فصل پنجم

توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی:

هرتابع به معادله $f(x)=a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی گویند .

(به عبارتی $a>0$ و $a\neq 1$)

مثال۱ :

کدام مورد یک تابع نمایی است؟

الف) $y=3^x$

ب) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$

ج) $y=\left(0/2-3\right)^x$

د) $y=x(x^2-x^3)$

هـ) $y=\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^x$

و) $y=\left(5-2\sqrt{6}\right)^x$

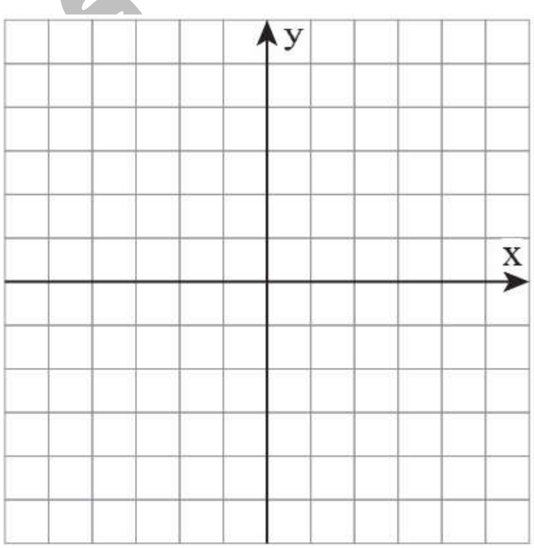
مثال۲ :

اگر $f(x)=\left(\frac{4-k}{k+2}\right)^x$ یک تابع نمایی باشد . حدود k را بیابید.

مثال۳ :

نمودار تابع $f(x)=2^x$ را رسم کنید . دامنه و برد آن را بنویسید .

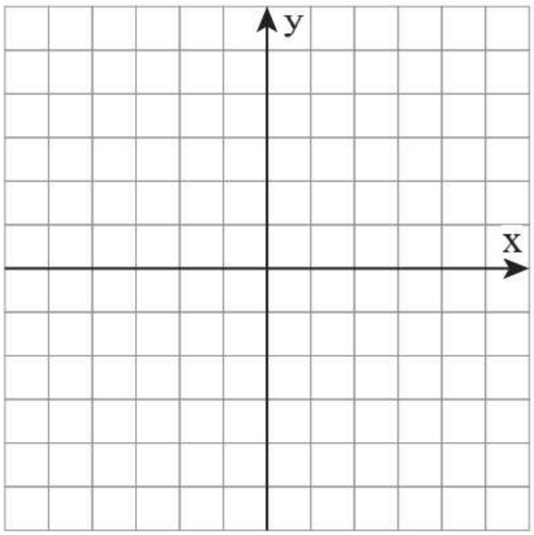
x	...	-2	-1	0	1	2	...
y							



مثال۴ :

نمودار تابع $f(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$ را رسم کنید . دامنه و برد آن را بنویسید .

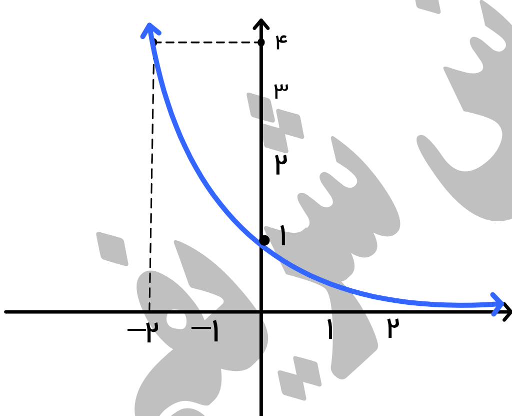
x	...	-۲	-۱	۰	۱	۲	...
y							



نتیجه :

