ریاضی الفبای زندگی است.

ریاضی (۲)

یازدهم تجربی

مصطفی حیدری طیب

فصل سوم : تابع   function

- ۱. برخی از انواع توابع
- ۲. وارون یک تابع و تابع یک به یک
- ۳. عملیات جبری روی توابع

درس اول : برخی از انواع توابع

تابع گویا - تابع رادیکالی - تابع جزء صحیح

تابع f از مجموعه A به مجموعه B قانونی است که هر عضو A را به یک عضو B می‌برد. یعنی هیچ عضوی از A را باقی نمی‌گذارد و ۲ عضو از B هم به آن نمی‌دهد.

تمام رسالت تابع این است که یک عدد را به عددی دیگر ببرد. پس می‌توان تابع را ماشینی در نظر گرفت که به آن عددی می‌دهیم و از آن یک عدد می‌گیریم.
ما x را وارد ماشین f می‌کنیم و از آن $f(x)$ می‌گیریم. $f(x)$ مقدار تابع به ازای ورودی x است.

$$x \xrightarrow{f} y$$

$$f(x) = y$$

y تابع x است.

ضابطه یک تابع، قانون تابع است (بصورت فرمول ریاضی است) که به تنهایی معرف تابع نیست بلکه باید دامنه نیز بشود.
چون در یک تابع دامنه آن است نه مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$.

منظور از مقادیر تابع همان اعضای برد تابع است.

تابع گویا

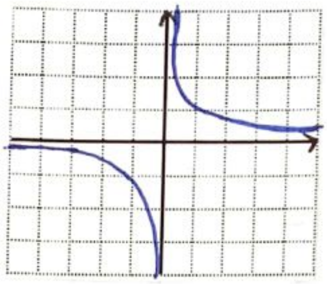
به هر تابعی که ضابطه‌اش را بتوان به صورت $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ نوشت بطوریکه $P(x)$ و $Q(x)$ دو تابع چندجمله‌ای باشند ($Q(x)\neq 0$) تابع گویا می‌گوئیم. مانند : $f(x)=\frac{x-1}{x^3-9x}$

- هر تابع چند جمله‌ای را می‌توان یک تابع گویا درنظر گرفت. توجه کنید که مخرج اینگونه توابع را می‌توان یک جمله‌ای $f(x)=1$ درنظر گرفت.

مثال. تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروض است. مقادیر $f(0)$ ، $f(2)$ ، $f(\sqrt{2})$ و $f(1)$ را محاسبه کنید.

$f(0)=\frac{0}{0-1}=0$ $\quad$ $f(2)=\frac{2}{2-1}=2$ $\quad$ $f(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ $\quad$ $f(1)=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}$ مقدار ندارد

تذکر. ساده‌ترین تابع گویا به صورت $f(x)=\frac{1}{x}$ است که دامنه آن $\mathbb{R}-\{0\}$ و نمایش آن به صورت زیر است:



✓ دامنه توابع گویا:

اگر مخرج یک کسر برابر صفر باشد، آنگاه آن کسر تعریف نشده است بنابراین برای محاسبه دامنه توابع گویا ابتدا باید ریشه‌های مخرج را پیدا کنیم و سپس آن‌ها را از مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ خارج (Delete) کنیم.

دامنه توابع گویا $=\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$

مثال. اگر $f(x)=\frac{x-1}{x^3-9x}$ مطلوب است محاسبه D_f .

$$\text{مخرج}=0 \Rightarrow x^3-9x=0$$
$$\Rightarrow x(x^2-9)=0 \Rightarrow x(x-3)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=+3 \\ x=-3 \end{cases}$$
$$D_f=\mathbb{R}-\{0,+3,-3\}$$

تذکر. (مهم اما واقعی!) برای محاسبه دامنه توابع گویا اجازه ساده کردن ضابطه تابع را نداریم. به عبارتی از نسخه ساده شده تابع استفاده نکنید.

مثال $f(x)=\frac{x}{x}$

- قبل از ساده کردن $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$
- بعد از ساده کردن $f(x)=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$ ☺ $\Rightarrow f(x)=1$ تابع ثابت $\Rightarrow D_f=\mathbb{R}$ ✕

تمرین. دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$f(x)=\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-5x+6}$ $\qquad$ $g(x)=\frac{x+5}{x^2+1}$ $\qquad$ $h(x)=\frac{x+5}{x^2-1}$

✓ تساوی دو تابع :

دو تابع f و g را مساوی گوئیم و می‌نویسیم $f=g$ هرگاه

۱. دامنه هر دو تابع برابر باشد $D_f = D_g$

۲. برای هر x از این دامنه، مقادیر دو تابع یکسان باشند. $f(x)=g(x)$

← اگر $f=g$ باشد، آنگاه نمودارهای آن‌ها بر هم منطبق‌اند.

← دو تابع مساوی ظاهری متفاوت دارند اما با ساده کردن یکی می‌توان به ضابطه دیگر رسید.

مثال. آیا دو تابع $f(x)=1$ و $g(x)=\frac{x}{x}$ با هم برابرند؟

خیر زیرا $D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

$D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = \mathbb{R}-\{0\}$

مثال. آیا توابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+1}$ با هم برابرند؟

$D_f: \quad x+1=0 \rightarrow x=-1 \qquad D_f = \mathbb{R}-\{-1\}$

$D_g: \quad x^2+2x+1=0 \rightarrow (x+1)^2=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow D_g = \mathbb{R}-\{-1\}$

$x^2+2x+1 = (x+1)^2$

$\Rightarrow f=g$

مثال. دو تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ a & x=1 \end{cases}$ و $g(x)=x+1$ با هم برابرند. مقدار a را به دست آورید.

