فصل چهارم

مثلثات

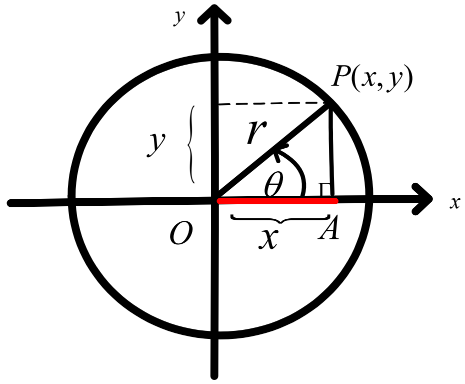
نسبت های مثلثاتی یک زاویه :

اگر $P(x,y)$ یک نقطه روی دایره ای به شعاع r باشد . درمثلث قائم الزاویه OAP داریم :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

یا

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$Sin\theta = \frac{AP}{OP} \Rightarrow Sin\theta = \frac{y}{r}$$

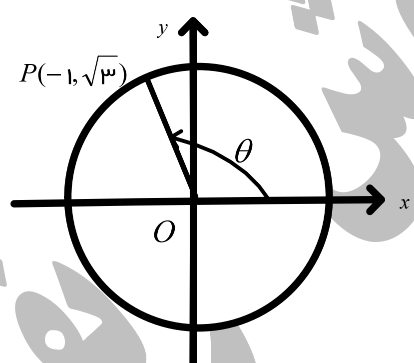
$$Cos\theta = \frac{OA}{OP} \Rightarrow Cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{AP}{OA} \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$Cot\theta = \frac{OA}{AP} \Rightarrow Cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

مثال۱ :

درشکل زیر نسبت های مثلثاتی زاویه θ را حساب کنید .



رابطه بین نسبت های مثلثاتی :

در روابط بالا داشتیم $Sin\theta = \frac{y}{r}$ و $Cos\theta = \frac{x}{r}$. بنابراین :

$$\left.\begin{array}{l} Sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = rSin\theta \\ Cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = rCos\theta \end{array}\right\} \xrightarrow{y^2+x^2=r^2} (rSin\theta)^2 + (rCos\theta)^2 = r^2 \xrightarrow{\div r^2 \neq 0} \boxed{Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1}$$

که از این تساوی می توان نتیجه گرفت

$$\boxed{\begin{array}{l} Sin^2\theta = 1 - Cos^2\theta \\ Cos^2\theta = 1 - Sin^2\theta \end{array}}$$

همچنین :

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{rSin\theta}{rCos\theta} \Rightarrow \tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta}$$

$$Cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{rCos\theta}{rSin\theta} \Rightarrow Cot\theta = \frac{Cos\theta}{Sin\theta}$$

مثال۲ :

درستی تساوی های زیر را بررسی کنید .

الف) $Cos^4\theta - Sin^4\theta = 2Cos^2\theta - 1$

ب) $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{Cos^2\theta}$

ب) $\tan\theta + Cot\theta = \frac{1}{2Sin\theta Cos\theta}$

نسبت های مثلثاتی زاویه های خاص :

مقدار θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
$Sin\theta$	صفر	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	صفر	صفر
$Cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	صفر	-1	1
$\tan\theta$	صفر	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	صفر	صفر
$Cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	صفر	تعریف نشده	تعریف نشده

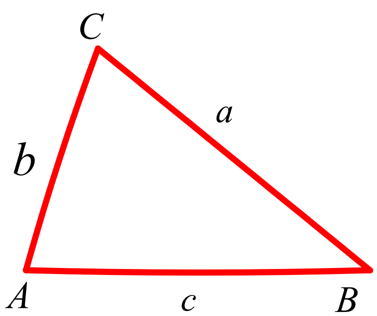
مثال۳ :

حاصل عبارت زیر را بنویسید .

$$A = Sin30^\circ Cos60^\circ + 2\sqrt{6}Sin60^\circ + \tan^2 60^\circ =$$

محاسبه مساحت مثلث :

مساحت مثلث ABC شکل زیر را می توان از روابط زیر محاسبه کرد :



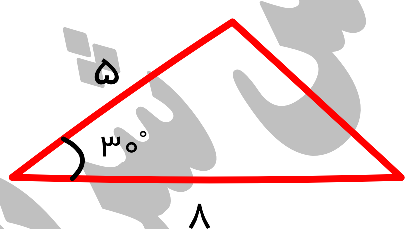
$$S = \frac{1}{2}AB.ACSin\hat{A} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}bcSin\hat{A}$$

$$= \frac{1}{2}acSin\hat{B}$$

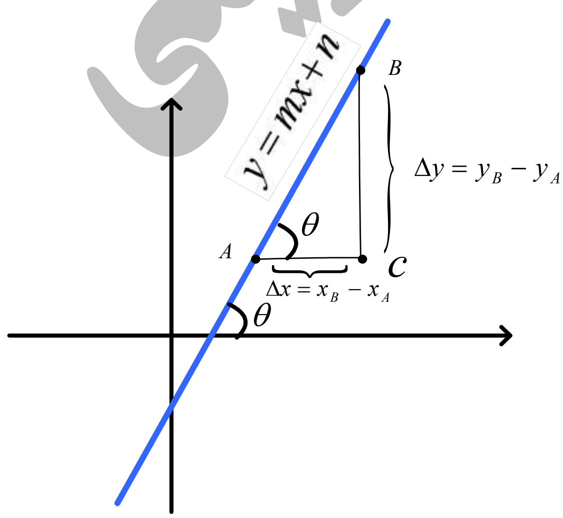
$$= \frac{1}{2}abSin\hat{C}$$

مثال۴ :

در شکل ، مساحت مثلث را حساب کنید .



رابطه شیب خط و تانژانت زاویه :



شیب خط را به شکل زیر تعریف می کنند :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویه ABC ، داشتیم :

$$\tan\theta = \frac{BC}{AC} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

بنابراین : $m = \tan\theta$

مثال۵ :

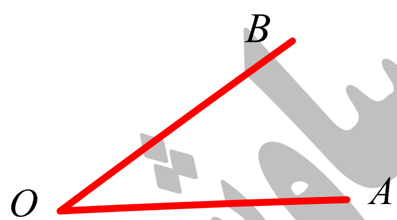
معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور طول ها زاویه 60° می سازد و از نقطه ی $A(0,2)$ می گذرد .

زاویه مثلثاتی :

در شکل زیر

اگر نیم خط OA حول نقطه O دوران کند و بر نیم خط OB منطبق شود یک زاویه مثلثاتی به وجود می آید .

نیم خط OA ضلع ابتدا و OB ضلع انتهای زاویه است .



زاویه مثبت :

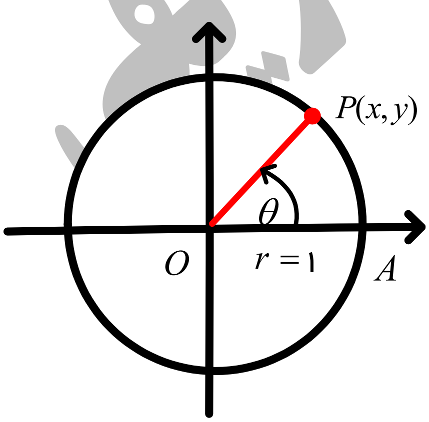
اگر جهت دوران (افزایش) زاویه AOB در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت (پادساعتگرد) باشد آن را با علامت مثبت درنظر می گیریم.

زاویه منفی :

اگر جهت دوران (افزایش) زاویه AOB موافق جهت حرکت عقربه های ساعت باشد آن را با علامت منفی درنظر می گیریم.

دایره مثلثاتی :

دایره ای به شعاع واحد(یک) که مرکز آن بر مبدأ مختصات منطبق بودهو دارای جهت می باشد که جهت آن برخلاف حرکت عقربه های ساعت (پادساعتگرد) است .