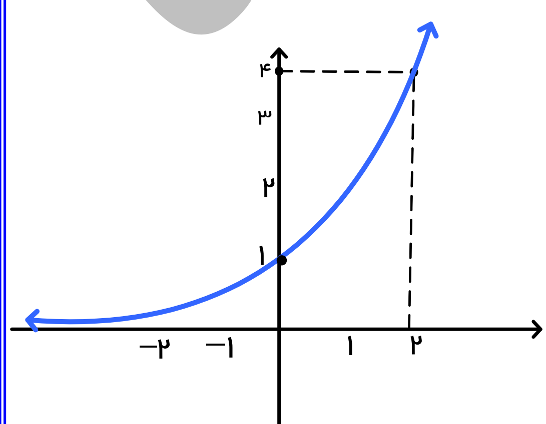
نمودار تابع نمایی $y=a^{x}$ به یکی از دو شکل زیر است :

الف) اگر $۰<a<۱$ باشد . نمودار به صورت روبرو است .



- دامنه آن برابر با R و برد آن $(۰,+\infty)$ است .
- تابع یک به یک است .
- نمودار کاهشی (نزولی) است .
- خط $y=۰$ مجانب افقی آن است .
- محور x ها را قطع نمی کند ولی محور y هارا در نقطه $(۰,۱)$ قطع می کند .

ب) اگر $a>۱$ باشد . نمودار به صورت روبرو است .

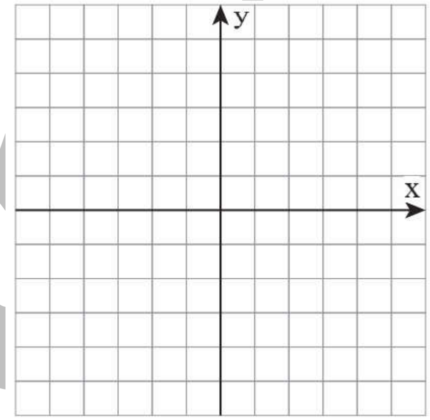


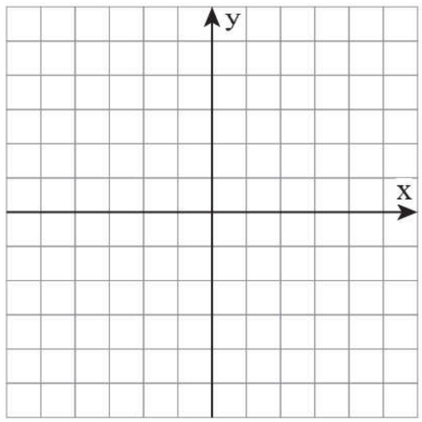
- دامنه آن برابر با R و برد آن $(۰,+\infty)$ است .
- تابع یک به یک است .
- نمودار افزایشی (صعودی) است .
- خط $y=۰$ مجانب افقی آن است .
- محور x ها را قطع نمی کند ولی محور y هارا در نقطه $(۰,۱)$ قطع می کند .

مثال ۵ :

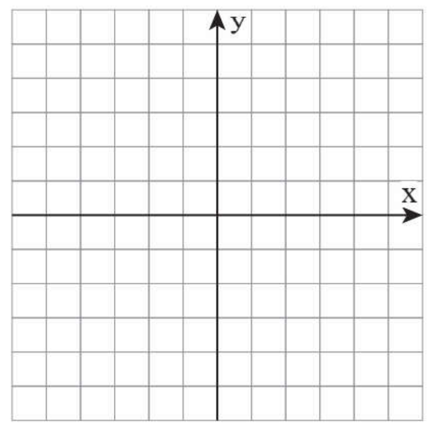
نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد هریک را بنویسید .