$D_f = D_g$

باید $f(1)=g(1) \Rightarrow a=(1)+1 \Rightarrow \boxed{a=2}$

تمرین. آیا دو تابع زیر با هم برابرند؟ چرا؟

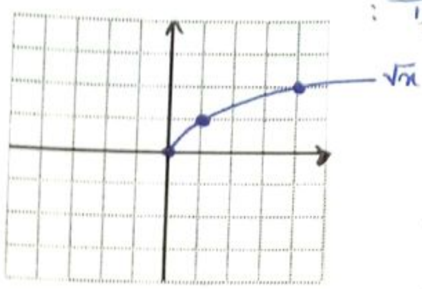
$f(x)=x-2 \qquad g(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$

تمرین. آیا توابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-2x+1}{x-1} & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$ و $g(x)=x+1$ با هم برابرند؟ چرا؟ (دلیل کافی بیاورید!)

تابع رادیکالی

تابعی که متغیر آن زیر رادیکال باشد را تابع رادیکالی می‌گوییم. مثل $f(x)=\sqrt{x-1}$

- ساده‌ترین تابع رادیکالی $f(x)=\sqrt{x}$ است که نمودارش به صورت زیر است:



x	۰	۱	۲	۳	۴	...
y	۰	۱	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	۲	...
			۱٫۴	۱٫۷		

دامنه $D_{\sqrt{x}}=[0,+\infty)$ اعداد نامنفی

برد $R_{\sqrt{x}}=[0,+\infty)$ 〃 〃

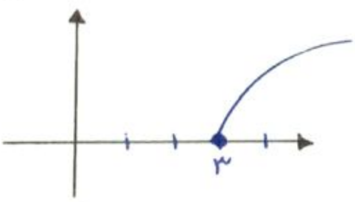
تذکر. با درنظرگرفتن نمودار $f(x)=\sqrt{x}$

به عنوان راهنما و به کمک انتقال (قطاری ـ آسانسوری) می‌توان نمودار برخی از توابع رادیکالی را رسم کرد و به کمک آن دامنه و برد را مشخص نمود. (سایه نمودار روی xها ← دامنه ، سایه نمودار روی yها ← برد)

دامنه توابع رادیکالی : عبارت زیر رادیکال ≥ 0

مثال. به کمک انتقال تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار هر تابع را رسم کرده و دامنه و برد آن را به دست آورید.

$y=\sqrt{x-3}$

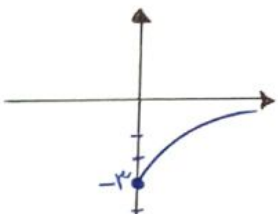


۳ واحد سمت راست

$D=[3,+\infty)$

$R=[0,+\infty)$

$y=\sqrt{x}-3$

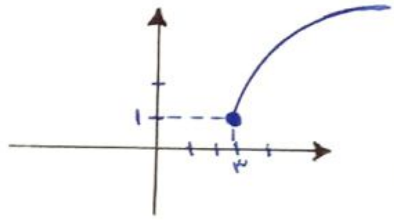


۳ واحد پایین

$D=[0,+\infty)$

$R=[-3,+\infty)$

$y=1+\sqrt{x-3}$



۳ واحد راست، ۱ واحد بالا

$D=[3,+\infty)$

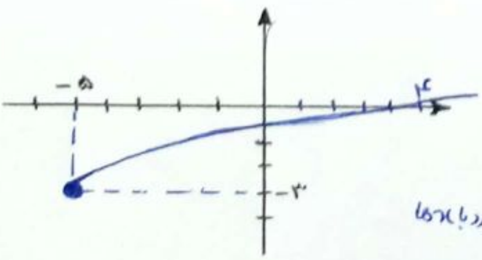
$R=[1,+\infty)$

مثال. تابع f با ضابطه $f(x)=-3+\sqrt{x+5}$ مفروض است.

الف) مقدار $f(4)$ را به دست آورید. ب) نمودار f را رسم کنید.

ج) دامنه و برد تابع را مشخص نمایید. د) نمودار f، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

$f(4)=-3+\sqrt{4+5}=-3+3=0$



$D=[-5,+\infty)$

$R=[-3,+\infty)$

محل برخورد با xها $f(x)=0 \rightarrow -3+\sqrt{x+5}=0 \Rightarrow \sqrt{x+5}=3 \Rightarrow x+5=9$

$x=4$

تمرین. نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x-2}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص نمایید.

تمرین. آیا توابع $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ و $g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-1}$ با هم مساوی اند؟

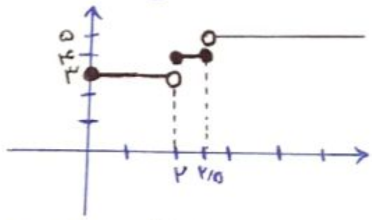
- راهنمایی: دامنه هر تابع را به کمک جدول تعیین علامت به دست آورید.