توجه :

برای نمایش زاویه روی این دایره (در موقعیت استاندارد) پاره خط OA به عنوان ضلع ابتدایی در نظر گرفته می شود .

مثال ۶ :

زاویه های زیر را در موقعیت استاندارد نمایش دهید .

الف) $\alpha = ۴۵^\circ$ ب) $\beta = -۲۱۰^\circ$

واحد های اندازه گیری زاویه :

درجه :

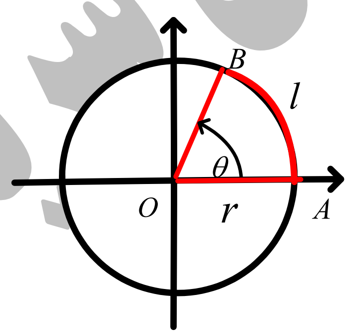
اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم زاویه مرکزی روبروی هر قسمت یک درجه است .

بنابراین یک دایره ۳۶۰° است . درجه دارای اجزای کوچکتری مانند دقیقه و ثانیه است .

رادیان :

اگر در یک دایره ، طول کمان روبروی زاویه مرکزی با طول شعاع دایره برابر باشد آن زاویه مرکزی یک رادیان است .

از نماد $\underline{rad}$ $(Radians)$ برای نمایش رادیان استفاده می شود .



در شکل :

اگر طول کمان AB برابر با طول شعاع OA باشد یعنی

$l = r$ اندازه زاویه θ یک رادیان است .

رابطه بین درجه و رادیان :

گفتیم که یک دایره برابر ۳۶۰° است . از طرفی محیط دایره به شعاع $r = ۱$ برابر با ۲π می باشد .

۳۶۰° ۲π $\Rightarrow$ محیط دایره

D R

بنابراین : $\dfrac{D}{۳۶۰^\circ} = \dfrac{R}{۲\pi}$ که پس از ساده کردن داریم : $\boxed{\dfrac{D}{۱۸۰^\circ} = \dfrac{R}{\pi}}$

مثال۷ :

زاویه های زیر بر حسب درجه هستند آن هارا برحسب رادیان بنویسید .

الف) $\alpha_{۱} = ۳۰^\circ$

ب) $\alpha_{۲} = ۲۱۰^\circ$

ج) $\alpha_{۳} = -۹۰^\circ$

د) $\alpha_{۴} = ۳۰۰^\circ$

مثال۸ :

هریک از زاویه های زیر که برحسب رادیان هستد را برحسب درجه بنویسید .

الف) $\frac{۷\pi}{۶} rad$

ب) $\frac{-۵\pi}{۳} rad$

ج) $۱\, rad$

د) $\frac{۲\pi}{۵} rad$

هـ) $-۳ rad$

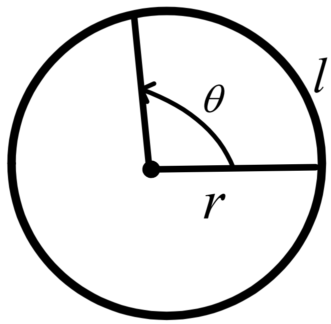
و) πrad

محاسبه طول کمان :

می خواهیم در دایره ای به شعاع r ، طول کمان روبه رو زاویه مرکزی θرادیان را به دست آوریم .

اگر زاویه مرکزی 2π رادیان باشد . کمان روبه روی آن برابر با محیط کل دایره یعنی $2\pi r$ است .

حالا اگر زاویه مرکزی θ رادیان باشد .طول کمان روبه روی آن یعنی l از رابطه زیر حساب می شود :



$$\frac{\theta}{2\pi}=\frac{l}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{l=r\theta}$$

یا
$$\boxed{\theta_{rad}=\frac{l}{r}}$$

مثال ۹ :

در دایره ای به شعاع $12cm$ ، طول کمان روبه روی زاویه مرکزی 150° چند سانتیمتر است ؟

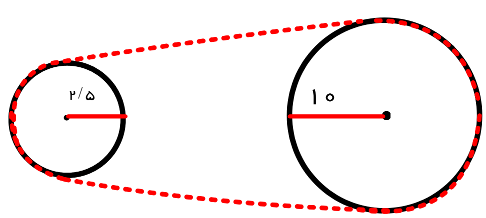
مثال ۱۰ :

در دایره ای به شعاع $4cm$ زاویه روبروی کمانی به طول $6cm$ چند رادیان است ؟

مثال ۱۱ :

در شکل مقابل یک تسمه ، دو قرقره به شعاع های $10cm$ و $2/5cm$ را به هم وصل کرده است .وقتی قرقره بزرگ تر $\frac{\pi}{2}$رادیان می چرخد .

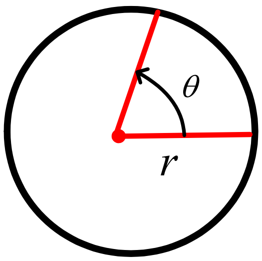
قرقره کوچکتر چند رادیان می چرخد ؟



قطاع :

بخشی از سطح دایره که بین دو شعاع آن قرار دارد ، قطاع گفته می شود .

هر قطاع یک زاویه مرکزی دارد .



مساحت قطاع :

در دایره به شعاع r ، مساحت قطاع با زاویه مرکزی θ برحسب رادیان از رابطه زیر به دست می آید :

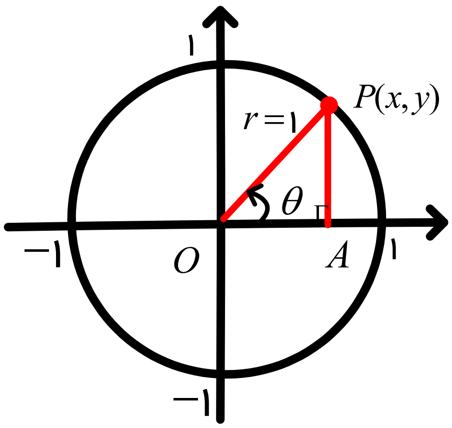
$$S_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

مثال۱۲ :

در دایره ای به شعاع $6cm$ ، مساحت قطاع با زاویه مرکزی 60° را حساب کنید .

مثال۱۳ :

در یک دایره ، طول کمان روبرو به یک قطاع $\frac{2\pi}{3}$ و مساحت آن قطاع 6π سانتیمترمربع است . زاویه مرکزی قطاع چند رادیان است؟



نسبت های مثلثاتی در دایره مثلثاتی :

میدانیم که شعاع دایره مثلثاتی برابر واحد می باشد و نیز :

$$Sin\theta=\frac{y}{r}\xrightarrow{r=1}Sin\theta=y$$

$$Cos\theta=\frac{x}{r}\xrightarrow{r=1}Cos\theta=x$$

پس اگر $P(x,y)$ یک نقطه روی دایره مثلثاتی باشد .

$$P(x,y)=P(Cos\theta,Sin\theta)$$

بنابراین محور طولها (محور x ها) محور کسینوس و محور عرض ها (محور y ها) محور سینوس گفته می شود .

و نیز با توجه به دایره مثلثاتی برای هر زاویه مانند θ داریم :

$$-1\le Sin\theta\le 1 \quad \text{و} \quad -1\le Cos\theta\le 1$$

از طرفی

$$x^2+y^2=r^2\xrightarrow{r=1}x^2+y^2=1$$

و لذا :

$$(Sin\,\theta)^2+(Cos\,\theta)^2=1$$

مثال۱۴ :

نشان دهید نقطه ی $P(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ روی دایره مثلثاتی است .

مثال۱۵ :

اگر $\cot\alpha=-2$ و $\cos\alpha>0$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

مثال۱۶ :

اگر $\cos x=\frac{-4}{5}$ و $\sin x>0$، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ x را بیابید.

با توجه به دایره مثلثاتی :

علامت سینوس در هر ناحیه با علامت عرض نقاط آن ناحیه یکسان است .