الف) $y = 2^{x-1}$

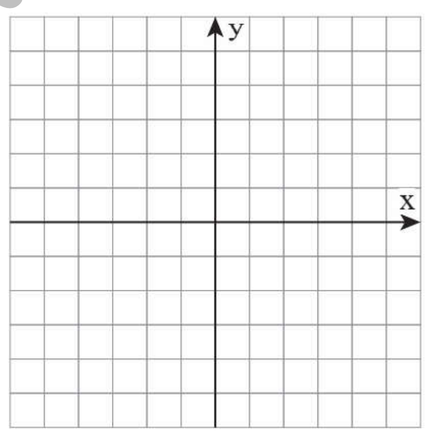




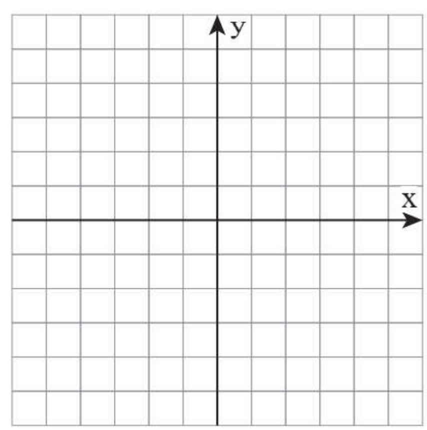
ب) $y = 2^{x} - 1$



ج) $y = 2^{-x}$



د) $y = \left|2^{x} - 1\right|$



هـ) $y = 2^{-|x|}$

عدد نپر :

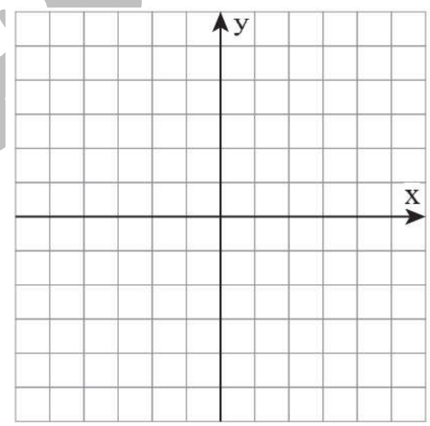
عدد ...۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵ را عدد نپر گویند و با حرف e نمایش می دهند .

اگر پایه تابع نمایی $y=a^x$ عدد نپر e باشد آن را تابع نمایی طبیعی گویند .

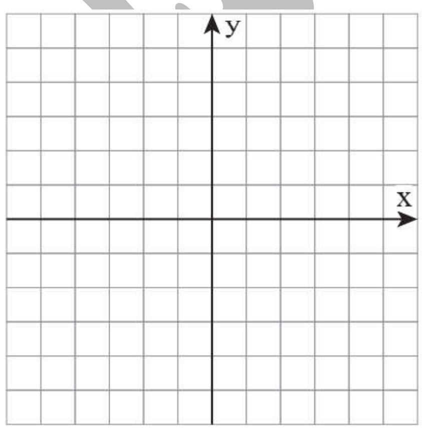
مثال۶ :

نمودارتوابع زیر را رسم کنید .

الف) $y=e^x$



ب) $y=\sqrt{e^{(-x)}}$



مثال۷ :

در تابع نمایی $f(x)=ka^x$ ؛ $f(0)=\frac{3}{2}$ و $f(-2)=\frac{3}{32}$ باشد . مقدار a و k و حاصل $f(\frac{3}{2})$ را بنویسید .

مثال۸ :

نمودار تابع $f(x)=\frac{a}{۲^{bx+۱}}$ نمودار تابع $g(x)=\frac{۱۷x+۱۴}{۴x}$ را در نقاطی به طولهای -۱ و ۲ قطع می کند حاصل $f^{-۱}(۳)$ را حساب کنید

خواص توان ها :

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و x و y دو عدد حقیقی باشند . داریم :

الف) $a^x \times a^y = a^{x+y}$

ب) $a^x \times b^x = (a\times b)^x$

ج) $a^x \div a^y = a^{x-y}$

د) $a^x \div b^x = (a\div b)^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