تابع جزصحیح

تابع پله‌ای: توابع پله‌ای، توابعی هستند که مقدار آن‌ها در هر زیرمجموعه‌ای از دامنه تابع، عددی ثابت است. مثل: تابع هزینه پارکینگ‌ها

زمان	هزینه
از هنگام ورود تا کمتر از ۲ ساعت	۳۰۰۰
از ۲ ساعت تا ۲/۵ ساعت	۴۰۰۰
بیشتر از ۲/۵ ساعت	۵۰۰۰

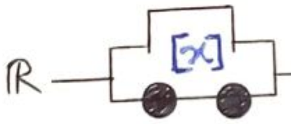
$$\to f(x)=\begin{cases} 3 & 0\leq x<2 \\ 4 & 2\leq x\leq 2/5 \\ 5 & x>2/5 \end{cases}$$



- معروف‌ترین تابع پله‌ای، تابع جزصحیح است.
- هر عدد حقیقی از دو جزء تشکیل شده است: جزصحیح - جزاعشاری

✓ تابع جزصحیح:

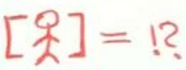
تابع جزصحیح کارش صحیح سازی است، هر عددی که وارد تابع شود جزصحیح آن عدد را بیرون می‌دهد و جزء اعشاری را از بین می‌برد.
بنابراین دامنه این ماشین تمام اعداد حقیقی و برد آن اعداد صحیح است:



$\mathbb{Z}=\{0, \pm1, \pm2, \dots\}$

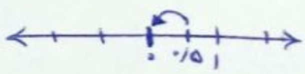
تابع جزصحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، اولین عدد صحیح سمت چپ را نسبت می‌دهد. ضابطه این تابع را به صورت $f(x)=[x]$ نشان می‌دهیم.

از ناخالصی‌های زندگیت جزصحیح بگیر!

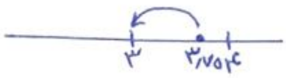


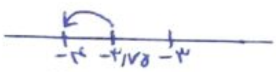
مثال. حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$[+3]=3$ $[-3]=-3$ $[0]=0$ $[1399]=1399$ $[\sin 30^\circ]=[0/5]=0$



$[۳/۷۵] = ۳$ $\qquad$ $[-۳/۷۵] = -۴$ $\qquad$ $[-\pi] = [-۳/۱۴] = -۴$





$[\sqrt{۲}] = [۱/\ ] = ۱$ $\qquad$ $[\sin ۹۰^\circ] = [۱] = ۱$ $\qquad$ $[-\sqrt{۳۱}] = [-۵/۵۶] = -۶$

✓ راه کوتاه:

جزصحیح در اعداد مثبت ، اعشار را از بین می برد و در اعداد منفی علاوه بر از بین بردن اعشار ، یک واحد هم کم می کند.

$[۱/۷] = ۱$ $\qquad$ $[-۱/۷] = -۲$

مثال. حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$A = \left[\frac{۴۹}{۲۷}\right] \quad \rightarrow \quad A = [۱/۸] = ۱$

$B = \left[-\frac{۴}{۵}\right] \quad \rightarrow \quad B = [-۰/۸] = -۱$

$C = \left[(۲-\sqrt{۲})^۲\right] \quad \rightarrow \quad C = [۰/۳۴] = ۰$

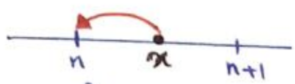
مثال. اگر $f(x) = [-x] + [x]$ حاصل $f(۱)$ و $f(۱/۲)$ را به دست آورید.

$f(۱) = [-۱] + [۱] = -۱ + ۱ = ۰$

$f(۱/۲) = [-۱/۲] + [۱/۲] = (-۲) + (+۱) = -۱$

✓ ویژگی های جزصحیح:

۱. $n \leq x < n+1 \iff [x] = n$



۲. $[x \pm n] = [x] \pm n$ $\qquad$ اگر n عددی صحیح باشد $(n \in \mathbb{Z})$

اگر داخل [ ] ، عددی صحیح بصورت + یا − بود می توان آن را از [ ] خارج کرد.

مثال: $[x+1] = [x] + 1$ $\qquad$ $[x + \frac{۱}{۲}] \neq [x] + \frac{۱}{۲}$

۳. $$[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in \mathbb{Z} \\ -۱ & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۴. $۰ \leq x - [x] < ۱$

مثال. مجموعه جواب $[x]=۲$ را به‌صورت بازه بنویسید.

$$[x]=n \iff n\leqslant x<n+1$$

$$[x]=۲ \iff ۲\leqslant x<۳$$

$$\Rightarrow \quad [۲,۳)$$

مثال. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$۲[x]+۵=۰$$

$$۲[x]=-۵$$

$$[x]=-\frac{۵}{۲}=-۲/۵ \ \#$$

جواب جزءصحیح هیچگاه عددی غیرصحیح نیست!

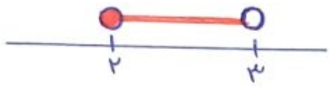
معادله ریشه ندارد.

$$[x+۱]=۳$$

$$[x+n]=[x]+n \Rightarrow [x]+۱=۳$$

$$[x]=۲$$

$۲\leqslant x<۳$ یا $[۲,۳)$

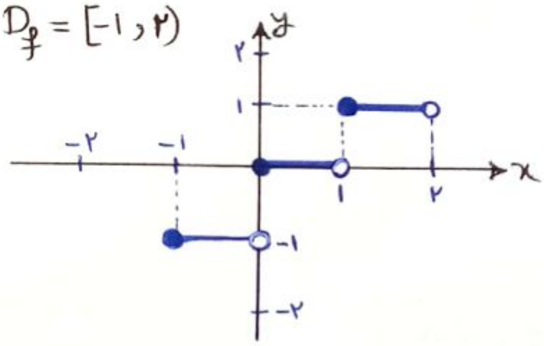


۷. رسم نمودار تابع جزءصحیح $f(x)=[x]$

برای رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ ابتدا باید به این نکته توجه کنیم که $[x]=n \iff n\leqslant x<n+1$ بنابراین باید جزءصحیح را حذف کرد و به جای آن n قرار داد تا معادله‌ای بدون عبارت جزءصحیح داشته باشیم، همچنین به کمک $n\leqslant x<n+1$ حدود x را مشخص می‌کنیم. توجه کنید که باید طول بازهٔ داده شده را به فاصله‌هایی به طول یک دسته‌بندی کنیم و تابع را به شکل یک تابع پله‌ای بنویسیم.