وعلامت کسینوس در هر ناحیه با علامت طول نقاط آن ناحیه یکسان است

از طرفی تانژانت و کتانژانت از تقسیم های سینوس و کسینوس به دست می آیند

پس علامت آنها به علامت سینوس وکسینوس بستگی دارد . تانژانت و کتانژانت در هر ناحیه ، هم علامت هستند .

بنابراین علامت های چهار نسبت مثلثاتی در چهار ناحیه مختصات به شرح جدول زیر است :

θ	ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
$Sin\theta$	+	+	−	−
$Cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$Cot\theta$	+	−	+	−

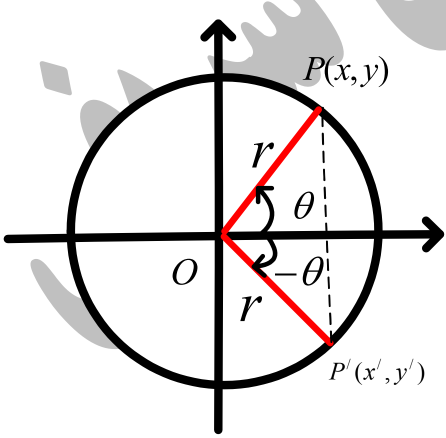
در **ناحیه اول همه** نسبت های مثلثاتی زاویه ها مثبت هستند . (هـ) .

در **ناحیه دوم** فقط **سینوس** مثبت است . (س)

در **ناحیه سوم تانژانت** و کتانژانت مثبت هستند . (ت) .

در **ناحیه چهارم** فقط **کسینوس** مثبت است . (ک)

پس کلمه « **هستک** » را برای علامت های نسبت های مثلثاتی در نواحی مختلف بخاطر بسپارید .



محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه ($-\theta$) :

در شکل زیر دو نقطه ی $P(x,y)$ و $P'(x',y')$ نسبت به محور طولها قرینه اند .

پس : $x'=x$ و $y'=-y$.

از طرفی بنابر علامت نسبت ها ی مثلثاتی در ناحیه چهارم و تعریف آن ها داریم :

$$Sin(-\theta)=\frac{y'}{r}\overset{y'=-y}{=}-\frac{y}{r}=-Sin\theta \quad\Rightarrow\quad Sin(-\theta)=-Sin\theta$$

$$Cos(-\theta)=\frac{x'}{r}\overset{x'=x}{=}\frac{x}{r}=Cos\theta \quad\Rightarrow\quad Cos(-\theta)=Cos\theta$$

به همین ترتیب : $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ و $Cot(-\theta)=-Cot\theta$. در نتیجه :

$$\boxed{\begin{array}{c} Sin(-\theta)=-Sin\theta \\ Cos(-\theta)=Cos\theta \\ \tan(-\theta)=-\tan\theta \\ Cot(-\theta)=-Cot\theta \end{array}}$$

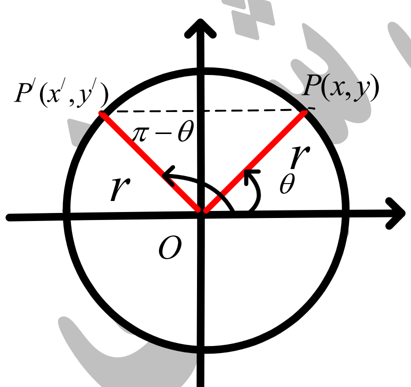
مثال۱۷ :

نسبت های مثلثاتی زاویه -۳۰° را حساب کنید .

مثال۱۸ :

حاصل $A = ۴\sqrt{۳}Sin(-۶۰^\circ) + Cos^۲(-\frac{\pi}{۶}) + \tan(-۴۵^\circ)$ را به دست آورید .

محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل $(\pi - \theta)$



در شکل زیر دو نقطه ی $P(x,y)$ و $P'(x',y')$ نسبت به محورعرض ها قرینه اند .

پس : $x' = -x$ و $y' = y$.

از طرفی بنابر علامت نسبت ها ی مثلثاتی در ناحیه دوم و تعریف آن ها داریم :

$$Sin(\pi-\theta) = \frac{y'}{r} \overset{y'=y}{=} \frac{y}{r} = Sin\theta \quad \Rightarrow \quad Sin(\pi-\theta) = Sin\theta$$

$$Cos(\pi-\theta) = \frac{x'}{r} \overset{x'=-x}{=} -\frac{x}{r} = -Cos\theta \quad \Rightarrow \quad Cos(\pi-\theta) = -Cos\theta$$

به همین ترتیب : $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$ و $Cot(\pi-\theta) = -Cot\theta$ در نتیجه :

$$\boxed{\begin{array}{c} Sin(\pi-\theta) = Sin\theta \\ Cos(\pi-\theta) = -Cos\theta \\ \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta \\ Cot(\pi-\theta) = -Cot\theta \end{array}}$$

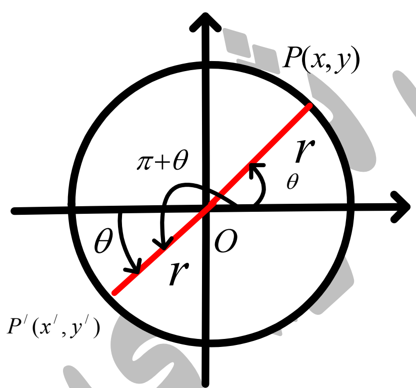
مثال۱۹ :

نسبت های مثلثاتی زاویه 135° را حساب کنید .

مثال۲۰ :

حاصل عبارت $A = 12Sin(-\frac{\pi}{6}) - 2Cos120^\circ + \tan^2\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}Cot150^\circ$ را محاسبه کنید .

محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه $\pi+\theta$:



در شکل زیر دو نقطه ی $P(x,y)$ و $P'(x',y')$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه اند .

پس : $x' = -x$ و $y' = -y$.

از طرفی بنابر علامت نسبت ها ی مثلثاتی در ناحیه سوم و تعریف آن ها داریم :

$$Sin(\pi+\theta) = \frac{y'}{r} \overset{y'=-y}{=} -\frac{y}{r} = -Sin\theta \quad \Rightarrow \quad Sin(\pi+\theta) = -Sin\theta$$

$$Cos(\pi+\theta) = \frac{x'}{r} \overset{x'=-x}{=} -\frac{x}{r} = -Cos\theta \quad \Rightarrow \quad Cos(\pi+\theta) = -Cos\theta$$

به همین ترتیب : $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$ و $Cot(\pi+\theta) = Cot\theta$

در نتیجه :

$$\boxed{\begin{gathered} Sin(\pi+\theta) = -Sin\theta \\ Cos(\pi+\theta) = -Cos\theta \\ \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \\ Cot(\pi+\theta) = Cot\theta \end{gathered}}$$

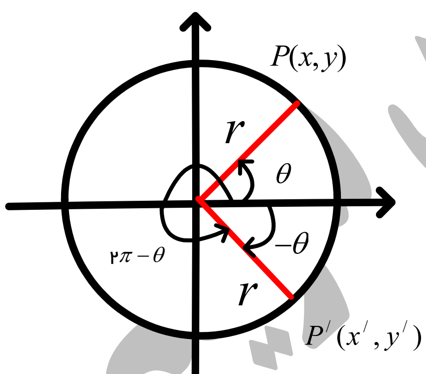
مثال ۲۱ :

نسبت های مثلثاتی زاویه $\frac{7\pi}{6}$ رادیان را محاسبه کنید .

مثال ۲۲ :

حاصل عبارت $A=\frac{\sqrt{2}Cos225^\circ-6Sin(-210^\circ)}{\sqrt{3}\tan(-240^\circ)+2\cot 225^\circ}$ را به دست آورید .

محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه $2\pi-\theta$:



در شکل زیر دو نقطه ی $P(x,y)$ و $P'(x',y')$ نسبت به محور طول ها قرینه اند .

