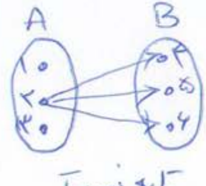
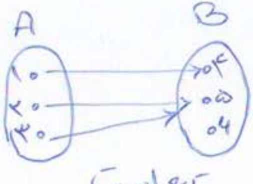
* تابع *

- یادآوری:

✓ تابع f از مجموعه A به مجموعه B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو A، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود. به A، دامنه تابع و به B، هم دامنه تابع می گوییم. برد تابع، زیرمجموعه ای از هم دامنه است. $f: A \to B$



تابع نیست

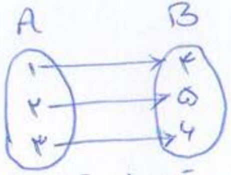


تابع است

$D_f=\{1,2,3\}$

هم دامنه $=\{4,5,6\}$

$R_f=\{4,5\}$



تابع است

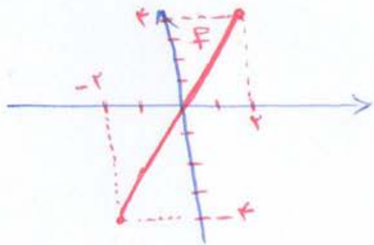
$D_f=\{1,2,3\}$

$R_f=$ هم دامنه $=\{4,5,6\}$

✓ برای مشخص کردن یک تابع و رسم آن، به دامنه، (هم دامنه) و ضابطه تابع نیاز داریم.

به عنوان مثال، در تابع $\begin{cases} f: [-2,2] \to \mathbb{R} \\ f(x)=2x \end{cases}$ داریم:

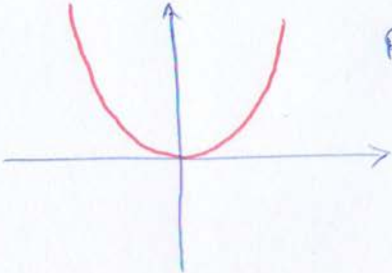
$-2\le x\le 2 \xrightarrow{\times 2} -4\le 2x\le 4 \to R_f=[-4,4]$



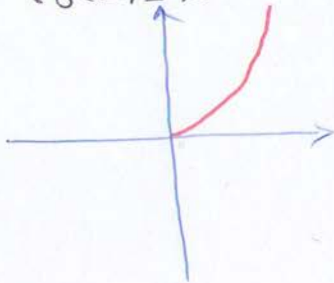
مثال: توابع زیر را رسم کنید و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ f(x)=x^2\end{cases}$

ب) $\begin{cases} g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)\\ g(x)=x^2\end{cases}$



$R_f=[0,+\infty)=R_g$



نکته: هم دامنه را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

- تابع به عنوان یک ماشین:

تابع را می‌توان ماشینی در نظر گرفت که یک ورودی x را دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی $f(x)$ تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند. در این مدل، به x متغیر مستقل و به $y=f(x)$ متغیر وابسته می‌گوییم.

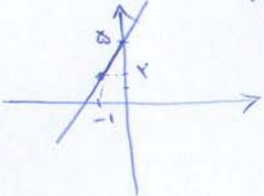
مثال: فرض کنید ماشین f به عنوان ورودی، اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، آن را سه برابر کرده و سپس ۵ واحد به آن اضافه می‌کند. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) ماشین به ازای ورودی ۲-، چه خروجی خواهد داشت؟ $(-2)\times3+5=-1$

ب) اگر خروجی ماشین ۴ باشد، ورودی آن چقدر بوده است؟ ج/ $3x+5=4\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

پ) ضابطه تابع را بنویسید. $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ f(x)=3x+5\end{cases}$

ت) نمودار تابع را رسم کرده و دامنه و برد را بیابید.



$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=\mathbb{R}$

- تساوی دو تابع :

دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه :

۱ - دامنه f و دامنه g باهم برابر باشند : $D_f = D_g$

۲ - برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم : $f(x) = g(x)$

به طور خلاصه یعنی : دامنه‌ها برابر - ضابطه‌ها برابر (ضابطه‌ها نه بُردها)

به عنوان مثال تابع های $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$ باهم برابرند ولی تابع‌های $h(x)=\frac{x}{x}$ و $k(x)=1$ باهم برابر نیستند زیرا $D_h = R-\{0\}$ است درصورتی که $D_k = R$ است .

مثال : کدام یک از توابع زیر برابرند ؟

الف) $f=\{(1,2)(5,7)\}$ و $g=\{(1,7)(5,2)\}$ ‏ $D_f=D_g$ و $R_f=R_g$ است ولی زوج مرتب‌ها باهم متفاوتند پس تابع ها برابر نیستند

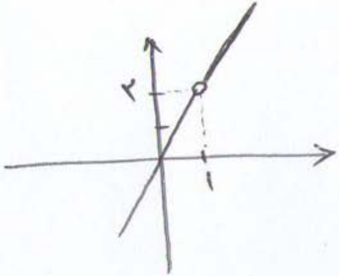
ب) $f=\{(a,b)(c,d)\}$ ، $g=\{(c,d),(a,b)\}$ ‏ $D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$ ← برابرند

پ) $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x)=3x \end{cases}$ $\begin{cases} g: R^+ \to R \\ g(x)=3x \end{cases}$ ‏ $D_f \neq D_g$ ← برابر نیستند

ت) $f(x)=x|x|$ $g(x)=x^2$ ‏ $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases} \neq g(x)$ برابر نیستند

ث) $f(x)=4x$ $g(x)=\frac{8x}{2}=4x$ برابرند

مثال: نمودار مقابل مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟ مسأله چند جواب دارد؟



الف) $D_f=\mathbb{R}$ و $f(x)=2x$ ✗ دامنه $\mathbb{R}$ نیست

ب) $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ و $f(x)=2x$ ✗ 〃 $\mathbb{R}-\{2\}$ 〃

پ) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ و $f(x)=2x$ ✓

ج) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ و $f(x)=\dfrac{2x^2-2x}{x-1} = \dfrac{2x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2x$ ✓

ح) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ و $f(x)=\dfrac{2x^3-2x^2}{x^2-x} = \dfrac{2x(x^2-x)}{x^2-x} = 2x$ ✗

$D_f=\mathbb{R}-\{0,1\}$

پس مسأله می‌تواند بی‌شمار جواب داشته باشد

- تعریف تابع:

در مباحث پیش رو، هر مبحث به سه حالت «رابطه»، «شکل» و «ضابطه» مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱- رابطه: یک رابطه، وقتی تابع است که در آن، هیچ دو زوج مرتبی دارای مؤلفه اول یکسان نباشند. اگر دو زوج مرتب، مؤلفه اول برابر داشته باشند، آنگاه رابطه، وقتی تابع است که مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد:

$$\begin{cases}(a_1,a_2)\\(b_1,b_2)\end{cases} \to \text{اگر } a_1=b_1 \Rightarrow a_2=b_2$$

مثال: اگر رابطه f یک تابع باشد، مقادیر a و b را بیابید.

$$f=\{(1,b)(3,5)(a+2,2)(3,a^2+4)\}$$

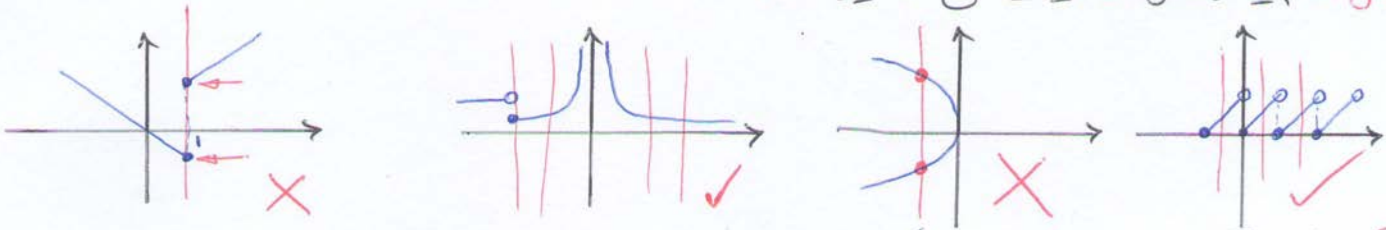
$$a^2+4=5 \to a^2=1 \to a=\pm1$$

$a=1 \to f=\{(1,b)(3,5)(3,2)\}$ تابع نیست ×

$a=-1 \to f=\{(1,b)(3,5)(1,2)\} \to b=2$

۲- شکل: یک شکل، وقتی تابع است که هر خط موازی محور yها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: کدام یک از شکل‌های زیر، یک تابع را نمایش می‌دهد.



۳- ضابطه: یک ضابطه، وقتی تابع است که به ازای هر x ورودی، تنها یک مقدار برای y به دست آید.