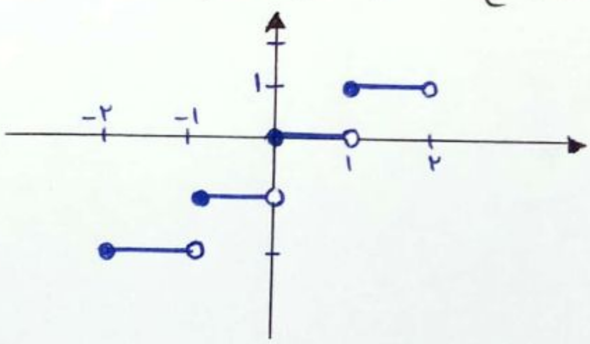
$$f(x)=[x] \qquad D_f=[-۱,۲)$$

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & -۱\leqslant x<۰ \\ ۰ & ۰\leqslant x<۱ \\ ۱ & ۱\leqslant x<۲ \end{cases}$$



مثال. نمودار تابع $f(x)=[x+۲]$ را در بازهٔ $[-۲,۲)$ رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۲ & -۲\leqslant x<-۱ \\ -۱ & -۱\leqslant x<۰ \\ ۰ & ۰\leqslant x<۱ \\ ۱ & ۱\leqslant x<۲ \end{cases}$$



تمرین . اگر $f(x)=x-[x]$ ، مقدار هر عبارت را به دست آورید.

$f(\pi)=$ $\qquad\qquad$ $f(2)=$

تمرین . جزء صحیح عدد $(2+\sqrt{3})^2$ را به دست آورید.

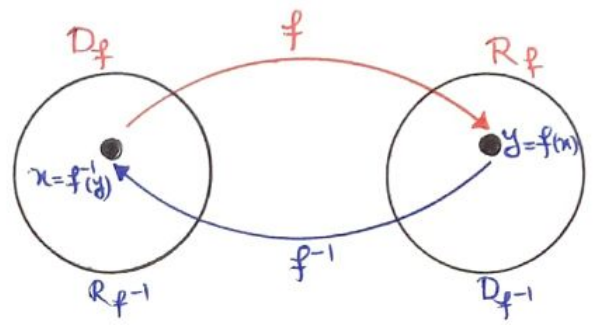
تمرین . مجموعه جواب معادله $[x-2]=2$ را به صورت بازه بنویسید.

تمرین . نمودار هر تابع را در بازه داده شده رسم کنید.

$y=[x]-1 \qquad D=[-1,+1)$

$y=[x+3] \qquad D=[-3,0)$

درس ۲ : وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک



اگر مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم یک رابطه جدید [نه یک تابع جدید!] به دست می‌آید که به آن وارون تابع f می‌گوییم و با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم. f-inverse

- اگر مؤلفه‌های (a,b) را جابه‌جا کنیم، (b,a) به دست می‌آید.
- توجه کنید که وارون هر تابع لزوماً یک تابع نیست به همین دلیل گفتیم یک رابطه جدید به دست می‌آید نه تابع جدید.

<u>مثال</u>. وارون هر تابع را مشخص کنید و بگویید کدام یک تابع است و کدام تابع نیست؟

$f=\{(1,-1),(2,0),(-1,1),(\sqrt{2},\sqrt{2})\}$

$f^{-1}=\{(-1,1),(0,2),(1,-1),(\sqrt{2},\sqrt{2})\}$ ✓

$g=\{(1,1),(0,0),(-2,-2),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$

"تابع همانی" $g^{-1}=\{(1,1),(0,0),(-2,-2),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$ ✓

$h=\{(1,2),(2,2),(5,2),(\sqrt{2},2)\}$

"تابع ثابت" $h^{-1}=\{(2,1),(2,2),(2,5),(2,\sqrt{2})\}$ ✗

$k=\{(-2,0),(4,1),(5,1)\}$

$k^{-1}=\{(0,-2),(1,4),(1,5)\}$ ✗

✓ رسم نمودار وارون یک تابع :

با توجه به اینکه برای محاسبه وارون یک تابع جای xها و yها را جابجا می‌کنیم درنتیجه اگر نمودار تابعی را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $y=x$) قرینه کنیم، نمودار وارون آن به دست می‌آید.

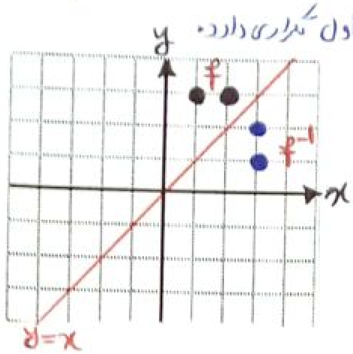
$$(a,b)\in f \iff (b,a)\in f^{-1}$$

مثال. اگر $f=\{(1,3),(2,3)\}$

الف) $f^{-1}=$؟ ب) آیا f^{-1} یک تابع است؟ ج) نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$f^{-1}=\{(3,1),(3,2)\}$

خیر f^{-1} تابع نیست زیرا مولفه اول تکراری دارد.



۷ تابع یک به یک (1-1) one to one function

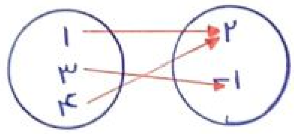
تابع f را که دارای مولفه‌های دوم تکراری نباشد، تابع یک به یک می‌نامیم.

- وارون یک تابع یک به یک خود نیز یک تابع است.

مثال. رابطه بین اثرانگشت و افراد یک تابع یک به یک است زیرا اثرانگشت برای هر فرد منحصر به فرد است (یکتاست). همچنین رابطه کدملی و افراد نیز یک تابع یک به یک می‌باشد.