پس : $x'=x$ و $y'=-y$.

از طرفی بنابر علامت نسبت ها ی مثلثاتی در ناحیه چهارم و تعریف آن ها داریم :

$$Sin(2\pi-\theta)=\frac{y'}{r}\overset{y'=-y}{=}-\frac{y}{r}=-Sin\theta \quad\Rightarrow\quad Sin(2\pi-\theta)=-Sin\theta$$

$$Cos(2\pi-\theta)=\frac{x'}{r}\overset{x'=x}{=}\frac{x}{r}=Cos\theta \quad\Rightarrow\quad Cos(2\pi-\theta)=Cos\theta$$

به همین ترتیب : $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$ و $Cot(2\pi-\theta)=-Cot\theta$

در نتیجه :

$$\boxed{\begin{gathered}Sin(2\pi-\theta)=-Sin\theta\\ Cos(2\pi-\theta)=Cos\theta\\ \tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta\\ Cot(2\pi-\theta)=-Cot\theta\end{gathered}}$$

به همین ترتیب اگر 360° یا 2π رادیان در دایره بچرخیم دوباره سرجای اول می رسیم پس :

$$\boxed{\begin{aligned} Sin(2\pi+\theta)&=Sin\theta\\ Cos(2\pi+\theta)&=Cos\theta\\ \tan(2\pi+\theta)&=\tan\theta\\ Cot(2\pi+\theta)&=Cot\theta \end{aligned}}$$

به طور کلی اگر روی دایره k $(k\in Z)$ دور (موافق یا مخالف حرکت عقربه های ساعت) بزنیم دوباره سرجای اول می رسیم (هر دور معادل 2π رادیان که k دور به صورت $2k\pi$ می باشد.)

بنابراین :

$$\boxed{\begin{aligned} Sin(2k\pi+\theta)&=Sin\theta\\ Cos(2k\pi+\theta)&=Cos\theta\\ \tan(2k\pi+\theta)&=\tan\theta\\ Cot(2k\pi+\theta)&=Cot\theta \end{aligned}}$$

به طور کلی:

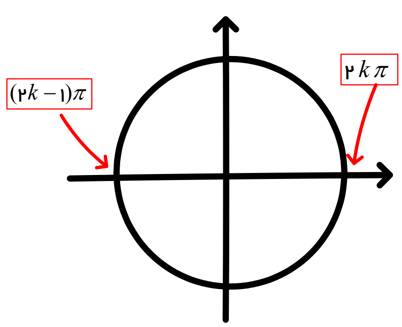
برای محاسبه نسبت مثلثاتی یک زاویه ($\pm 2k\pi \pm \theta$) :

۱- **ناحیه ای** که انتهای کمان حاوی زاویه در آن قرار دارد را مشخص می کنیم تا **علامت** حاصل عبارت به دست آید .

توجه :

انتهای کمان تمام زاویه های با **مضارب زوج** π رادیان (180°) روی زاویه 2π رادیان(360°) و

انتهای کمان تمام زاویه های با **مضارب فرد** π رادیان (180°) روی زاویه π رادیان(180°) قرار می گیرند .



۲- اگر برای محاسبه نسبت مثلثاتی یک زاویه با π (180°) یا 2π (360°) مقایسه شود . نسبت مثلثاتی حفظ شده و برابر همان نسبت مثلثاتی برای زاویه ای که بیشتر یا کمتر از این دو مورد است .

مثال۲۳ :

حاصل $Sin(۱۷\pi-\frac{\pi}{۶})$ را حساب کنید .

در زاویه $۱۷\pi-\frac{\pi}{۶}$ ، مضرب π یک عدد فرد است پس روی زاویه ۱۸۰° قرار دارد . سپس به اندازه $\frac{\pi}{۶}$ به دلیل منفی بودن باید در جهت موافق عقربه های ساعت حر کت کنیم که به ناحیه دوم می رسیم . پس انتهای کمان زاویه $۱۷\pi-\frac{\pi}{۶}$ رادیان در ناحیه دوم قرار دارد . در ناحیه دوم ، علامت سینوس مثبت می باشد . لذا جواب $Sin(۱۷\pi-\frac{\pi}{۶})$ عددی مثبت است .

از طرفی به اندازه $\frac{\pi}{۶}$ اضافه یا کمتر از π رادیان (یا ۱۸۰°) دارد پس

$$Sin\ (\underbrace{۱۷\ \pi\ -\ \frac{\pi}{۶}}_{\text{ناحیه دوم}})\ =\ +\ Sin\ \ \frac{\pi}{۶}\ =\ \frac{۱}{۲}$$

مثال۲۴ : حاصل $Cos\left(-۷\pi-\frac{\pi}{۴}\right)$ را حساب کنید .

مثال۲۵ :

اگر $Sin\theta=\frac{۳}{۵}$ و θ زاویه ای در ناحیه اول باشد . ابتدا سایر نسبت های مثلثاتی θ را حساب کرده و سپس حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) $Sin(۱۲\pi-\theta)=$

ب) $Cos(۳۱\pi+\theta)=$

ج) $Sin(\theta-۵\pi)=$

د) $Cos(-۵\pi-\theta)=$

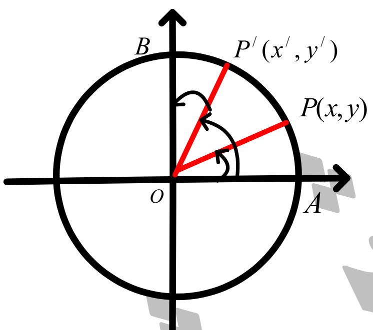
هـ) $Cot(-۱۲\pi-\theta)=$

و) $\tan(\theta-۶\pi)=$

مثال۲۶ :

حاصل عبارت $A=\dfrac{Sin(۲۴۰^\circ).\tan(۵۷۰^\circ)}{\left(Sin\dfrac{۹\pi}{۴}-Cos\dfrac{۱۱\pi}{۴}\right)^۲}$ را بنویسید .

محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم ($\dfrac{\pi}{۲}-\theta$) :



در شکل $AOP=\theta$ و $P^{/}OB=\theta$ و $AOP^{/}=\dfrac{\pi}{۲}-\theta$ می باشد.

دو نقطه $P(x,y)$ و $P^{/}\left(x^{/},y^{/}\right)$ قرینه یکدیگر نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم (خط $y=x$) می باشد .

پس : $x^{/}=y$ و $y^{/}=x$ در نتیجه :

از طرفی بنابر علامت نسبت ها ی مثلثاتی در ناحیه اول و تعریف آن ها داریم :

$$Sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{y^{/}}{r}\overset{y^{/}=x}{=}\frac{x}{r}=Cos\theta \Rightarrow Sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=Cos\theta$$

$$Cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{x^{/}}{r}\overset{x^{/}=y}{=}\frac{y}{r}=Sin\theta \Rightarrow Cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=Sin\theta$$

به همین ترتیب : $\tan(\dfrac{\pi}{۲}-\theta)=Cot\theta$ و $Cot(\dfrac{\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$

پس

$$\boxed{\begin{aligned} &Sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=Cos\theta\\ &Cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=Sin\theta\\ &\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=Cot\theta\\ &Cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta \end{aligned}}$$

همچنین برای زاویه $\frac{\pi}{۲}+\theta$:

$$Sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=Cos\theta$$
$$Cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-Sin\theta$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-Cot\theta$$
$$Cot(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\tan\theta$$

پس به طور کلی برای :

محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه های $\pm\frac{(۲k-۱)\pi}{۲}\pm\theta$:

۱– ناحیه ای که انتهای کمان حاوی زاویه در آن قرار دارد را مشخص می کنیم تا **علامت** حاصل عبارت به دست آید .