مثال: کدام یک از معادله‌های زیر، یک تابع است؟

الف) $y+2x^2=4$ ✓ $y=-2x^2+4$

ب) $|y|+x=2$ × $x=0 \to |y|=2 \to y=\pm2$

پ) $|y|+|x-1|=0$ $f=\{(1,0)\}$

نکته: معادلاتی که دارای $|y|$، y^2 و $[y]$ می‌باشند، معمولاً تابع نیستند.

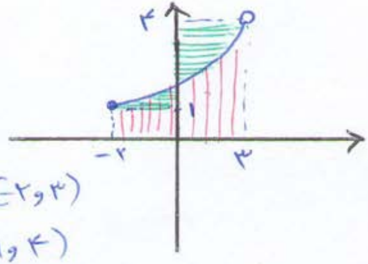
- دامنه و بُرد :

۱) ــ رابطه: در یک رابطه، به مؤلفه‌های اول دامنه و به مؤلفه‌های دوم، بُرد گفته می‌شود.

مثال: $f=\{(1,2)(2,4)(4,-1)(5,5)\} \to D_f=\{1,2,4,5\}$ و $R_f=\{2,4,-1,5\}$

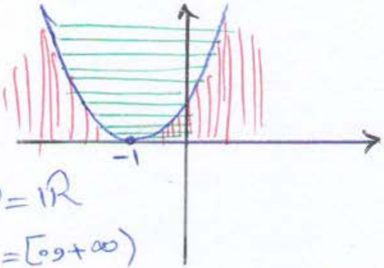
۲) شکل: تصویر نمودار روی محور xها می‌شود دامنه و تصویر نمودار روی محور yها می‌شود بُرد.

مثال: دامنه و برد شکل‌های زیر را بیابید.



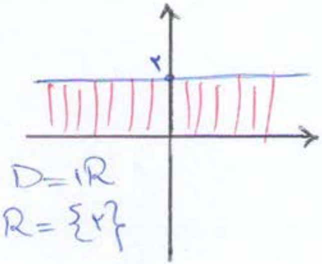
$D=[-2,3)$

$R=[1,4)$



$D=\mathbb{R}$

$R=[0,+\infty)$



$D=\mathbb{R}$

$R=\{2\}$

۳) ــ ضابطه: فقط دامنه را بررسی می‌کنیم:

الف) توابع چندجمله‌ای: تابعی مانند $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots$ که نه کسر دارد و نه رادیکال را تابع چندجمله‌ای می‌نامیم. دامنه تابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است. مثال: $f(x)=3$ و $f(x)=2x$ و $f(x)=x^2-x-1$ و $f(x)=x^{100}+x^{99}+1$ دامنه همگی برابر $\mathbb{R}$ است.

ب) توابع کسری گویا: هر تابع به صورت $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند و $Q(x)\neq 0$ است را تابع گویا می‌نامیم. برای یافتن دامنه تابع گویای f، کافی است ریشه‌های مخرج کسر را از $\mathbb{R}$ کم کنیم، یعنی:

$$D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه(های) مخرج}\}$$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{5}{x+2}$ $\quad x+2=0 \to x=-2 \to D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

ب) $g(x)=\frac{x+3}{x^2-9}$ $\quad x^2-9=0 \to x^2=9 \to x=\pm 3 \to D_g=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$

پ) $h(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad x^2+1=0 \to x^2=-1$ غ ق $\to D_h=\mathbb{R}$

مثال: اگر دامنه تابع $f(x)=\frac{x^2-x}{2x^2+ax+b}$ به صورت $D_f=\mathbb{R}-\underbrace{\{1,2\}}_{\text{ریشه های مخرج}}$ باشد، a و b را بیابید.

$x=1 \to 2+a+b=0$

$x=2 \to 8+2a+b=0$

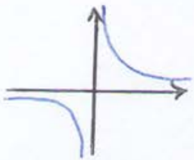
$$\to \begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=-8 \end{cases} \to \begin{cases} a=-6 \\ b=4 \end{cases}$$

مثال: اگر دامنه توابع $f(x)=\frac{3x-1}{2x^2-x-m}$ و $g(x)=\frac{1}{\underbrace{|x|+2}_{>0}}$ باهم برابر باشند، حدود m را بیابید.

چون $D_g=\mathbb{R}$ است، پس D_f هم باید برابر $\mathbb{R}$ باشد، یعنی مخرج نباید ریشه داشته باشد:

$$2x^2-x-m=0 \xrightarrow{\Delta<0} (-1)^2-4(2)(-m)<0 \to 1+8m<0 \to 8m<-1 \to m<\frac{-1}{8}$$

نکته: یک تابع گویای معروف $y=\frac{1}{x}$ است که دامنه و برد آن $D=\mathbb{R}-\{0\}$ و $R=\mathbb{R}-\{0\}$ است و شکل آن بصورت مقابل است:



ب) توابع رادیکالی: توابعی که در ضابطه آنها عبارت $\sqrt[n]{P(x)}$ وجود دارد، توابع رادیکالی نامیده می‌شوند. در توابع رادیکالی به فرم $f(x)=\sqrt[n]{P(x)}$ داریم:

$$\begin{cases} \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \to D_f=\{x \mid \text{عبارت زیر رادیکال} \geq 0\} \\ \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \to D_f=D_P \to \text{یعنی رادیکال محدودیتی ایجاد نمی‌کند} \end{cases}$$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{3x-5}$ $\quad D_f: 3x-5\geq 0 \to 3x\geq 5 \to x\geq \frac{5}{3} \Rightarrow D_f=[\frac{5}{3},+\infty)$

ب) $g(x)=\sqrt{x(x-2)}$ $\quad D_g: x(x-2)\geq 0$ $\xrightarrow{\text{جدول}}$ ($x=0$ ، $x=2$)

x		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-2)\geq 0$	$+$ ج	0	$-$	0	$+$ ج

$\Rightarrow D_g=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

پ) $h(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ $\xrightarrow{\text{رادیکال بی تاثیر}} D_h=\mathbb{R}$

ت) $P(x)=\sqrt[4]{x^2+1}$ $\quad D_p: x^2+1\geq 0 \to x^2\geq -1$ همواره برقرار $\Rightarrow D_p=\mathbb{R}$

ث) $q(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ $\quad D_q: \frac{x}{x-1}\geq 0$ ($x=0$ ، $x=1$) $\xrightarrow{\text{جدول}}$

x		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x}{x-1}\geq 0$	$+$	0	$-$	ت ن	$+$

$\to D_q=(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

* انواع تابع

- **تابع همانی:** اگر دامنه و بردیک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه به همان عضو در برد متناظر شود، آن تابع را همانی می‌نامیم. به بیان ساده‌تر $y=x$ یا $f(x)=x$ یا $f=\{(a,a)(b,b)(c,c)\ldots\}$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) $D_f=R_f=\mathbb{R}$

- **تابع ثابت:** اگر برد یک تابع، تنها شامل یک عضو باشد، آن تابع را تابع ثابت می‌نامیم. ضابطه تابع ثابت $f(x)=c$ است که در آن c یک مقدار ثابت است. مثلاً $f=\{(1,0)(2,0)(3,0)\}$ یا $y=4$ (خطی موازی محور xها)
$D_f=\mathbb{R}$, $R_f=\{c\}$

- **تابع خطی:** تابع با ضابطه $f(x)=ax+b$ را تابع خطی می‌نامیم.

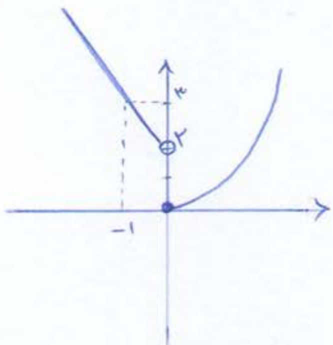
$$D_f=R_f=\mathbb{R}$$

- **تابع چند ضابطه‌ای:** تابع به فرم
$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in D_1 \\ f_2(x) & x\in D_2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$
که در آن زیر دامنه‌های D_1 و D_2 و ... باهم اشتراکی ندارند و $f_i(x)$ها متمایزند را تابع چندجمله‌ای می‌نامیم.