هـ) $(a^x)^y = a^{x.y}$

و) $a^{-x} = \frac{۱}{a^x}$

ز) $a^{\circ} = ۱$

مثال۹ :

عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\left(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}\right)^{\left(\sqrt{۲}+۱\right)}\left(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}\right)^{\left(\sqrt{۲}+۱\right)} =$

ب) $\sqrt[۵]{۸}\times\left(\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۴}}\right) =$

ج) $\frac{\left(e^{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\right)^{\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}\right)}\times e^{۲\sqrt{۶}+۴}}{\left(e^{\sqrt{۱۲}}\right)^{\sqrt{۳}}} =$

معادلات نمایی :

برای حل معادلات شامل عبارت های نمایی به روش جبری ؛ می توان از تساوی زیر استفاده کرد :

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

یا می توان با تغییر متغیر نیز آن ها را حل کرد .

توجه : می توان معادلات نمایی را به روش هندسی نیز حل کرد .

مثال۱۰ :

معادلات زیر را حل کنید .

الف) $5^{2x-6} = 125^{x+1}$

ب) $2^{x^2-3} = (0/25)^x$

ج) $5^{2x+1} = 24 \times 5^x + 5$

د) $4^x - 3 \times 2^x + 2 = 0$

هـ) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} = \left(\frac{16}{81}\right)^{1-x}$

و) $2^x = \sqrt{x} + 1$

ز) $2^x = x^2$

مثال ۱۱ :

نمودار های دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه ای به طول ۱− متقاطع اند . اگر $f(2) = \frac{1}{3}$ باشد.

مقدار $f^{-1}(27)$ را بیابید .

مثال ۱۲ :

نمودارهای دو تابع $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$ و $y = 3^x + \frac{8}{3}$ در نقطه ی A متقاطع اند . فاصله ی نقطه A از نقطه $B(-1,1)$ به دست آورید

خاصیت نامساوی های نمایی :

فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد .

۱- اگر $a>۱$ و $a^x \geq a^y$ باشد ، آن گاه $x \geq y$ و برعکس

۲- اگر $۰<a<۱$ و $a^x \geq a^y$ باشد ، آن گاه $x \leq y$ و برعکس

نامعادلات نمایی :

برای حل نامعادله های نمایی از خواص بالا استفاده می شود .

مثال۱۳ :

نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $۲^{۲x-۶} \leq \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۳-۳x}$

ب) $(۰/۲)^{x^۲-x} > ۵^{۲x^۲+۳x}$

ج) $\left(\sqrt{۳}-\sqrt{۲}\right)^x+\left(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}\right)^x>۲$

د) $(۰/۰۱)^{x^۲+۲x} \leq ۱$

دامنه تابع $y=a^{f(x)}$ ($a>0$ و $a\neq 1$):

دامنه y با دامنه $f(x)$ برابراست یعنی $D_y=D_f$.

مثال۱۴ :

دامنه توابع زیر را بیابید .

الف) $y=3^{x^2+2x}$

ب) $y=e^{\sqrt{4-x}}$

ج) $y=\sqrt{4^x-\left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}}$

د) $y=\sqrt{(8-2^x)(x^2-12x)}$

هـ) $y=\sqrt{2^x-5^x}$

و) $y=\sqrt{(1-x).3^{x+2}}$

ز) $y=\sqrt{x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)}$

برد تابع $y = a^{f(x)}$ ($a > ۰$ و $a \neq ۱$) :

برد y برابر با a^{R_f} می باشد . یعنی $R_y = a^{R_f}$.

توجه :

همیشه : $a^{f(x)} > ۰$.

مثال۱۵ :

برد توابع زیر را به دست آورید .

الف) $y = ۲^{\sqrt{x}}$

ب) $y = ۵^{۱-x^۲}$

ج) $y = ۲^{۳x+۱}$

د) $y = ۲^{-|x|}$

هـ) $y = ۵^{[x]+[-x]}$

کاربردهایی از تابع نمایی :

محاسبه جرم ثانویه یک ماده هسته ای:

اگر جرم اولیه یک ماده هسته ای $m_\circ$ با نیم عمر n باشد .