۲– اگر برای محاسبه نسبت مثلثاتی یک زاویه با $\frac{\pi}{۲}$ (۹۰°) (مضارب فرد $\frac{\pi}{۲}$) مقایسه شود . نسبت مثلثاتی تبدیل می شود .
یعنی سینوس به کسینوس و برعکس تبدیل شده و تانژانت به کتانژانت و برعکس تبدیل می شود .

مثال۲۷ :

اگر $Cos\theta=۰/۸$ و θ زاویه ای در ناحیه اول باشد . حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) $Sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)$

ب) $Cos\left(\frac{۱۳\pi}{۲}-\theta\right)=$

ج) $Sin(\theta-\frac{۵\pi}{۲})=$

د) $Cos(-\frac{\pi}{۲}-\theta)=$

هـ) $Cot(-\frac{۳\pi}{۲}-\theta)=$

و) $\tan(\theta-\frac{\pi}{۲})=$

مثال۲۸ :

اگر $\tan ۲۰^\circ = ۰/۴$ باشد . حاصل عبارت $A = \dfrac{Sin ۲۵۰^\circ + Sin ۷۰۰^\circ}{Cos ۵۶۰^\circ - Cos ۱۱۰^\circ}$ را حساب کنید .

مثال۲۹ :

اگر $\dfrac{\tan\left(\dfrac{۳\pi}{۲} - x\right) - ۲Sin(۷\pi - x)}{Cos\left(\dfrac{۵\pi}{۲} + x\right) + \tan(x - \pi)} = ۲$ باشد . حاصل $A = ۷ - ۲\tan^۲ x$ را محاسبه کنید .

مثال۳۰ :

اگر $Sin(۳\pi - \theta) + Sin\left(\dfrac{۷\pi}{۲} - \theta\right) = \dfrac{۱}{۳}$ باشد . حاصل $Sin\theta.Cos\theta$ را بیابید.

مثال۳۱ :

حاصل عبارت $A = Sin^۲\left(\dfrac{\pi}{۸}\right) + Sin^۲\left(\dfrac{۳\pi}{۸}\right) + Sin^۲\left(\dfrac{۵\pi}{۸}\right) + Sin^۲\left(\dfrac{۷\pi}{۸}\right)$ را بنویسید.

مثال۳۲ :

اگر $\tan\theta = ۰/۲$ باشد . حاصل عبارت $B = \dfrac{Cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right) - Cos(\pi+\theta)}{Sin(\pi-\theta) - Sin\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)}$ را حساب کنید .

مثال۳۳ :

فرض کنید $f(x) = ۳\tan(۶\pi - ۲x)$ باشد . حاصل $f(\frac{۵\pi}{۶})$ و $f(\frac{\pi}{۱۲})$ را به دست آورید .

مثال۳۴ :

حاصل عبارت $(\tan ۱^\circ)(\tan ۲^\circ)(\tan ۳^\circ)...(\tan ۸۸^\circ)(\tan ۸۹^\circ)$ را بنویسید

مثال۳۵ :

اگر $-\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$ و $Cos\theta = ۲m - ۱$ باشد . حدود m را تعیین کنید .

مثال۳۶ :

اگر $\frac{\pi}{۶} < \theta < \frac{\pi}{۲}$ و $Sin۲\theta = ۳ - ۲m$ باشد . حدود m را تعیین کنید .

پدیده های متناوب :

هر پدیده که پس از گذشت زمان معینی ، دقیقاً تکرار می شود پدیده های « متناوب » می گویند و مدت زمانی که طول می کشد تا پدیده تکرار شود دوره تناوب گویند.

به عنوان مثال :

فصل های سال یک پدیده تناوبی است.

توابع متناوب :

تابع f را متناوب گویند هرگاه عدد حقیقی غیرصفر مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ دوشرط زیر برقرار باشد :

۱- $(x \pm T) \in D_f$ ۲- $f(x+T) = f(x)$

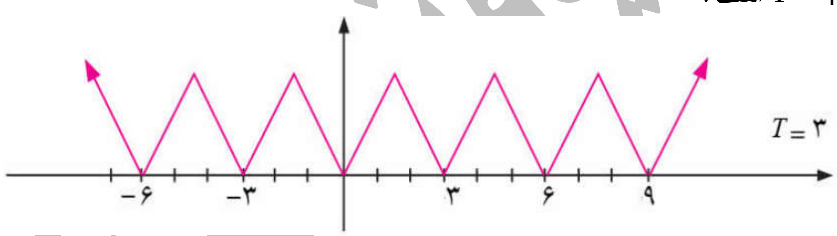
در این صورت T را دوره تناوب تابع f می گویند .

به کوچکترین مقدار مثبت T « **دوره تناوب اصلی** » تابع f گویند.

از این به بعد منظور از دوره تناوب ، دوره تناوب اصلی است

مثال۳۷ :

نمودار شکل مقابل متناوب با دوره تناوب اصلی $T = ۳$ است .

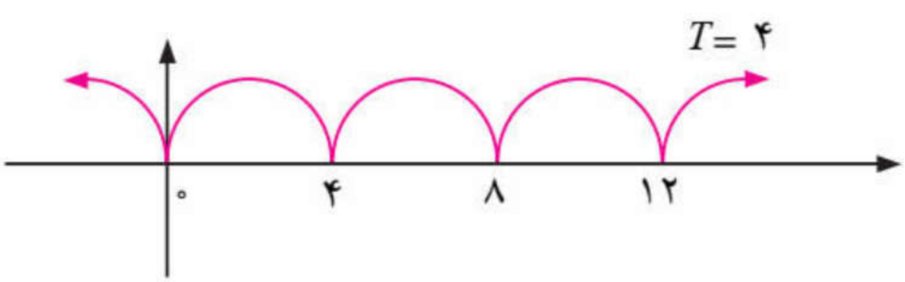


توجه :

در این مثال $T = ۶$ و $T = ۹$ هم می توانند دوره تناوب تابع باشند ولی دوره تناوب اصلی تابع $T = ۳$ است .

بطور کلی اگر T دوره تناوب اصلی یک تابع باشد . nT ($n \in N$) نیز دوره تناوب تابع است .

مثا ل۳۸ : نمودار شکل زیر متناوب با دوره تناوب اصلی $T = ۴$ است .



مثال ۳۹ :

در تابع $f(x) = Sinx$ ، ثابت کنید دوره تناوب آن ۲π است .

باید ثابت کنیم $f(x+۲\pi) = f(x)$

$$f(x+۲\pi) = Sin(x+۲\pi) = Sin(x) = f(x)$$

که این تساوی بنابر مطالب گفته شده برقرار است .

تابع $y = Cosx$ نیز متناوب با دوره تناوب ۲π است .

دو تابع $f(x) = \tan x$ و $g(x) = Cotx$ نیز متناوب با دوره تناوب π هستند .

نکته :

در حالت کلی دوره تناوب توابع $y = aSin(bx+c)+k$ و $y = aCos(bx+c)+k$ برابر با $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ و دوره تناوب توابع $y = a.\tan(bx+c)+k$ و $y = a.Cot(bx+c)+k$ برابر با $T = \frac{\pi}{|b|}$ است .

مثال ۴۰ :

دوره تناوب (اصلی) تابع زیر را بیابید .