$D_f=D_1\cup D_2\cup\ldots$

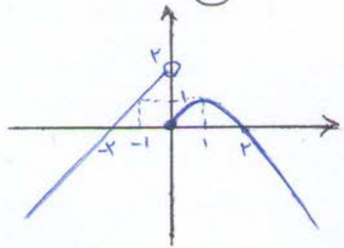
$R_f=R_{f_1}\cup R_{f_2}\cup\ldots$

به عنوان مثال، تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ 2-x & x<0 \end{cases}$ یک تابع دوضابطه‌ای است. دامنه این تابع $x<0 \cup x\geq 0$ یعنی $\mathbb{R}$ است و برد آن را توسط رسم می‌توانیم مشخص کنیم:



$$\longrightarrow R_f=(2,+\infty)\cup[0,+\infty)=[0,+\infty)$$

مثال: نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x & x\geq 0\\ x+2 & x<0\end{cases}$ کدام یک از خطوط زیر را در سه نقطه قطع می کند؟



1) $y=2$

2) $y=1$

3) $y=\frac{1}{2}$ ✓

4) $y=-1$

باید تابع را رسم کنیم:

با توجه به شکل، برای b های که کوچکتر از 1، خط $y=b$ نمودار تابع را در سه نقطه قطع می کند و فقط تا $b=0$ ادامه دارد.

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{1-x}} & x<1\\ 2x-\frac{3}{4} & x\geq 1\end{cases}$ باشد، $f(f(\frac{3}{4}))$ کدام است؟ (سراسری تجربی)

1) $\frac{3}{4}$

2) $\frac{3}{2}$

3) $\frac{5}{4}$

4) $\frac{9}{4}$ ✓

از داخلی ترین f شروع می کنیم به مقداریابی:

$$f(\tfrac{3}{4}) \xlongequal{\frac{3}{4}<1} \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$$

$$f(\underbrace{f(\tfrac{3}{4})}_{\frac{3}{2}}) \xlongequal{\frac{3}{2}>1} f(\tfrac{3}{2})=2(\tfrac{3}{2})-\tfrac{3}{4}=3-\tfrac{3}{4}=\tfrac{9}{4}$$

مثال: اگر $f(x)=3+\sqrt{2x}$ باشد، آنگاه $f(f(\frac{25}{2}))$ را بیابید.

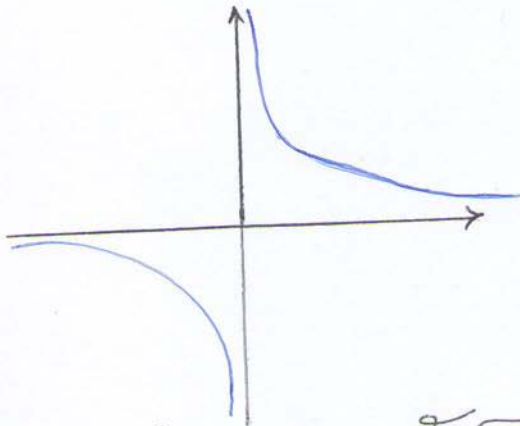
$$f(\tfrac{25}{2})=3+\sqrt{2(\tfrac{25}{2})}=3+\sqrt{25}=3+5=8$$

$$f(f(\tfrac{25}{2}))=f(8)=3+\sqrt{2(8)}=3+\sqrt{16}=3+4=7$$

- **توابع گویا :** هر تابع به فرم $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و $Q(x)$ نباید صفر باشد. به عنوان مثال توابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ، $h(x)=\frac{x}{x+5}$ و $k(x)=\frac{\frac{1}{3}x-4}{x^2-x+1}$ همگی گویا هستند

✓ در مبحث دامنه توابع گفتیم که دامنه تابع گویا برابر $D_f=\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$ است.

- **یک تابع گویای معروف :** تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ یک تابع گویای معروف است (از خانواده توابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$) که در مسائل زیادی کاربرد دارد. دامنه و برد این تابع هر دو به صورت $D_f=R_f=\mathbb{R}-\{0\}$ می‌باشد و شکل آن به صورت زیر است:



مثال: هزینه پاکسازی x درصد از آلودگی های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به وسیله تابع $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک سازی ۵۰٪ از آلودگی های این رودخانه چقدر است؟

$x=50 \to f(50)=\frac{255\times 50}{100-50}=255$ میلیون تومان

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی های این رودخانه پاک سازی خواهد شد؟

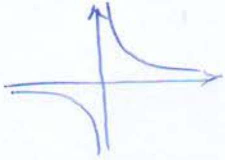
$f(x)=\underbrace{1,000,000,000}_{1000 \text{ میلیون تومان}}=\frac{255x}{100-x} \to 100,000-1000x=255x \to x=\frac{100000}{1255}\simeq 80\%$

پ) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به صورت یک بازه نمایش دهید.

$D_f=[0,100)$ خود ۱۰۰ نمی‌تواند باشد، چون مخرج کسر صفر می‌شود

مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ، نمودار تابع $g(x)=\frac{-1}{x}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

$-\frac{1}{x}$ قرینه $\frac{1}{x}$ نسبت به محور xها است (مقادیر $f(x)$ قرینه می‌شوند):



$\frac{1}{x}$

$\Longrightarrow$

$-\frac{1}{x}$

$$D_g=R_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

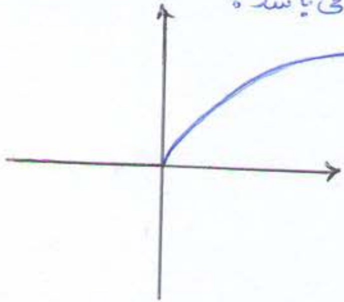
الف) $f(x)=\frac{2-x}{x^2-1} \to x^2-1=0 \to x^2=1 \to x=\pm 1 \Longrightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

ب) $g(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4} \to x^2+4=0 \to x^2=-4$ جواب ندارد $\Longrightarrow D_g=\mathbb{R}$

پ) $h(x)=\frac{x}{(x^2-5)(x^2-2x+1)} \to =0 \begin{cases} x^2-5=0 \to x^2=5 \to x=\pm\sqrt{5} \\ x^2-2x+1=0 \to (x-1)^2=0 \to x=1 \end{cases}$

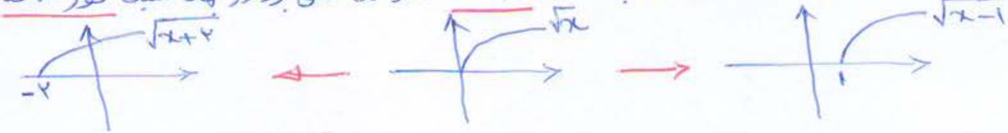
$$\Longrightarrow D_h=\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{5}, 1\}$$

- توابع رادیکالی: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را تابع ریشه دوم یا تابع رادیکالی می‌نامیم. دامنه این تابع $D_f=[0,+\infty)$ و برد آن نیز برابر $R_f=[0,+\infty)$ است و شکل آن به صورت زیر می‌باشد:

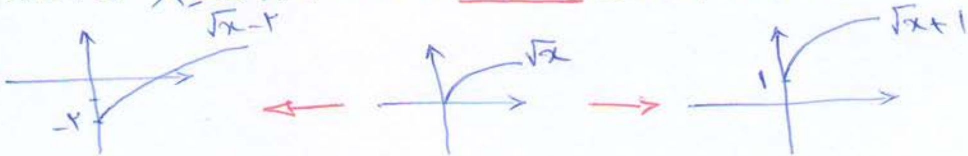


نکته: به کمک قوانین انتقال نمودار که در فصل ۱ آموختیم، می‌توانیم نمودار توابع $\sqrt{x+a}$ و $\sqrt{x}+b$ را رسم کنیم:

الف) برای رسم $\sqrt{x+a}$: اگر a مثبت بود در جهت منفی محور xها و اگر a منفی بود در جهت مثبت محور xها نمودار را جابجا می‌کنیم:

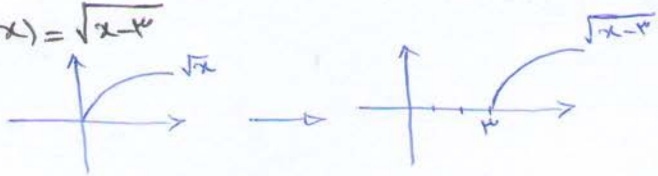


ب) برای رسم $\sqrt{x}+b$: نمودار را به موازات محور yها b واحد جابجا می‌کنیم ($b>0$ به سمت بالا، $b<0$ به سمت پایین)



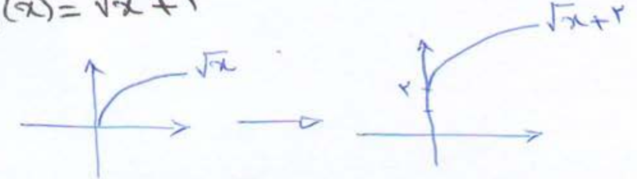
مثال: به کمک انتقال، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-3}$