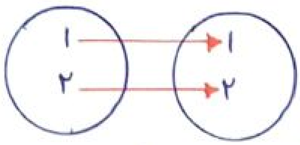
مثال. کدام یک از روابط زیر تابعی یک به یک است؟

$f=\{(1,2),(3,-1),(4,2)\}$



×

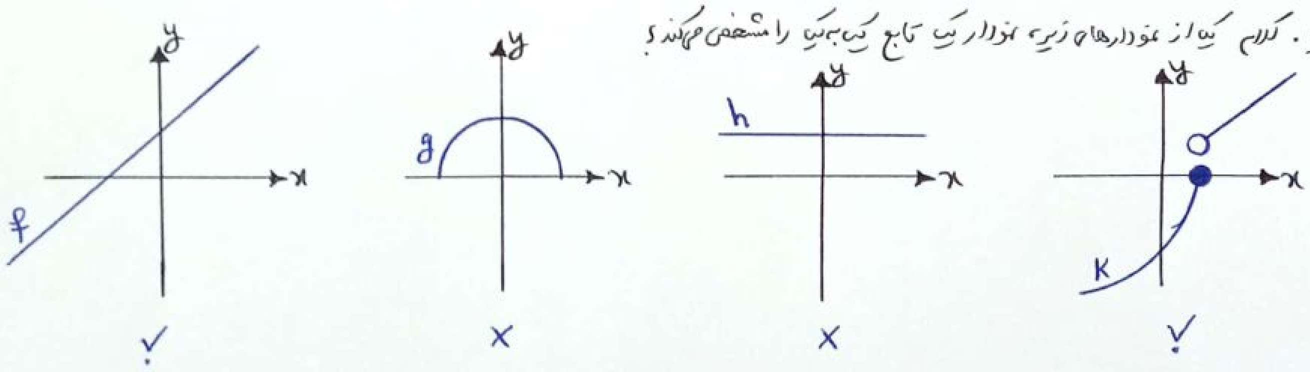
$g=\{(1,1),(2,2)\}$



✓

تذکر. از لحاظ نمودار هندسی درصورتی که یک تابع یک به یک باشد هر خط به موازات محور xها (خطوط افقی) حداکثر نمودار را در یک نقطه قطع می‌کند.

مثال. کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص می‌کند؟



تذکر:

۱. توابع یک به یک، مؤلفه اول و مؤلفه دوم تکراری ندارند.

۲. تمامی توابع خطی (غیر ثابت) یعنی $y=ax+b$ ، $a\neq 0$ یک به یک هستند. [توابع ثابت $f(x)=c$ یک به یک نیستند!]

۳. توابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ ، یک به یک نیستند زیرا خطهای افقی نمودارشان را در ۲ نقطه قطع می‌کنند. 

۴. توجه کنید که در یک به یک بودن یک تابع، دامنه نقش اساسی دارد.

۵. اگر تابعی وارون پذیر باشد، یک به یک است و برعکس. f^{-1} تابع است $\iff$ f (۱-۱) باشد

مثال: اگر تابع زیر یک به یک باشد، مقادیر a و b را بیابید.

$$f=\{(1,7),(a,8),(4,-1),(b,7),(6,8)\}$$

چون در تابع یک به یک مؤلفه اول تکراری نداریم پس زوج مرتب های (۱,۷) و (b,۷) باید باهم برابر باشند. هم چنین (۶,۸) و (a,۸) نیز باهم برابرند.

$$\Rightarrow a=6 \quad , \quad b=1$$

مثال: مقادیر a و b را طوری به دست آورید که تابع داده شده، تابعی یک به یک باشد.

$$f=\{(-1,2),(3,5),(-1,a^2-a),(a,a+3),(b+1,a+3)\}$$

$$a^2-a=2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow (a-2)(a+1)=0 \quad \begin{cases} a=2 \\ a=-1 \end{cases}$$

اگر $a=2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} f=\{(-1,2),(3,5),(-1,2),(2,5),(b+1,5)\}$

واضح است که اگر $a=2$ باشد f تابع نیست زیرا مؤلفه دوم تکراری دارد (در واقع با جایگذاری $a=2$، تابع را بازنویسی کردیم و دیدیم که $(2,5)\in f$ و $(3,5)\in f$ که به وضوح یک به یک بودن را زیر سؤال می‌برد)

اگر $a=-1 \longrightarrow f=\{(-1,2),(3,5),(-1,2),(-1,2),(b+1,2)\}$

$$\Rightarrow b+1=-1$$
$$\Rightarrow b=-2$$

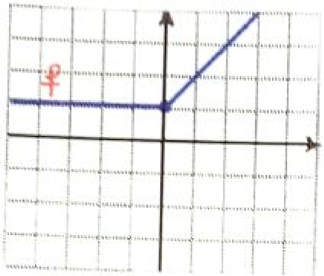
لذا $a=-1$ و $b=-2$ قابل قبول اند.

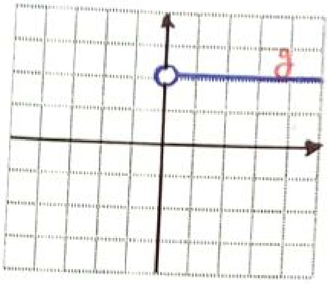
تمرین: اگر رابطه $f=\{(2,2a-1),(3b^2-4a,1),(2,a),(b\sqrt{2},5)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

تمرین . نمودار تابعی با دامنه $[-1,1]$ و برد $[1,4]$ رسم کنید بطوریکه :

- یک به یک باشد   - یک به یک نباشد

تمرین . در هر یک از شکل های زیر نمودار تابعی رسم شده است . نمودار وارون این توابع را رسم کنید.