الف) $y = -۲Cos(۳x+\frac{\pi}{۳})+۳$

ب) $y = ۳Sin\frac{x}{۲}+۱$

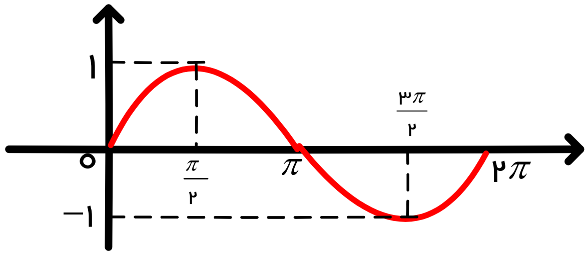
ج) $y = Cot\left(\frac{\pi x}{۳}\right)$

د) $y = ۲\tan(\frac{\pi}{۵}-۴x)-۱$

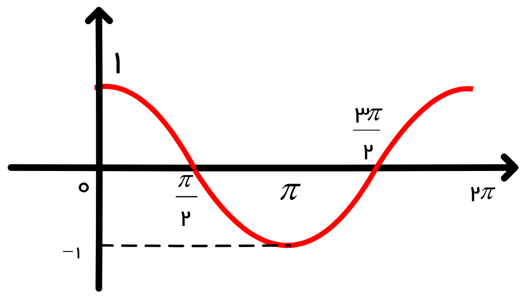
دو تابع $y = Sinx$ و $y = Cosx$ متناوب با دوره تناوب ۲π هستند . یعنی اگر نمودار آن را فقط در بازه $۰ \le x \le ۲\pi$ رسم کنیم ، کار تمام است و باید نمودار به دست آمده را بعد از آن تکرار کنیم .

$x_{(Rad)}$	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$Sinx$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰
$Cosx$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱

که اگر نمودار دو تابع فوق را رسم کنیم به صورت های زیر خواهند بود .



$y = Sinx$



$y = Cosx$

این دو تابع دارای دامنه R و برد $[-1,1]$ هستند .

حداقل دو تابع برابر با -1 و حداکثر آن ها برابر با ۱ می باشد .

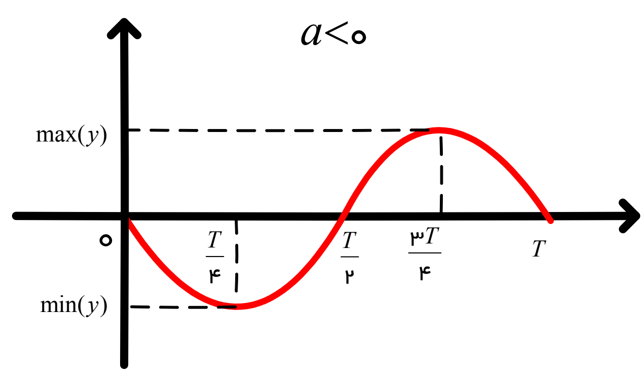
به طور کلی برای رسم نمودار تابع های $y = aSinbx$ و $y = aCosbx$:

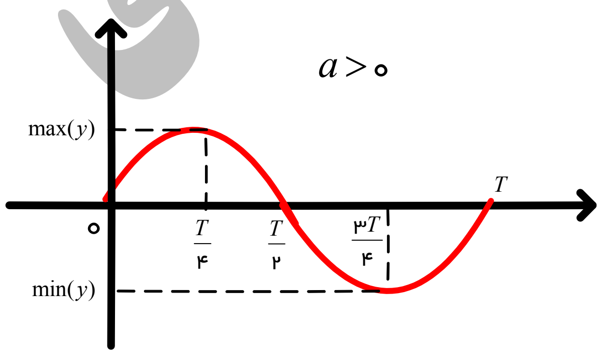
۱- دوره تناوب تابع را از رابطه $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می آوریم و نمودار را در بازه $[0,T]$ رسم می کنیم .

۲- حداکثر و حداقل را از رابطه های زیر حساب می کنیم .

$$\max(y) = |a| \quad \text{و} \quad \min(y) = -|a|$$

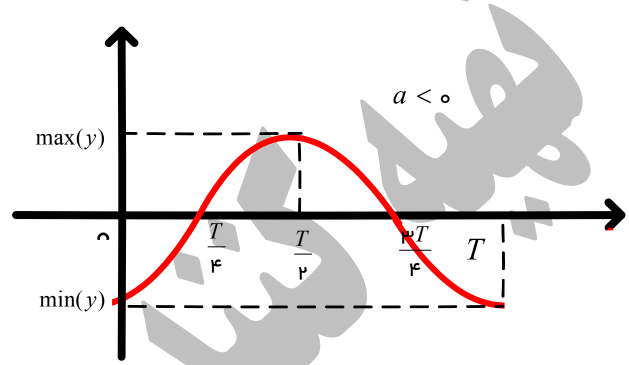
نمودار $y = aSinbx$ $(b > 0)$ در یک دوره تناوب به یکی از دوصورت زیر است :

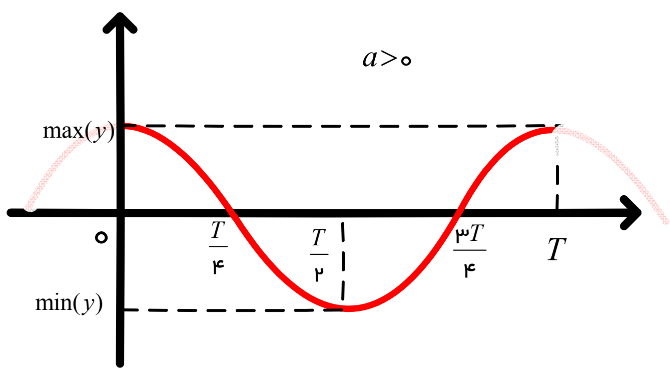




توجه : اگر $b < 0$ باشد می توان از خاصیت زاویه های قرینه $Sin(-\theta) = -Sin\theta$ استفاده کرد .

و نمودار $y = aCosbx$ دریک دوره تناوب به یکی از دوصورت زیر است :





مثال ۴۱ :

نمودار توابع زیر را با استفاده از دوره تناوب و مقادیر حداکثر و حداقل رسم کنید . دامنه و برد هرکدام را بنویسید .

الف) $y = 3Sin2x$

ب) $y = -2Sin\frac{x}{3}$

ج) $y = |3Sinx|$

د) $y = [Sinx]$

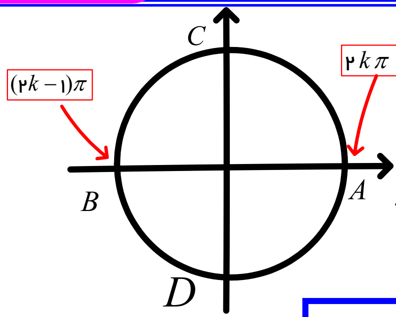
هـ) $y = ۲Sin|x|$

و) $y = ۳Sin۲(\frac{\pi}{۴} - x)$

ز) $y = ۱ + \left|Cos\frac{\pi x}{۳}\right|$

ح) $y = ۱ - Cos(x + \frac{\pi}{۶})$

ط) $y = Sin\left(\frac{۷\pi}{۲} + x\right) - ۱$



نکته :

در دایره مثلثاتی روبرو:

مقدار سینوس در دو نقطه ی A و B صفر است.

بنابراین هر تعداد بار که روی این دایره دور بزنیم در این دو نقطه مقدار سینوس صفراست.

اگر $Sin\theta = 0$ باشد . جواب های کلی این معادله به صورت $\theta = k\pi \quad (k \in Z)$ است.

همچنین مقدار کسینوس در دو نقطه ی C و D صفر است .

هر تعداد بار که روی این دایره دور بزنیم در این دو نقطه مقدارکسینوس صفراست. پس :

اگر $Cos\theta = 0$ باشد . جواب های کلی این معادله به صورت $\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in Z)$ است .

مثال۴۲ :

جواب های کلی معادله $Sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ را بنویسید .

مثال۴۳ :

جواب های معادله $Sin(\frac{x}{4} - \frac{3\pi}{4}) = 0$ را در بازه $[-7\pi, 4\pi]$ را بیابید.

مثال۴۴ :

جواب های معادله $Cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ را در بازه $[-\pi, 8\pi]$ بیابید .

دامنه توابع مثلثاتی :

۱- دامنه توابع $y=Sin(f(x))$ و $y=Cos(f(x))$ برابر با دامنه تابع $f(x)$ می باشد یعنی $D_y=D_f$.

مثال۴۵ :

دامنه توابع زیر را بنویسید .