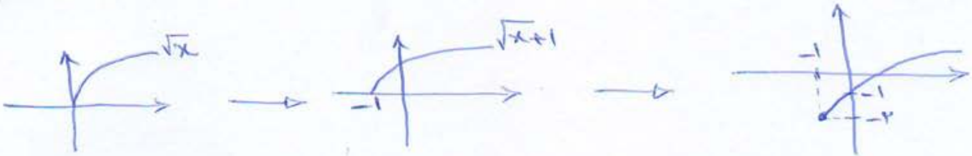
$$\begin{cases} D_f=[3,+\infty) \\ R_f=[0,+\infty) \end{cases}$$

ب) $g(x)=\sqrt{x}+2$



$$\begin{cases} D_g=[0,+\infty) \\ R_g=[2,+\infty) \end{cases}$$

پ) $h(x)=-2+\sqrt{x+1}$



$$\begin{cases} D_h=[-1,+\infty) \\ R_h=[-2,+\infty) \end{cases}$$

- تابع پله‌ای - تابع جزء صحیح :

ابتدا یک مثال : هزینه ارسال بسته پستی به مقصدی معین مطابق جدول مقابل است :

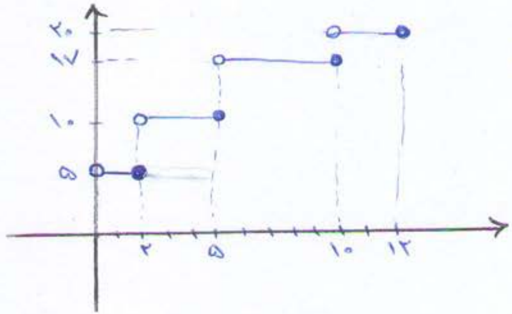
x (وزن بسته)	$0<x\leq 2$	$2<x\leq 5$	$5<x\leq 10$	$10<x\leq 12$
$f(x)$ هزینه ارسال	۵	۱۰	۱۷	۲۰

اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد ،

الف) $f(x)$ را به صورت تابعی چندضابطه‌ای نوشته ، دامنه و برد آن را به دست آورید .

$$f(x)=\begin{cases} 5 & 0<x\leq 2 \\ 10 & 2<x\leq 5 \\ 17 & 5<x\leq 10 \\ 20 & 10<x\leq 12 \end{cases}$$

ب) نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید .



// توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به گونه‌ای که تابع روی هرکدام از این بازه ها ، ثابت باشد ، تابع پله‌ای می‌نامیم .

✓ مشهورترین تابع پله‌ای، تابع جزء صحیح است:

- تعریف جزء صحیح یک عدد: جزء صحیح یک عدد، اولین عدد صحیح قبل از x است. البته اگر x خودش عدد صحیح باشد جزء صحیح x برابر خود x می‌شود. جزء صحیح x را با $[x]$ نمایش می‌دهیم. پس:

الف) اگر x یک عدد صحیح باشد، آنگاه $[x]=x$ ← مثال: $[2]=2$ ، $[0]=0$ ، $[-5]=-5$

ب) اگر x یک عدد غیرصحیح باشد و $n<x<n+1$ $(n\in\mathbb{Z})$ قرار داشته باشد، آنگاه $[x]=n$

مثال: $\left[\frac{31}{42}\right]=0$ ، $[-1.2]\xrightarrow{-2<-1.2<-1}=-2$ و $[\sqrt{5}]\xrightarrow{2<\sqrt{5}<3}=2$ ، $[2.5]=2$

نتیجه: از دو تعریف فوق می‌توان نتیجه گرفت: $[x]\leq x$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\underbrace{[-3.2]}_{-4<-3.2<-3}+[\underbrace{2.8-1.6}_{1.2}]+2\underbrace{[-1.4]}_{-2<-1.4<-1}=-4+1+2(-2)=-7$

ب) $3[\underbrace{\sqrt{3}}_{1<\sqrt{3}<2}]-[\underbrace{4\times 1.5}_{6}]+[\underbrace{2.3\times 3.7}_{8.51}]=3(1)-6+8=5$

?? دو نکته مهم:

۱- از قسمت ب تعریف می‌توان نتیجه گرفت: اگر $[x]=n \longrightarrow n\leq x<n+1$

مثال: $[x]=2 \longrightarrow 2\leq x<3$

۲- اگر a عددی صحیح باشد، می‌توانیم آن را از براکت خارج کنیم:

$$[x\pm a]=[x]\pm a$$

مثال: $[x+3]=[x]+3$

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $[x] = -1 \rightarrow -1 \leq x < -1+1 \Rightarrow -1 \leq x < 0$

ب) $[x+1] = 3 \rightarrow 3 \leq x+1 < 4 \xrightarrow{-1} 3-1 \leq x < 4-1 \rightarrow 2 \leq x < 3$

روش دوم $\rightarrow [x]+1 = 3 \rightarrow [x] = 3-1 = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3$

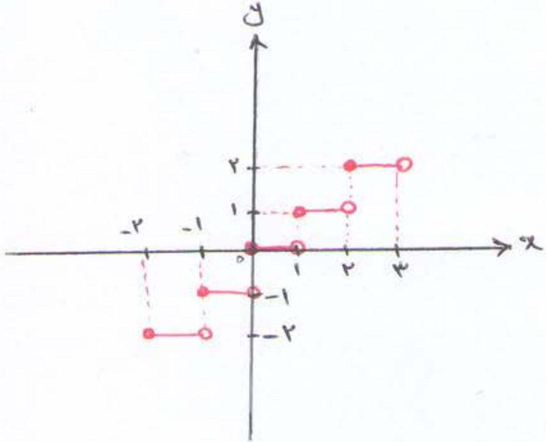
پ) $[x+1]+2[x] = 7 \rightarrow [x]+1+2[x] = 7 \rightarrow 3[x] = 7-1 = 6 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow 2 \leq x < 3$

ت) $\left[\frac{x+2}{3}\right] = 5 \rightarrow 5 \leq \frac{x+2}{3} < 6 \xrightarrow{\times 3} 15 \leq x+2 < 18 \xrightarrow{-2} 13 \leq x < 16$

ث) $[3x+2] = 4[3x] \rightarrow [3x]+2 = 4[3x] \rightarrow 3[3x] = 2 \rightarrow [3x] = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \rightarrow$ معادله جواب ندارد

* **تابع جزء صحیح:** تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و آن را به صورت $f(x)=[x]$ نمایش می‌دهیم. دامنه این تابع $D_f=\mathbb{R}$ و برد آن $R_f=\mathbb{Z}$ است و نمودار آن در یک بازه دلخواه مثل $[-2,3)$ به صورت زیر است:

x	$f(x)$
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2



مثال: نمودار توابع زیر را در بازه های داده شده رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+2 \quad , \quad D_f=[-3,3)$

$-3 \leq x < -2 \rightarrow [x]=-3 \rightarrow f(x)=-3+2=-1$

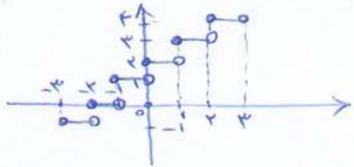
$-2 \leq x < -1 \rightarrow [x]=-2 \rightarrow f(x)=-2+2=0$

$-1 \leq x < 0 \rightarrow [x]=-1 \rightarrow f(x)=-1+2=1$

$0 \leq x < 1 \rightarrow f(x)=2$

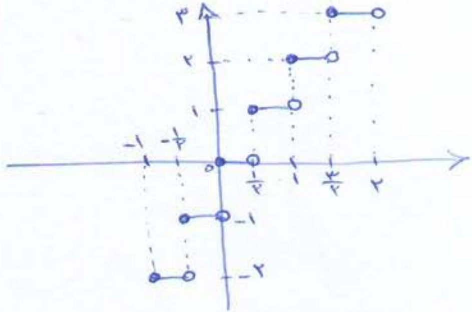
$1 \leq x < 2 \rightarrow f(x)=3$

$2 \leq x < 3 \rightarrow f(x)=4$



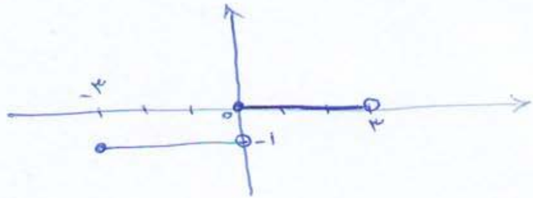
ب) $g(x)=[2x] \quad , \quad D_g=[-1,2)$

$$-1 \leq x < 2 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2x < 4 \rightarrow \begin{cases} -2 \leq 2x < -1 \rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2} \quad , \quad g(x)=-2 \\ -1 \leq 2x < 0 \rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0 \quad , \quad g(x)=-1 \\ 0 \leq 2x < 1 \rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \quad , \quad g(x)=0 \\ 1 \leq 2x < 2 \rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \quad , \quad g(x)=1 \\ 2 \leq 2x < 3 \rightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2} \quad , \quad g(x)=2 \\ 3 \leq 2x < 4 \rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2 \quad , \quad g(x)=3 \end{cases}$$



پ) $h(x)=[\frac{1}{3}x] \quad , \quad D_h=[-3,3)$

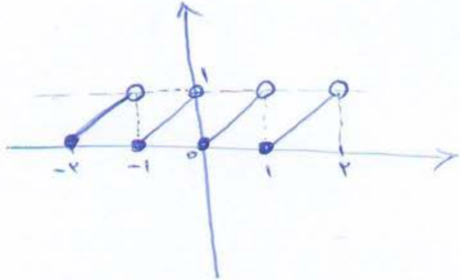
$$-3 \leq x < 3 \xrightarrow{\div 3} -1 \leq \frac{1}{3}x < 1 \rightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \rightarrow -3 \leq x < 0 \quad , \quad h(x)=-1 \\ 0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \rightarrow 0 \leq x < 3 \quad , \quad h(x)=0 \end{cases}$$



نکته: در نمودار $y=[mx]$ هرگاه $m>1$ باشد، نمودار نسبت به $[x]$ فشرده تر و اگر $0<m<1$ باشد، نمودار باز تر می شود، اما ارتفاع پله ها تغییری نمی کند و همان 1 است.