$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

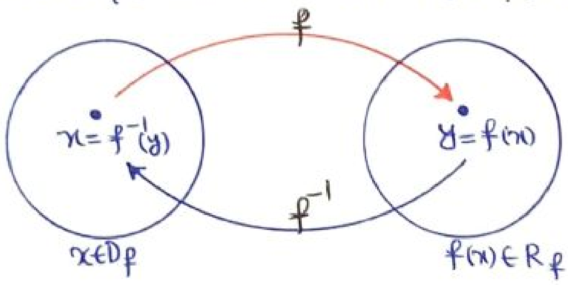
✓ محاسبه ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک :

گام اول . در ضابطه نوشته شده اگر $f(x)$ بود به جای آن از y استفاده می‌کنیم (می دانیم که $f(x)=y$)

گام دوم . درصورت امکان x را برحسب y می نویسیم (یعنی x را در سمت چپ تنها می‌کنیم ؛ بدون ضریب ، بدون مخرج و بدون توان)

- در واقع هدف تبدیل نمودن x به y است .

گام سوم . به جای y از نماد x و به جای x از نماد $f^{-1}(x)$ استفاده می‌کنیم . حاصل ، معکوس یا وارون f نامیده می‌شود.



$D_f = R_{f^{-1}}$ $D_{f^{-1}} = R_f$

مثال . ضابطه وارون تابع $f(x)=3x-2$ را بنویسید .

$$x \xrightarrow{\times 3} 3x \xrightarrow{-2} \overset{y}{3x-2}$$

$$\frac{x+2}{3} \xleftarrow{\div 3} x+2 \xleftarrow{+2} x$$

$$f(x)=3x-2 \Rightarrow y=3x-2$$

$$3x=y+2 \xRightarrow{\div 3} x=\frac{y+2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}}$$

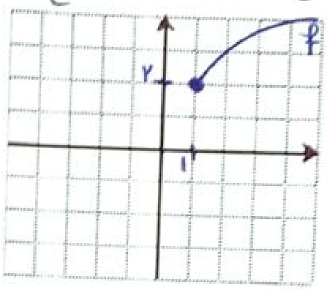
مثال. ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=-\frac{1}{3}x+2$ را بنویسید.

$$y=-\frac{1}{3}x+2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}x=-y+2 \quad \xrightarrow{\times 3} \quad x=-3y+6$$

$$f^{-1}(x)=-3x+6$$

مثال. تابع $f(x)=2+\sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید.

- با رسم نمودار f مشخص کنید یک به یک است یا خیر. - ضابطه تابع معکوس آن را بنویسید. - دامنه و برد تابع معکوس را مشخص کنید.



از روی نمودار واضح است که f تابعی یک به یک است زیرا خطهای افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کرده‌اند.

$$y=2+\sqrt{x-1} \qquad x\geq 1$$

$$\sqrt{x-1}=y-2$$

$$x-1=(y-2)^2 \Rightarrow x=(y-2)^2+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)^2+1 \qquad x\geq 2$$

چون $D_f=R_{f^{-1}}$ و $D_{f^{-1}}=R_f$ لذا

$$D_{f^{-1}}=[2,+\infty) \qquad R_{f^{-1}}=[1,+\infty)$$

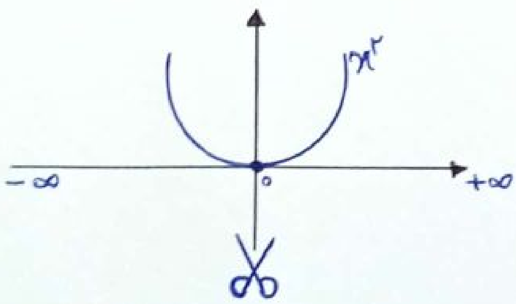
تمرین. تابع f با ضابطه $f(x)=1+\sqrt{x+1}$ مفروض است.

الف) نمودار f را رسم کنید. ب) $f^{-1}=?$ ج) $D_f=?$ ، $R_{f^{-1}}=?$

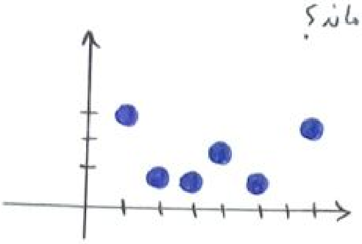
۷) محدود کردن دامنه تابع و ساختن تابع یک به یک:

می‌توان با محدود کردن دامنهٔ توابعی که یک به یک نیستند از آن‌ها تابعی یک به یک ساخت. مثلاً می‌دانیم که تابع $f(x)=x^2$ یک به یک نیست.

با محدود کردن دامنه تابع به $(-\infty,0]$ یا $[0,+\infty)$ می‌توان از آن تابعی یک به یک ساخت که وارون پذیر باشد.



مثال. می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه باقی می‌ماند؟



→ ۱ نقطه اضافی است

→ ۲ « « «

$\Rightarrow 1+2=3$

۳ نقطه اضافی است

حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند $\quad 6-3=3$

تمرین. وارون هر تابع را به دست آورید.

$$f(x)=\frac{-2x+5}{8} \qquad g(x)=3\sqrt{x}-3 \qquad h(x)=x^2+1 \quad x\geq 0$$

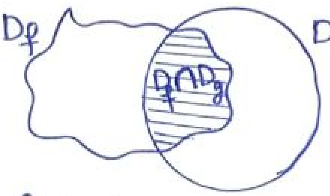
تمرین. اگر $f(x)=x-2$ ، حاصل $f^{-1}(4)$ را به دست آورید.