ب) $y=Sin\left(\frac{۲x}{x-\pi}\right)$

الف) $y=۳Sin\left(۳x+\frac{\pi}{۵}\right)$

د) $y=\frac{Cos۲x-۱}{Sinx}$

ج) $y=Cos\sqrt{x-\pi}$

و) $y=\sqrt{-Sin^{۲}\pi x}$

هـ) $y=\frac{۱}{Cosx}$

۲- دامنه تابع $y=\tan(f(x))$ به صورت زیر است :

از آنجایی که $\tan(f(x))=\frac{Sin(f(x))}{Cos(f(x))}$ است بنابراین :

$$D_y=R-\left\{x\in R\middle|f(x)=k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}$$

یا

$$D_y=\left\{x\in R\middle|f(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}$$

۳- دامنه تابع $y=Cot(f(x))$ به صورت زیر است :

از آنجایی که $Cot(f(x))=\frac{Cos(f(x))}{Sin(f(x))}$ است بنابراین :

$$D_y=R-\{x\in R|f(x)=k\pi\}$$

یا

$$D_y=\{x\in R|f(x)\neq k\pi\}$$

مثال۴۶ :

دامنه توابع زیر را بنویسید .

الف) $y = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$

ب) $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

ج) $y = Cot(3x)$

د) $y = \tan x + Cotx$

تعیین برد توابع مثلثاتی شامل سینوس و کسینوس :

برای تعیین برد توابع شامل سینوس و کسینوس از نکات های زیر می توان استفاده کرد .

الف) $-1 \leq Sin(f(x)) \leq 1$

ب) $-1 \leq Cos(f(x)) \leq 1$

ج) $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq aSin(f(x)) + bCos(f(x)) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال۴۷ : برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y = 1 - 5Sin(4x)$

ب) $y = 3Cos\left(\frac{x}{2}\right) + 5$

ج) $y = 2Sin^2 x - 3$

د) $y = 3Sin7x - 4Cos7x + 1$

هـ) $y = Cosx - Sin^2 x$

مثال۴۸ :

نمودار تابع $y = aCosx + b$ از نقطه ی $(\pi,3)$ گذشته و محور طولها را در $x = \frac{5\pi}{3}$ قطع می کند . مقدار a و b را بیابید .

مثال۴۹ :

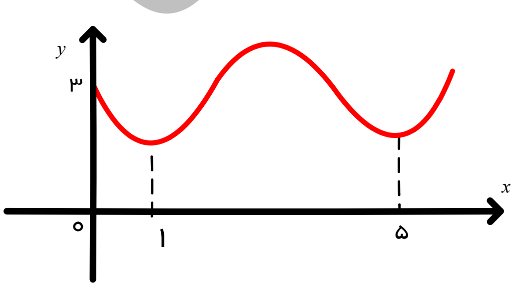
در تابع با ضابطه ی $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{Sin\pi x - 1}$ باشد . مقدار $f\left(-\frac{1}{2} f(x)\right)$ را محاسبه کنید .

مثال۵۰ :

شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a + Sin(b\pi x)$ است .

الف) مقدار a و b را بیابید.

ب) حاصل تابع به ازای $x = \frac{25}{3}$ را حساب کنید .



تمرین :

۱– اندازه زاویه های زیر را برحسب رادیان بنویسید.

الف) ۱۳۵° ب) ۷۰۵° ج) ۲۵۶۵°

۲– زاویه های زیر را برحسب درجه بنویسید.

الف) ۲ رادیان ب) $\frac{۹\pi}{۲}$رادیان ج) $\frac{۲۴\pi}{۵}$رادیان

۳– در دایره ای به شعاع $۱۰cm$ طول کمان روبرو به زاویه ۲ رادیان چقدر است؟

۴– اگر نقطه ی $P(\frac{۱}{۴},-\frac{\sqrt{۱۵}}{۴})$ روی دایره مثلثاتی وانتهای کمان زاویه θ باشد . مقادیر $Sin\theta$ و $Cos\theta$ و $\tan\theta$ و $Cot\theta$ را به دست آورید .

۵– درهر مورد زیر ، حدود x ازبازه $[۰,۲\pi]$ را طوری بیابید نامساوی برقرار باشد.

الف) $Sinx > \frac{۱}{۲}$ ب) $Sinx < -\frac{۱}{۲}$ ج) $Cosx < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶– حاصل عبارت $\sqrt{۱-۲Sinx.Cosx}$ وقتی $-\frac{\pi}{۴} < x < ۰$ باشد را بیابید.

۷– به ازای چه مقدار x ازبازه $[۰,۲\pi]$ تساوی $Sinx = Cos(۴۰^\circ + x)$ بر قرار است؟

۸– اگر $Sin\theta = \frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}$ و انتهای کمان در ناحیه چهارم باشد . حاصل عبارت های زیر را بیابید.

الف) $Sin(۳\pi - \theta)$ ب) $Sin\left(\frac{۳\pi}{۲} - \theta\right)$ ج) $\tan\left(\theta - \frac{۵\pi}{۲}\right)$

۹– حاصل عبارت های زیر را حساب کنید .

الف) $A = Cot(۳۳۰^\circ).Sin\left(-\frac{۷\pi}{۳}\right) - Sin\left(\frac{۲۳\pi}{۶}\right)$

ب) $B = \dfrac{Cos\left(\frac{۵\pi}{۸}\right)Cot\left(\frac{۵\pi}{۸}\right)}{Sin\left(\frac{\pi}{۸}\right)Cot\left(\frac{۳\pi}{۸}\right)}$

ج) $C = \dfrac{Sin^۲(۴۰۵^\circ) + Cos(۳۰۰^\circ)}{\tan(۱۳۵^\circ) + Cot^۲(-۱۵۰^\circ)}$

د) $D = Sin(۲۰۰^\circ) + ۲Sin(۱۶۰^\circ) - Cos(۷۰^\circ) + ۳Sin(۳۴۰^\circ) - ۴Cos(۱۱۰^\circ) - Cos(۷۰^\circ)$

هـ) $E = Cos\left(\frac{۳\pi}{۱۴}\right) + Cos\left(\frac{۵\pi}{۱۴}\right) + Cos\left(\frac{۷\pi}{۱۴}\right) + Cos\left(\frac{۹\pi}{۱۴}\right) + Cos\left(\frac{۱۱\pi}{۱۴}\right)$

و) $F = Cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + Cos\left(\frac{۲\pi}{n}\right) + Cos\left(\frac{۳\pi}{n}\right) + ... + Cos\left(\frac{(n-۲)\pi}{n}\right) + Cos\left(\frac{(n-۱)\pi}{n}\right) + Cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)$

۱۰ – اگر $Cos\theta = \frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان θ در ناحیه چهارم باشد. مقدار عددی عبارت $H = \dfrac{۱۰Cos\left(\frac{۵\pi}{۲}+\theta\right)}{۳\tan(-۵\pi-\theta)+\tan\left(\frac{۹\pi}{۲}+\theta\right)}$ را بیابید.

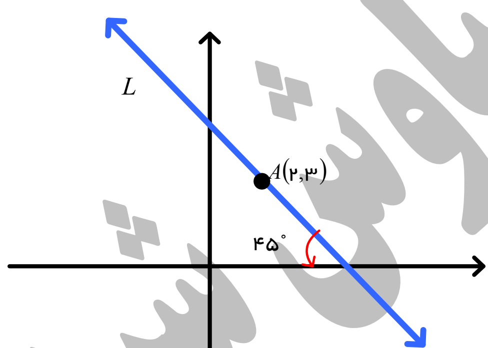
۱۱–اگر $\tan\theta = ۲$ و انتهای کمان θ در ناحیه سوم باشد. حاصل عبارت $G = \dfrac{Cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\theta\right)+Sin^{۳}(۵\pi+\theta)}{Sin^{۲}\left(\frac{۱۳\pi}{۲}+\theta\right)}$ رابیابید .