ج) $f(x) = x - [x]$ ، $D_f = [-2, 2)$

$$\begin{cases} -2 \leq x < -1 \rightarrow f(x) = x+2 \\ -1 \leq x < 0 \rightarrow f(x) = x+1 \\ 0 \leq x < 1 \rightarrow f(x) = x \\ 1 \leq x < 2 \rightarrow f(x) = x-1 \end{cases}$$

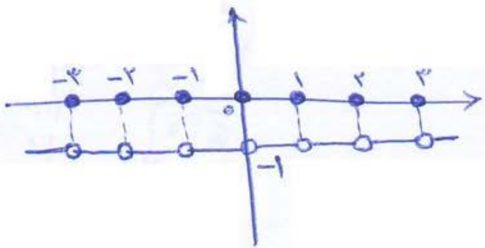


$$\begin{cases} x = \overset{\text{جزء صحیح}}{n} + \overset{\text{جزء اعشاری}}{\alpha} \\ [x] = n \end{cases} \rightarrow x - [x] = \alpha \quad 0 \leq \alpha < 1$$

؟؟ نکته: حاصل $x-[x]$ برابر جزء اعشاری عدد x است که همواره بین صفر و یک است:

ث) $g(x) = [x] + [-x]$ ، $D_g = [-3, 3)$

$[x]+[-x]$ دو مقدار بیشتر ندارد که اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد (مثلاً $x=3$) حاصل به صورت $[3]+[-3]=0$ می‌شود و اگر $x \notin \mathbb{Z}$ باشد (مثلاً $x=3.5$)، حاصل به صورت $\underbrace{[3.5]}_{3}+\underbrace{[-3.5]}_{-4}=-1$ خواهد شد، پس شکل کلی نمودار به صورت زیر است:



؟؟ نکته: از مثال فوق نتیجه می‌شود:

$$[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

* تابع یک به یک

① ← رابطه: یک رابطه که مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هاست، زمانی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتبی، مؤلفه‌ی دوم برابر نداشته باشند.

مثال: $f=\{(0,\underline{0})(1,\underline{1})(2,\underline{2})\}$ یک به یک است

$g=\{(1,\underline{0})(2,\underline{0})(3,\underline{0})\}$ یک به یک نیست

$h=\{(1,\underline{0})(2,-1)(3,4)(4,\underline{0})\}$ یک به یک نیست

?! نتیجه مهم: یک رابطه وقتی نمایش تابعی یک به یک است که نه مؤلفه‌های اول و نه مؤلفه‌های دوم برابر نباشند و اگر یکی برابر بود، دیگری نیز برابر باشد.

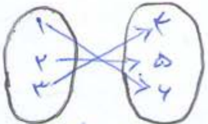
مثال: اگر $f=\{(-2,2)(m,3)(-1,3)(2m,a)\}$ یک تابع یک به یک باشد، m و a را بیابید.

شرط یک به یک بودن: $\begin{cases}(m,3)\\(-1,3)\end{cases} \longrightarrow m=-1$

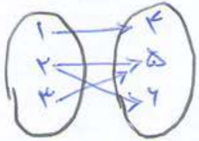
شرط تابع بودن: $\begin{cases}(-2,2)\\(-2,a)\end{cases} \longrightarrow a=2$

② ← نمودار ون: در نمودار ون، برای تابع بودن که از مجموعه ورودی (برای هر عضو) نباید بیش از یک فلش خارج شود و برای یک به یک بودن، به هر عضو مجموعه خروجی نباید بیش از یک فلش وارد شود.

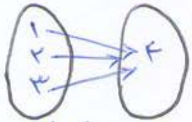
مثال: کدام یک نمودارهای زیر، یک تابع یک به یک را نمایش می‌دهد؟



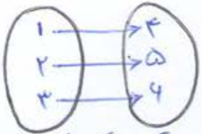
تابع و یک به یک



تابع نیست



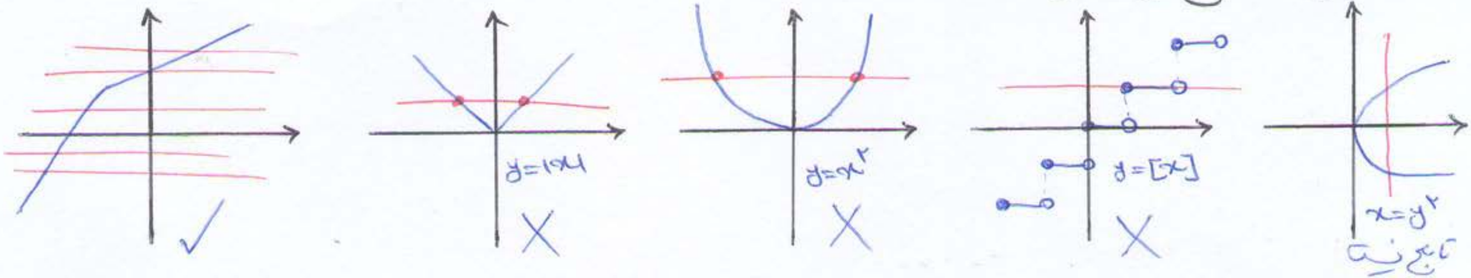
تابع غیر یک به یک



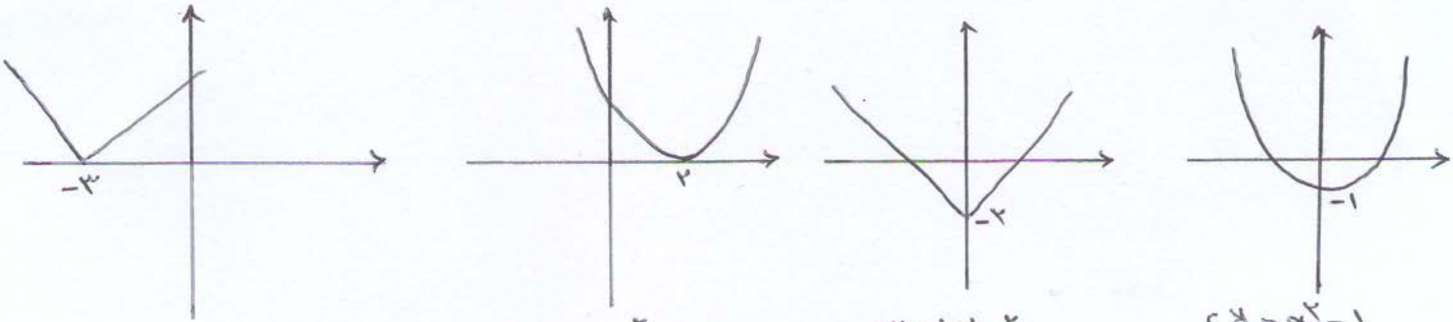
تابع و یک به یک

۳- شکل: یک تابع زمانی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



مثال: تابع های زیر یک به یک نیستند. با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.



$$\begin{cases} y = x^2-1 \\ D_y=[0,+\infty) \end{cases}$$
یا $(-\infty,0]$

$$\begin{cases} y = |x|-2 \\ D_y=[0,+\infty) \end{cases}$$
یا $(-\infty,0]$

$$\begin{cases} y = (x-2)^2 \\ D_y=[2,+\infty) \end{cases}$$
یا $(-\infty,2]$

$$\begin{cases} y = |x+3| \\ D_y=[-3,+\infty) \end{cases}$$
یا $(-\infty,-3]$

۴- ضابطه: برای بررسی یک به یک بودن یک تابع به کمک ضابطه، باید از تساوی $f(x_1)=f(x_2)$ به تساوی $x_1=x_2$ برسیم:

مثال: $f(x)=5x+3$

$$\begin{cases} f(x_1)=5x_1+3 \\ f(x_2)=5x_2+3 \end{cases} \xrightarrow{f(x_1)=f(x_2)} 5x_1+\cancel{3}=5x_2+\cancel{3} \to \cancel{5}x_1=\cancel{5}x_2 \to x_1=x_2 \quad \checkmark$$

$g(x)=x^2$

$$\begin{cases} g(x_1)=x_1^2 \\ g(x_2)=x_2^2 \end{cases} \longrightarrow x_1^2=x_2^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} x_1=\pm x_2 \quad \times$$

؟؟ نکته: برای رد یک به یک بودن یک تابع، کافی است از مثال نقض استفاده کنیم، یعنی به y عددی بدهیم به طوری که دو مقدار x به ما دهد.