درس ۳: عملیات روی توابع

محاسبه دامنه بر عملیات بین دو تابع ارجحیت دارد.

۴ عمل اصلی را که بلدید !!! $\{+ \quad - \quad \times \quad \div\}$ تا حالا این اعمال را روی اعداد انجام می‌دادیم و الان می‌خواهیم در مورد توابع به کار ببریم. به عبارتی ما ۴ عمل اصلی را روی مقادیر ضابطه‌های دو تابع اثر می‌دهیم.

دو تابع f و g را با دامنه‌های D_f و D_g در نظر بگیرید. اگر $x\in D_f\cap D_g$ باشد در این صورت می‌توان توابع جدیدی به صورت زیر ساخت:



جمع دو تابع. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\qquad x\in D_f\cap D_g$

تفریق دو تابع $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $\qquad$ //

ضرب دو تابع $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ $\qquad$ //

تقسیم دو تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad x\in (D_f\cap D_g)-g(x)=۰$

دامنه توابع حاصل، اشتراک دامنه‌های دو تابع است و البته! برای تقسیم دو تابع شرط صفر شدن مخرج را نیز باید اضافه کرد.

$D_{f/g}=$ حذف ریشه‌های معادله $g(x)=۰$ از دامنه مشترک f و g

مثال. توابع $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=x+۴$ داده شده‌اند. توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

$D_f=\mathbb{R} \qquad D_g=\mathbb{R} \qquad D_f\cap D_g=\mathbb{R} \qquad D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x^۲-۴)+(x+۴)=x^۲+x$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^۲-۴)-(x+۴)=x^۲-۴-x-۴=x^۲-x-۸$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x^۲-۴)\cdot(x+۴)=x^۳+۴x^۲-۴x-۱۶$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۴}{x+۴} \qquad D_{f/g}=\mathbb{R}-\{۲\}$

مثال. اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ حاصل $(f+g)(۱۰)$ را به دست آورید.

$(f+g)(۱۰)=f(۱۰)+g(۱۰)=\frac{۹}{۱۰}+۳=۳/۹$

$f(۱۰)=\frac{۱۰-۱}{۱۰}=\frac{۹}{۱۰} \qquad g(۱۰)=\sqrt{۱۰-۱}=\sqrt{۹}=۳$

مثال. اگر $f=\{(1,0),(2,-1),(5,7)\}$ و $g(x)=x^2-x$ ، حاصل $(2f-3g)(2)$ را بدست آورید.

$$(2f-3g)(2)=2f(2)-3g(2)=2(-1)-3(2)=-2-6=-8$$

$$(2,-1)\in f \Rightarrow f(2)=-1 \qquad g(2)=(2)^2-(2)=2$$

مثال. اگر $f=\{(2,5),(3,4),(0,-2)\}$ و $g=\{(-1,2),(0,3),(2,4)\}$ ضابطه تابع $f.g$ را بیابید.

$$D_f=\{2,3,0\} \qquad D_g=\{-1,0,2\} \qquad D_f\cap D_g=\{2,0\}$$

$$(f.g)(2)=f(2)\cdot g(2)=5\times 4=20 \qquad (f.g)(0)=f(0)\cdot g(0)=(-2)\times(3)=-6$$

$$\Rightarrow f.g=\{(2,20),(0,-6)\}$$

مثال. توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند. مقدار $f(g(2))$ را بدست آورید.

از لایه درونی شروع می‌کنیم یعنی ابتدا $g(2)$ را بدست می‌آوریم:

$$g(2)=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(g(2))=f(\sqrt{2})=[\sqrt{2}]=[1/41\cdots]=1$$

$$2 \xrightarrow{\;g\;} \sqrt{2} \xrightarrow{\;f\;} 1$$

✓ مهم اما واقعی!

هنگام انجام هر عملیات روی توابع آدم وسوسه می‌شود اول ضابطه را پیدا کند چون راحت‌تر است، اما این عادت خوبی نیست و بهتر است از حالا خودتان را عادت دهید که ابتدا دامنه را پیدا کنید و بعد ضابطه را، این طوری کمتر جایی را اشتباه می‌شوید.

محاسبه دامنه بر عملیات بین توابع ارجحیت دارد.

مثلاً اگر $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ آنگاه $(f.g)(x)=f(x)\times g(x)=x\times\frac{1}{x}=1$ است و ممکن است بگویید دامنه تابع $f.g$ برابر $\mathbb{R}$ است در حالیکه g در صفر تعریف نشده است و همین باعث می‌شود که $f.g$ نیز در $x=0$ تعریف نشده باشد لذا دامنه آن بصورت زیر است:

$$D_{f.g}=\mathbb{R}-\{0\}$$

مثال. اگر $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ و $g(x)=\sqrt{3-x}$ تابع $f.g$ را تشکیل دهید.

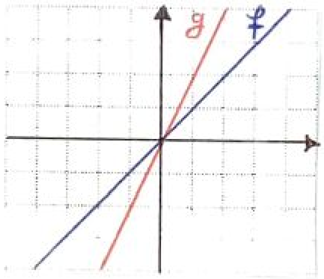
$$D_f:\ x-3>0 \rightarrow x>3 \ \text{یا}\ (3,+\infty) \qquad D_g:\ 3-x\geq 0 \rightarrow 3\geq x\ \text{یا}\ (-\infty,3]$$

$$\Rightarrow D_f\cap D_g=\varnothing \quad \text{(دامنه ندارد)}$$

و این یعنی $f.g$ تشکیل نمی‌شود.