۱۲– اگر $\tan ۱۵^\circ = ۲-\sqrt{۳}$ باشد . حاصل عبارت $I = \dfrac{۳Sin(۷۵^\circ)+۲Sin(۱۰۵^\circ)}{Cos(۱۶۵^\circ)-Cos(۲۸۵^\circ)}$ را محاسبه کنید .

۱۳– اگر $\tan ۳۵^\circ = ۰/۷$ باشد . حاصل عبارت $K = \dfrac{۲Sin(۱۲۵^\circ)-Sin(۲۳۵^\circ)}{Cos(۳۹۵^\circ)+Sin(۵۷۵^\circ)}$ را محاسبه کنید .

۱۴– اگر $Sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-\theta\right) = -\frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان θ در ناحیه اول باشد. حاصل $Sin(\theta-\pi)$ را بنویسید.

۱۵– معادله خط مقابل را بنویسید .



۱۶– خط گذرنده از نقاط $A(۰,۱)$ و $B(۲\sqrt{۳},-۱)$ با جهت مثبت محور x ها چه زاویه ای می سازد؟

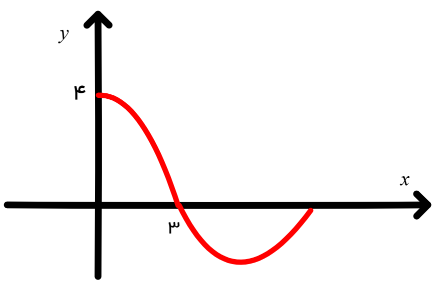
۱۷– اگر $-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ و $Cos۳x = \frac{m-۱}{۲}$ باشد . حدود m رابیابید.

۱۸– جواب های معادله $Sin\left(\frac{۲x}{۳}-\frac{\pi}{۴}\right) = ۰$ در بازه $[-۵\pi,۷\pi]$ را بیابید .

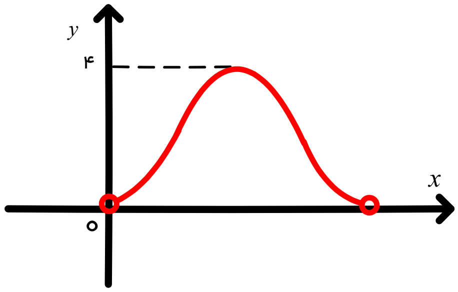
۱۹– خط $y = ۲$ نمودار تابع $y = ۳Sin(۲x)$ را در بازه $[۰,۶\pi]$ در چند نقطه قطع می کند ؟

۲۰– شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = ۴Cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)+b$ به شکل مقابل است .

مقدار a و b و دوره تناوب تابع را بیابید. ($a > ۰$)



۲۱- شکل مقابل ، نمودار تابع $f(x)=a+bCos\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$ در بازه $(۰,۴)$ است . مقدار a و b را بیابید



۲۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{|Sinx|}{Sinx}$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ رسم کنید .

۲۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید .

الف) $y=۲-Sin\left(\frac{x}{۳}\right)$

ب) $y=۲Sin(۳x)-۱$

ج) $y=[Cosx]$

د) $y=|۳Sin(۲x)|$

هـ) $f(x)=Sinx+|Sinx|$ ، $x\in[۰,۲\pi]$

و) $y=۱-۳Sin\left(\frac{x}{۳}-\frac{\pi}{۲}\right)$

ز) $y=۲Sinx+Cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)-۱$

ح) $y=۲-Cos\left(\pi\left(\frac{۱}{۲}+۲x\right)\right)$

۲۴- کمترین مقدار تابع $f(x)=aSin\left(\pi x-\frac{\pi}{۶}\right)+b$ روی محور x ها قرار دارد . اگر نمودار تابع f خط $y=x+۲$ را در نقطه ای به طول یک قطع کند . مقدار a و b را بیابید

۲۵- دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\frac{Sinx+۱}{Cosx-۱}$

ب) $y=Sin(۲x)+Cos\sqrt{۲x-\pi}$

ج) $y=Cot\left(\frac{\pi x}{۲}\right)$

د) $y=\tan\left(۲x-\frac{\pi}{۴}\right)-۱$

هـ) $y=\sqrt{Sinx}$

و) $y=\sqrt{Sin\left(\frac{x}{۲}\right)+۲}$

۲۶- برد توابع زیر را بیابید .

الف) $y=۸Sin^{۲}x-۳$

ب) $y=۳Cos\left(۵x-\frac{\pi}{۸}\right)-۱$

ج) $y=\sqrt{۳}Sinx-Cosx$

د) $y=۴Sin^{۲}x-۱۲Sinx+۹$

هـ) $y=|۳Sinx-۴|$

و) $y=۴Cosx-Sin^{۲}x$

تمرین

۱) آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y=\sin x \ , \quad y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$

۲) $y=\cos x \ , \quad y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$

۳) $y=\cos x \ , \quad y=\cos(۲\pi-x)$

۴) $y=\sin x \ , \quad y=\sin(۵\pi-x)$

۲) نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

۱) $y=\frac{۱}{۲}\sin x \ , \quad [۰,۲\pi]$

۲) $y=۲\cos x+۱ \ , \quad [-۲\pi,۲\pi]$

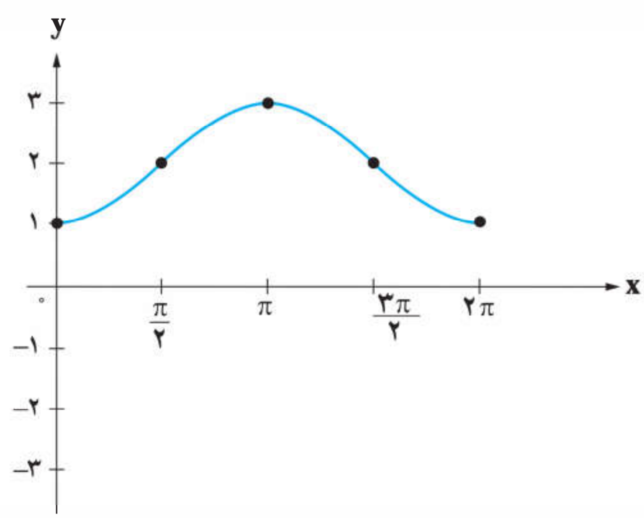
۳) $y=۱-\sin x \ , \quad [-۲\pi,۲\pi]$

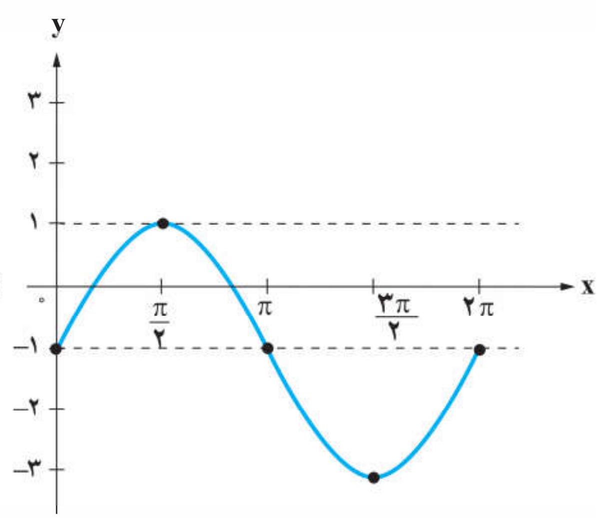
۴) $y=-۱+\cos x \ , \quad [-۴\pi,۴\pi]$

۵) $y=۱+\sin(x+\frac{\pi}{۴}) \ , \quad [۰,۲\pi]$

۶) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲}) \ , \quad [۲\pi,۴\pi]$

۳) با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام‌یک از ضابطه‌های داده شده را دارند. نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.





الف) $y=۲\cos x+۱$

ب) $y=۲\sin x-۱$

پ) $y=۲-\cos x$

ت) $y=\sin x-۲$