مثال: $y=x^2 \xrightarrow{y=1} 1=x^2 \to x=\pm 1$ یک به یک نیست

$y=|x| \xrightarrow{y=2} 2=|x| \to x=\pm 2$ " "

؟؟ نکته: توابع دارای x^2، $|x|$ و $[x]$، معمولاً یک به یک نیستند.

* وارون یک تابع

✓ اگر تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها باشد، با جابجا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب‌های تابع، مجموعه جدیدی از زوج مرتب‌ها به دست می‌آید که به آن وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم: $f^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$

مثال: $f=\{(1,2)(3,4)(5,6)\} \to f^{-1}=\{(2,1)(4,3)(6,5)\}$

تذکر ۱: وارون یک تابع، می‌تواند تابع باشد یا نباشد.

تذکر ۲: f^{-1} را نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفت. (بعداً با $\frac{1}{f}$ آشنا خواهیم شد)

مثال: وارون هر یک از تابع‌های زیر را به دست آورید و بنویسید کدام وارون، خود یک تابع است.

الف) $f=\{(0,-1)(1,2)(3,5)\} \to f^{-1}=\{(\underline{-1},0)(\underline{2},1)(\underline{5},3)\}$ تابع است

ب) $g=\{(1,2)(3,2)(4,5)\} \to g^{-1}=\{(\underline{\underline{2}},1)(\underline{\underline{2}},3)(5,4)\}$ تابع نیست

* تابع وارون (معکوس).

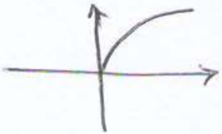
✓ اگر وارون تابعی مانند f، خود نیز یک تابع باشد، آن را «تابع وارون f» می‌نامیم. در این صورت f را وارون‌پذیر (معکوس پذیر) می‌نامیم.

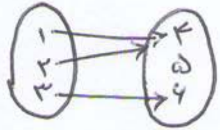
??? نکته مهم: یک تابع در صورتی معکوس پذیر است که یک به یک باشد.

مثال: کدام یک از موارد زیر تابعی معکوس‌پذیر است؟

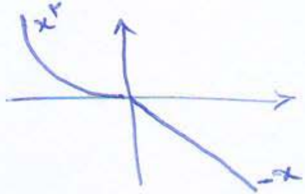
الف) $f=\{(2,\underline{-1}),(3,\underline{4}),(0,\underline{5})\}$ — یک به یک و معکوس پذیر

ب) $f(x)=x^3+1 \rightarrow$  یک به یک و معکوس پذیر

پ)  یک به یک و معکوس پذیر

ت)  نه یک به یک پس معکوس ناپذیر

ث) $y=\begin{cases}-x & x>0\\ x^2 & x\leq 0\end{cases}$



یک به یک و معکوس پذیر

مثال (تست): تابع با ضابطه $f(x)=|x-1|-|x+2|$ روی کدام بازه زیر وارون پذیر است؟

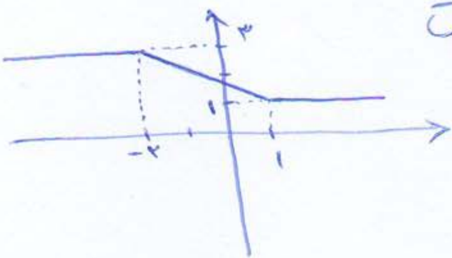
۱) $(-2,-1)$

۲) $\mathbb{R}$

۳) $\mathbb{R}-[-2,1)$

۴) $[-2,1]$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 1\\ -2x-1 & -2<x<1\\ 3 & x\leq -2\end{cases}$$

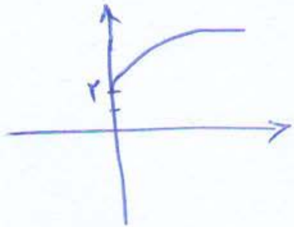


تابع در بازه $[-2,1]$ یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است

؟؟ نکته مهم: دامنه و برد تابع f^{-1}، به ترتیب برابر برد و دامنه تابع f است:

$$\begin{cases} D_{f^{-1}} = R_f \\ R_{f^{-1}} = D_f \end{cases}$$

مثال: دامنه و برد تابع معکوس تابع $f(x)=۲+\sqrt{x}$ را بیابید.



$$\begin{cases} D_f=[0,+\infty)=R_{f^{-1}} \\ R_f=[2,+\infty)=D_{f^{-1}} \end{cases}$$

؟؟ نکته: اگر $f(a)=b$ $((a,b)\in f)$ باشد، آنگاه $f^{-1}(b)=a$ $((b,a)\in f^{-1})$ است و برعکس.

مثال: اگر در تابع $f(x)=ax+\sqrt{x+1}$، $f^{-1}(8)=3$ باشد، مقدار $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟
(تست)

$$f^{-1}(8)=3 \to f(3)=8 \to 3a+\sqrt{3+1}=8 \to 3a+2=8 \to a=2$$

$$\Rightarrow f(x)=2x+\sqrt{x+1} \to f(-\tfrac{3}{4})=2(-\tfrac{3}{4})+\sqrt{-\tfrac{3}{4}+1}=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}=-1$$

۱) $\frac{3}{2}$

۲) 1

۳) -1 ✓

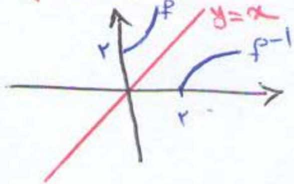
۴) $-\frac{3}{2}$

* تعیین وارون یک تابع

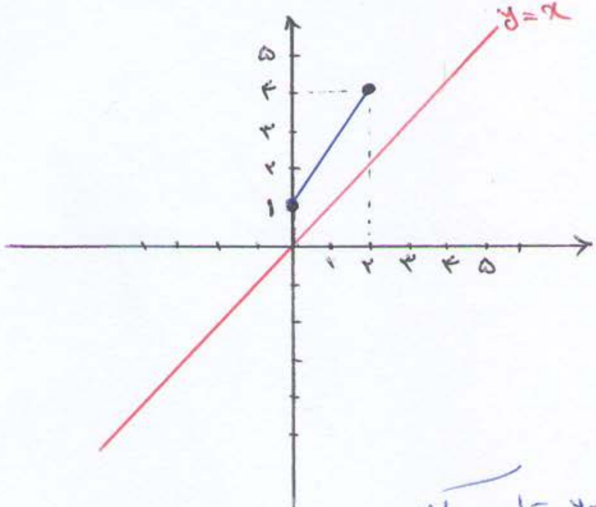
① روش رابطه: گفتیم که برای تعیین وارون یک رابطه، کافی است مؤلفه های تمام زوج مرتب ها را جابجا کنیم.

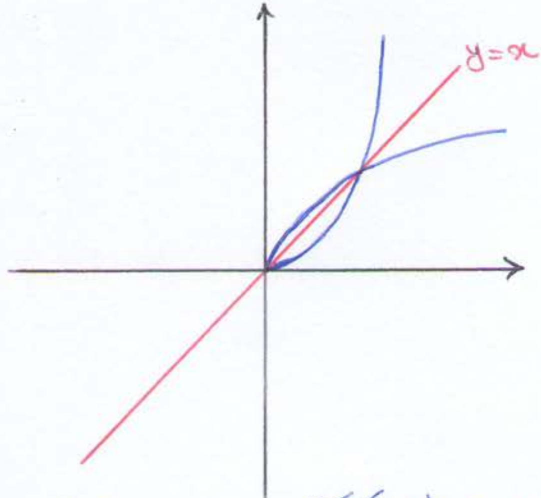
② روش شکل: اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) به دست آوریم. (نتیجه: f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه یکدیگرند)

مثال:



مثال: وارون توابع زیر را رسم کنید.





؟ نکته: f و f^{-1} یکدیگر را (درصورت تقاطع) روی خط $y=x$ قطع می کنند.