✓ نحوهٔ رسم تابع حاصل از عملیات جبری بر روی دو تابع :

برای رسم نمودار تابع حاصل از یک عملیات جبری بر روی دو تابع، با درنظرگرفتن دامنه مشترک آن‌ها (درضمن شرط مخالف صفر بودن مخرج نیز رعایت شود!) باید همان عمل جبری داده شده را بر روی مقادیر دو تابع (عرض‌ها) برای نقاط هم‌طول (یعنی دارای xهای مساوی) انجام دهیم و نقاط بدست آمده را به هم وصل کنیم.



مثال. نمودار توابع f و g به صورت مقابل است.

الف) ضابطه توابع f و g را بنویسید.

ب) ضابطه $f-g$ را تشکیل و نمودار آن را رسم کنید.

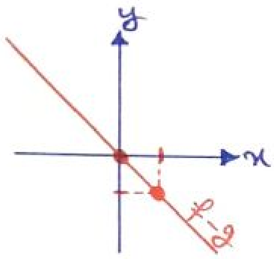
$(0,0)\in f$ و $(1,1)\in f \Rightarrow f(x)=x$

$(0,0)\in g$ و $(1,2)\in g \Rightarrow g(x)=2x$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x-2x=-x$

x	0	1
y	0	-1

نمودار $f-g$ نیمساز ناحیه دوم و چهارم است.



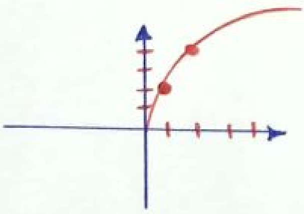
تذکر. اگر نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=K\times f(x)$ (به شرط $K>0$) کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع f را K برابر کنیم.

- دامنه تابع $y=k\times f(x)$ همان دامنه تابع f است ولی بُرد آن K برابر بُرد تابع f خواهد بود.
- برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ کافی است قرینه تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

$$\vdash \xrightarrow[y=K\times f(x)]{K=-1} -f(x)$$

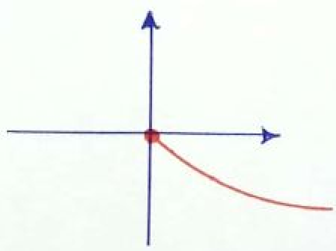
مثال. به کمک نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

$g(x)=2\sqrt{x}$



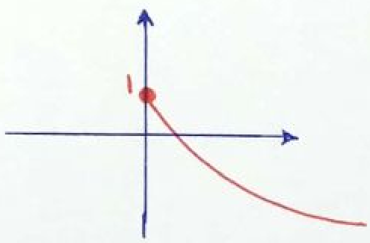
عرض هر نقطه ۲ برابر شده است.

$h(x)=-\sqrt{x}$



قرینه نسبت به محور طول‌ها

$K(x)=1-\sqrt{x}$

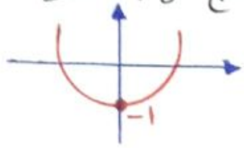


قرینه نسبت به محور طول‌ها و ۱ واحد به سمت بالا

مثال. توابع $f(x)=x^2-3$ و $g(x)=2$ مفروضند.

- نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید. - مقدار $(f\cdot g)(0)$ را بیابید. - دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را به کمک تعریف به دست آورید.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x^2-3)+2=x^2-1$$



$f(0)=(0)^2-3=-3$ ، $g(0)=2$

$$(f\cdot g)(0)=f(0)\times g(0)=(-3)\times(2)=-6$$

$D_f=D_g=\mathbb{R}$

$$D_{g/f}=D_g\cap D_f-\{x: f(x)=0\}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

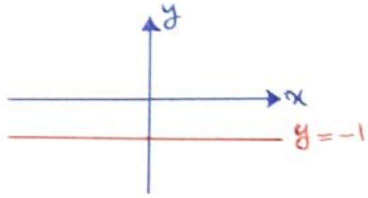
$$\Rightarrow D_{g/f}=\mathbb{R}-\{-\sqrt{3},+\sqrt{3}\}$$

مثال. اگر $f(x)=x-1$ و $g(x)=-x$ در این صورت

- نمودار $f+g$ را رسم کنید. - مقدار $(\frac{g}{f})(2)$ را محاسبه کنید.

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x-1)+(-x)=-1$ "تابع ثابت"

x	0	1
y	-1	-1



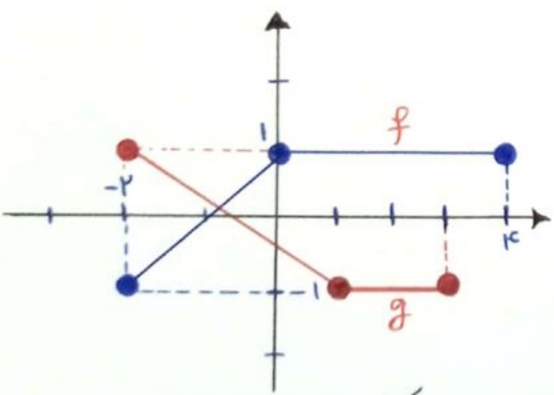
$f(2)=(2)-1=1$ ، $g(2)=-(2)=-2$

$$(\frac{g}{f})(2)=\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{-2}{1}=-2$$

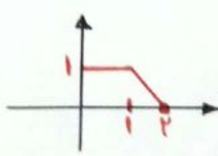
تمرین. توابع $f(x)=x+5$ و $g(x)=\frac{4x}{x^2-7x}$ داده شده اند.

- حاصل $(f\cdot g)(1)$ را تعیین کنید. - دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را به دست آورید.

تمرین. با توجه به نمودارهای داده شده، نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.



تمرین. نمودار f به صورت



است. نمودار تابع با ضابطه $y=-2f(x)$ را رسم کنید.