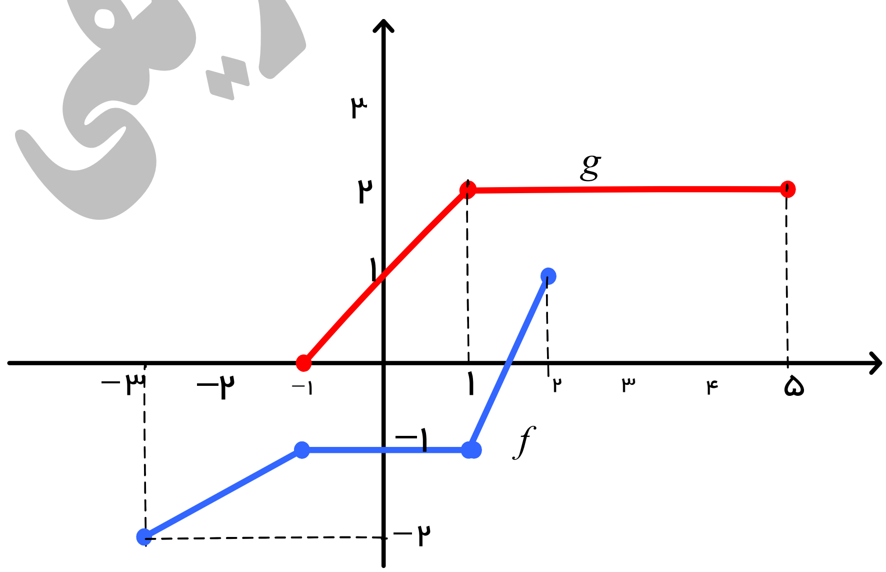
درحالت کلی تر برای سایر عملیات ، در صورت امکان معادله های دو تابع را نوشته سپس عملیات مورد نظر را روی آنها انجام می دهیم .

مثال۵۹ :

با توجه به نموداردو تابع f و g رسم شده ، الف) نمودار $f+g$ و $g-f$ را رسم کنید .

ب) ضابطه تابع های f و g را بنویسید .





تمرین :

۱– اگر $f=\{(1,4),(0,2),(3,1),(5,0)\}$ و $g=\{(1,2),(3,3),(-1,4),(5,2)\}$ باشند . حاصل را بنویسید .

۲– اگر $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشند .

الف) دامنه تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f\times g$ و $\dfrac{3f}{2g}$ و $\dfrac{f^2}{g-2}$ را بنویسید .

ب) ضابطه تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f\times g$ و $\dfrac{3f}{2g}$ و $\dfrac{f^2}{g-2}$ را بنویسید .

۳- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+x}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^2+x}$ باشد .

الف) دامنه تابع های $f+g$ و $f\times g$ را بنویسید .

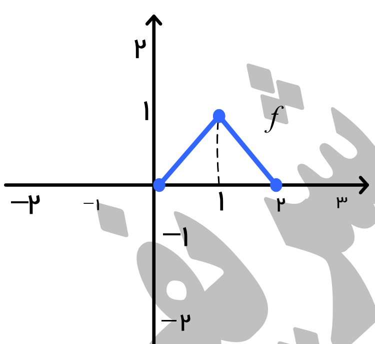
ب) ضابطه تابع های $f+g$ و $f\times g$ را بنویسید .

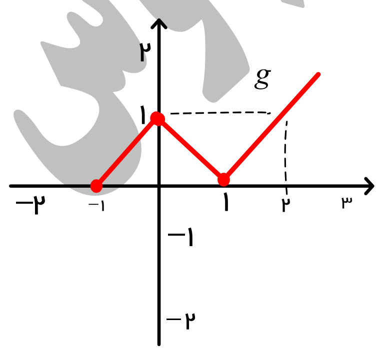
ج) نمودار تابع های $f+g$ و $f\times g$ را رسم کنید.

۴- در شکل زیر نمودار های دو تابع f و g داده شده است.

الف) ضابطه تابع های $f+g$ و $f\times g$ را بیابید.

ب) نمودار تابع های $f+g$ و $f\times g$ را رسم کنید .

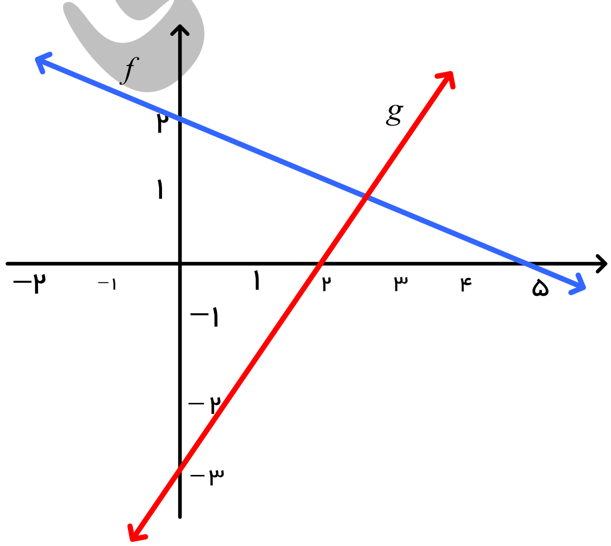




۵ - در شکل زیر نمودار های دو تابع f و g داده شده است.

الف) ضابطه تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f\times g$ را بیابید.

ب) نمودار تابع های $f+g$ و $f-g$ و $f\times g$ را رسم کنید



تمرین

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|$، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x)=-|x|$ ب) $h(x)=-|x-۳|$ پ) $l(x)=۲|x-۲|$

۲ در هر مورد، دامنه و ضابطهٔ حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $g(x)=\frac{۱}{x}$ $f(x)=|x|$ ب) $g(x)=x+۲$ $f(x)=x^{۲}-۴$

پ) $g(x)=-\sqrt{x}$ $f(x)=\sqrt{x}$ ت) $g(x)=x^{۲}+۳x-۱۰$ $f(x)=\frac{x-۲}{x+۵}$

ث) $g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\}$ $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x)=۲\sqrt{x}$ ب) $s(x)=-\sqrt{x-۲}$ پ) $t(x)=-۳\sqrt{x}$

ت) $u(x)=۱-\sqrt{x}$ ث) $v(x)=۱-\sqrt{x-۳}$

۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به‌دست آورید.