۴) ضابطه: برای به دست آوردن ضابطه f^{-1} ، در معادله $y=f(x)$ ، ابتدا جای x و y را عوض می‌کنیم و سپس y جدید را بر حسب x به دست می‌آوریم. ضابطه جدید به دست آمده، ضابطه f^{-1} است.

مثال: $y=2x+1 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=2y+1 \to x-1=2y \xrightarrow{\div 2} y=\frac{x-1}{2}=f^{-1}(x)$

مثال: وارون توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=4x \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=4y \xrightarrow{\div 4} y=\frac{1}{4}x=f^{-1}(x)$

ب) $y=\sqrt{x-2} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=\sqrt{y-2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2=y-2 \to y=x^2+2=f^{-1}(x)$ و $x\geq 0$

پ) $y=\frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=\frac{2y+1}{y-1} \to xy-x=2y+1 \to xy-2y=x+1 \to y(x-2)=x+1 \to y=\frac{x+1}{x-2}=f^{-1}(x)$

ت) $y=\sqrt[3]{x}+1 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x=\sqrt[3]{y}+1 \to x-1=\sqrt[3]{y} \xrightarrow{\text{توان ۳}} (x-1)^3= \quad y=f^{-1}(x)$

مثال: الف) نمودار تابع $f(x)=x^2-2x+3$ را رسم کنید و دامنه و برد تابع را بیابید.

ب) دامنه تابع را طوری تغییر دهید که تابع یک به یک شود و سپس وارون تابع را بیابید و دامنه و برد آن را به دست آورید.

پ) نمودار وارون را نیز رسم کنید.

الف) $f(x)=(x-1)^2+2$

$D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=[2,+\infty)$

ب) $D_f=[1,+\infty) \to x=(y-1)^2+2 \to x-2=(y-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{x-2}=y-1$

$\to y=\sqrt{x-2}+1=f^{-1}(x)$

$\begin{cases} D_{f^{-1}}=[2,+\infty) \\ R_{f^{-1}}=[1,+\infty) \end{cases}$

* اعمال جبری روی توابع

اگر f و g دو تابع با دامنه های D_f و D_g باشند، در این صورت داریم:

(۱) جمع: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ و $D_{f+g}=D_f\cap D_g$

(۲) تفریق: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ و $D_{f-g}=D_f\cap D_g$

(۳) ضرب: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ و $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$

(۴) تقسیم: $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ و $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$

مثال: اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x-2$ باشند، آن گاه مجموع، تفاضل، حاصلضرب و تقسیم $(\frac{f}{g})$ آنها را به دست آورید و دامنه هر یک را مشخص کنید.

$D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x-1)+(x-2)=3x-3$, $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x-1)-(x-2)=x+1$, $D_{f-g}=$ " = "

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(2x-1)(x-2)=2x^2-5x+2$, $D_{f\cdot g}=$ " = "

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x-1}{x-2}$, $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|\underbrace{g(x)=0}_{\substack{x-2=0\\ x=2}}\}=\mathbb{R}-\{2\}$

مثال: اگر $f(x)=x+2$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ باشد،

الف) D_f و D_g را حساب کنید.

$D_f=\mathbb{R}$ ، $D_g = x-1 \geq 0 \to x \geq 1 = [1,+\infty)$

ب) حاصل $(f \cdot g)(5)$ و $(\frac{f}{g})(10)$ را بیابید.

$$(f\cdot g)(5)=\underbrace{f(5)}_{5+2}\cdot\underbrace{g(5)}_{\sqrt{5-1}}=7\times 2=14$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(10)=\frac{f(10)}{g(10)}=\frac{10+2}{\sqrt{10-1}}=\frac{12}{3}=4$$

مثال: اگر $f=\{(1,2)(-2,5)(0,7)\}$ و $g=\{(1,5)(2,4)(0,-1)\}$ باشد،

الف) D_f و D_g را حساب کنید.

$$\left.\begin{array}{l} D_f=\{1,-2,0\} \\ D_g=\{1,2,0\} \end{array}\right\} \to D_f \cap D_g=\{1,0\}$$

ب) $f+g$ ، $f-g$ و $f \cdot g$ را تشکیل دهید.

$f+g=\{(1,7)(0,6)\}$

$f-g=\{(1,-3)(0,8)\}$

$f\cdot g=\{(1,10)(0,-7)\}$

پ) f^2 ، $\frac{1}{f}$ و $3f$ را تشکیل دهید.

$f^2=f\cdot f=\{(1,4)(-2,25)(0,49)\}$

$\frac{1}{f}=\{(1,\frac{1}{2})(-2,\frac{1}{5})(0,\frac{1}{7})\}$

$3f=\{(1,6)(-2,15)(0,21)\}$

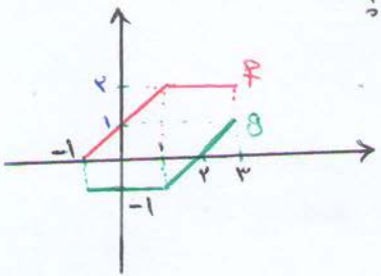
نکته: f^2 همان $f\cdot f$ است. برای تشکیل $\frac{1}{f}$ و $3f$ مقادیر بُرد تابع (مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها) را معکوس و سه برابر می‌کنیم. همچنین، دامنه f^2 و $3f$ همان D_f است، اما دامنه $\frac{1}{f}$ مقادیر D_f منهای صفرهای دامنه f است.

مثال: اگر $f=\{(1,1),(0,2),(-1,1),(2,-1)\}$ و $g=\{(1,0),(0,-1),(-1,2),(2,-1)\}$ باشد، مقدار $(f+g)(1)+(f-g)(0)$ کدام است؟ (تست)

$\underbrace{f(1)}_{1}+\underbrace{g(1)}_{0}+\underbrace{f(0)}_{2}-\underbrace{g(0)}_{-1}=4$

۱) ۱- ۲) ۱
۳) ۴ ✓ ۴) ۴-

مثال: اگر نمودار توابع f و g به صورت مقابل باشد، مقدار $(2f-3g)(1)$ کدام است؟ (تست)



$2\underbrace{f(1)}_{2}-3\underbrace{g(1)}_{-1}=4+3=7$

۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ و $g=\{(0,0),(2,0),(1,-1),(3,3),(5,4)\}$ باشد، تابع $\frac{g}{f}$ دارای چند زوج مرتب است؟ (تست)

$D_f=4-x^2\geq 0 \to x^2\leq 4 \xrightarrow{\sqrt{}} |x|\leq 2 \to -2\leq x\leq 2$

$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x\mid f(x)=0\}=\underbrace{[-2,2]\cap\{0,2,1,3,5\}}_{\{0,1,2\}}-\{x\mid \underbrace{\sqrt{4-x^2}=0}\}=\{0,1,2\}-\{\pm 2\}=\{0,1\}$

$4-x^2=0$
$x^2=4$
$x=\pm 2$

۱) ۱
۲) ۲ ✓
۳) ۳
۴) ۴

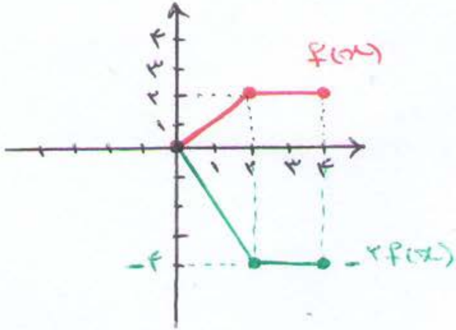
مثال: اگر $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ و $g=\{(1,4),(2,6),(3,0)\}$ باشد، آنگاه تابع $\frac{2f}{g}$ کدام است؟ (تست)

$2f=\{(1,4),(2,6),(3,8)\}$

$\frac{2f}{g}=\{(1,\frac{4}{4}),(2,\frac{6}{6}),\underbrace{(3,\frac{8}{0})}_{\text{غ م}}\}=\{(1,1),(2,1)\}$

۱) $\{(1,-1),(2,1)\}$
۲) $\{(1,1),(2,1)\}$ ✓
۳) $\{(1,1),(3,4)\}$
۴) $\varnothing$

مثال : در شکل مقابل ، با توجه به نمودار تابع f ، نمودار تابع $y=-2f(x)$ را رسم کنید .

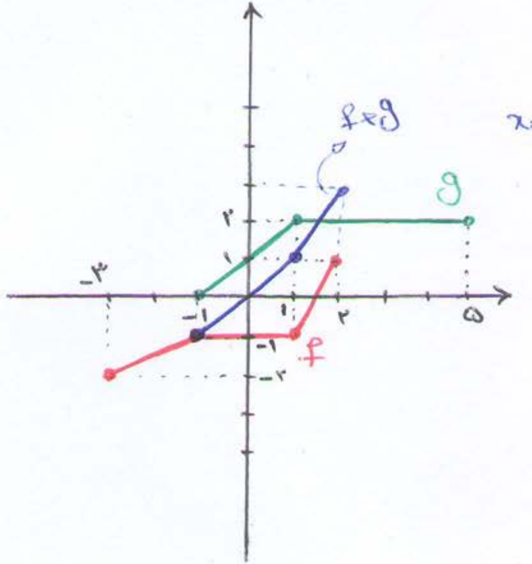


$(0,0)\xrightarrow{\times(-2)}(0,0)$

$(2,2)\xrightarrow{\times(-2)}(2,-4)$

$(4,2)\xrightarrow{\times(-2)}(4,-4)$

مثال : نمودارهای توابع f و g داده شده است . نمودار $f+g$ را رسم کنید .



$D_f \cap D_g=[-1,2]$

$x=-1: f(-1)+g(-1)=0+(-1)=-1$

$x=1: f(1)+g(1)=2+(-1)=1$

$x=2: f(2)+g(2)=2+1=3$

★ ترکیب توابع

✓ ترکیب دو تابع f و g یا همان fog تابعی است که به x، $f(g(x))$ را نسبت می‌دهد: $fog: x \longrightarrow f(g(x))$

این تابع ابتدا x را توسط g به $g(x)$ و سپس $g(x)$ را توسط f به $f(g(x))$ می‌برد. (البته به شرطی که $g(x)$ در دامنه f باشد)

تذکر: تابع $gof(x)=g(f(x))$ نیز به طور مشابه با قرار دادن $f(x)$ به جای x در ضابطه $g(x)$ به دست می‌آید.

مثال: اگر $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=2x+3$ باشد، fog و gof را تشکیل دهید. آیا تساوی $fog(x)=gof(x)$ برقرار است؟

$$fog(x)=f(g(x))=(g(x))^2+1=(2x+3)^2+1$$

$$gof(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=2(x^2+1)+3$$

$$\longrightarrow fog(x) \neq gof(x)$$

؟؟ **نکته:** در حالت کلی، $gof(x)$ یا $fog(x)$ برابر نیست.

مثال: اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ باشد، ضابطه $fog(x)$ کدام است؟
(تست)

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)-1}=\frac{\frac{x-1}{x+1}+1}{\frac{x-1}{x+1}-1}=\frac{\frac{x-1+x+1}{x+1}}{\frac{x-1-x-1}{x+1}}=\frac{2x}{-2}=-x$$

۱) x ۲) $-x$ ✓

۳) 1 ۴) -1

مثال: اگر به ازای ورودی ۳، خروجی ماشین مقابل برابر $\frac{1}{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟
(تست)

ورودی $\to \boxed{x-a} \to \boxed{\frac{1+\sqrt{x}}{2a+2x}} \to$ خروجی

۱) 1

۲) -1 ✓

۳) -2

۴) 2

$$x=3 \to 3-a \to \frac{1+\sqrt{3-a}}{2a+2(3-a)} \Rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1+\sqrt{3-a}}{\cancel{2a}+6-\cancel{2a}}=\frac{1}{2} \to 1+\sqrt{3-a}=6\times\frac{1}{2}=3$$

$$\to \sqrt{3-a}=3-1=2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3-a=4 \to a=3-4=-1$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{x}{2}+1$ و $g(x)=2-x$ باشد و داشته باشیم $fof(a)=gog(a)$، مقدار a را بیابید.

$$fof(a)=f(f(a))=f\left(\frac{a}{2}+1\right)=\frac{\frac{a}{2}+1}{2}+1=\frac{\frac{a}{2}+1+2}{2}=\frac{\frac{a}{2}+3}{2}=\frac{a+6}{4}$$

$$gog(a)=g(g(a))=g(2-a)=2-(2-a)=a$$

$$\Rightarrow \frac{a+6}{4}=a \to a+6=4a \to 3a=6 \to a=2$$

مثال: در تابع $f(x)=\frac{3x-2}{5}$ ، موارد زیر را محاسبه کنید:

الف) $f^{-1}(x) \to x=\frac{3y-2}{5} \to 5x=3y-2 \to 3y=5x+2 \to y=\frac{5x+2}{3}=f^{-1}(x)$

ب) $f\circ f^{-1}(x)=f(f^{-1}(x))=\frac{3f^{-1}(x)-2}{5}=\frac{\cancel{3}\times\frac{5x+2}{\cancel{3}}-2}{5}=\frac{5x+\cancel{2}-\cancel{2}}{5}=\frac{5x}{5}=x$

پ) $f^{-1}\circ f(x)=f^{-1}(f(x))=\frac{5f(x)+2}{3}=\frac{\cancel{5}\times\frac{3x-2}{\cancel{5}}+2}{3}=\frac{3x-\cancel{2}+\cancel{2}}{3}=\frac{3x}{3}=x$

نکته:
$$\boxed{f\circ f^{-1}(x)=f^{-1}\circ f(x)=x}$$

مثال: اگر $f=\{(-2,3)(-1,2)(0,-1)\}$ و $g=\{(4,-1)(-3,0)(-1,2)\}$ باشند، حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $f(\underbrace{g(4)}_{-1})=f(-1)=2$

ب) $g(\underbrace{f(0)}_{-1})=g(-1)=2$

پ) $f(\underbrace{g(-3)}_{0})=f(0)=-1$

ت) $f\circ g(x)=$

$$\begin{cases} g(4)=-1 \xrightarrow{f} f(g(4))=f(-1)=2 \\ g(-3)=0 \xrightarrow{f} f(g(-3))=f(0)=-1 \\ g(-1)=2 \xrightarrow{f} f(g(-1))=f(2) \text{ وجود ندارد } \times \end{cases} \Rightarrow f\circ g=\{(4,2)(-3,-1)\}$$

مثال: اگر $f=\{(۳,-۱)(-۲,۲)(۰,۳)(-۱,۴)\}$ و $g=\{(-۲,۰)(۳,-۱)(-۳,۱)\}$ باشند، fog و gof را بیابید.

$$g(-۲)=۰ \xrightarrow{f} f(g(-۲))=f(۰)=۳ \to (-۲,۳)$$
$$g(۳)=-۱ \xrightarrow{f} f(g(۳))=f(-۱)=۴ \to (۳,۴) \quad \Rightarrow fog=\{(-۲,۳)(۳,۴)\}$$
$$g(-۳)=۱ \xrightarrow{f} f(g(-۳))=f(۱)$$ وجود ندارد ✗

$$gof: f(۰)=۳ \to g(f(۰))=g(۳)=-۱ \to gof=\{(۰,-۱)\}$$

مثال: اگر $f(x)=\dfrac{۳x+۴}{x+۲}$ و $fog(x)=۳-\dfrac{۲}{x}$ آنگاه ضابطه $g(x)$ کدام است؟

(تست)

۱) $x+۲$

۲) $x-۲$ ✓

۳) $x+۳$

۴) $x-۳$

$$f(g(x))=\frac{۳g(x)+۴}{g(x)+۲}=\frac{۳x-۲}{x} \to \cancel{۳xg(x)}+۴x=\cancel{۳xg(x)}+۶x-۲g(x)-۴$$
$$\to ۴x-۶x+۴=-۲g(x) \to -۲x+۴=-۲g(x)$$
$$g(x)=x-۲$$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+۴} & x>۳ \\ ۲x+۳ & x\leq ۳ \end{cases}$ ، مقدار $fof(۱)+fof(۵)$ کدام است؟

(تست)

۱) ۶   ۲) ۷

۳) ۸   ۴) ۹ ✓

$$f(۱)=۲(۱)+۳=۵ \to fof(۱)=f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲$$
$$f(۵)=۲ \to fof(۵)=f(۲)=۲(۲)+۳=۷$$
$$\Rightarrow ۲+۷=۹$$

— دامنه fog و gof :

$$\begin{cases} D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \\ D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \end{cases}$$

مثال: اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، D_{fog} و D_{gof} را به دست آورید.

$D_f=\mathbb{R}$ ، $D_g=[0,+\infty)$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[0,+\infty) \mid \underbrace{\sqrt{x}\in\mathbb{R}}_{\to x\in[0,+\infty)}\} \to D_{fog}=[0,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{x^2\in[0,+\infty)}_{x^2\geq 0 \;\to x\in\mathbb{R}}\}=\mathbb{R}$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x}$ باشد، D_{gof} و ضابطه gof را بیابید.

$$D_f: x^2-4\geq 0 \to x^2\geq 4 \xrightarrow{\sqrt{}} |x|\geq 2 \to x\geq 2 \text{ یا } x\leq -2$$

$$D_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \mid \underbrace{\sqrt{x^2-4}\in\mathbb{R}-\{0\}}_{\sqrt{x^2-4}\neq 0 \;\to x\neq -2,2}\}=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$$