پس از گذشت مدت زمان t ، جرم ثانوبه از رابطه ی زیر به دست می آید

$$m_t = m_\circ \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{t}{n}}$$

یا

$$m_t = m_\circ \left(۲^{\frac{-t}{n}}\right)$$

مثال۱۶ :

نیم عمر یک ماده هسته ۲۵ سال می باشد . اگر جرم اولیه آن ۲۴ میلی گرم باشد.

الف) پس از ۵ سال چه مقدار از این ماده باقی می ماند ؟

ب) پس از چند سال جرم باقی مانده آن ۳ میلی گرم است؟

محاسبه رشد جمعیت (سرمایه) :

اگر $P_\circ$ یک جمعیت (سرمایه) اولیه با آهنگ (میزان) رشد r (برحسب درصد) و t مدت زمان باشد .

جمعیت (سرمایه) ثانویه P_t یا $P(t)$ از رابطه ی زیر به دست می آید : $P_t = P(t) = P_\circ(۱+r)^t$

به این معادله ، **تابع رشد** نیز می گویند .

و به معادله $P_t = P(t) = P_\circ(۱-r)^t$ **تابع زوال** گویند .

مثال۱۷ :

یک شهر ۲میلیون نفر جمعیت دارد . اگر میزان رشد سالانه ۲ درصد در سال باشد . پس از گذشت ۵ سال جمعیت این شهر را حساب کنید .

مثال۱۸ :

جمعیت یک شهر ۱۲۰۰۰ نفر می باشد .اگراین جمعیت با آهنگ یک درصد در سال کاهش یابد . پس از گذشت ۴جمعیت این شهر را حساب کنید .

تمرین :

۱– به ازای چه مقدار a تابع $y = a^x\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1}$ یک تابع نمایی کاهشی (نزولی) است ؟

۲– نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن ها را بنویسید .

الف) $y = -3^x + 2$

ب) $y = \left|3^x - 3\right| - 1$

ج) $y = \left|1 - e^{-x}\right|$

د) $y = 2^x + 2^{x+1}$

هـ) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 2$

و) $y = \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^{-3x+3}$

ح) $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1} + 1}$

ط) $y = \frac{3^{x+2} - 3^x}{2^{x+4} - 2^{x+3}}$

۳– معادله های زیر را حل کنید .

الف) $9^x - 4^{x+1} = -3 \times 6^x$

ب) $2^{x+2} + 2^{2-x} = 10$

ج) $4^x + 2^{x+2} = 5$

د) $\left(2 - \sqrt{3}\right)^x + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 2$

هـ) $2^x = x + 1$

و) $\left(\frac{4^{\sqrt{32}}}{2^{\sqrt{8}}}\right)^2 = 2^a$

۴– نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $3^{2x-1} > \frac{1}{243}$

ب) $3\left(5^{2x-1}\right) > 9^x$

ج) $(0/027)^{\frac{-x^2}{3}+1} \le 0/09$

د) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{6-x}$

هـ) $4^x \ge 3 \times 2^x - 2$

و) $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{2x+1} \le \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^{x+2}$

ز) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2[x]} \le 81^{2-[x]}$

ح) $\left(x^2 - 4\right)\left(2^x + 1\right) \le 0$

۵– دامنه توابع زیر را بیابید .

الف) $y=\dfrac{x+1}{2^x-8}$ ب) $y=3^{\sqrt{2x-x^2}}$ ج) $y=\sqrt{e^{x^2+x}}$

د) $y=\sqrt{x(2^x-1)}$ هـ) $y=\sqrt{2^{\frac{4}{x}}-2^x}$

۶– برد توابع زیر را بنویسید .

الف) $y=3^{x-[x]}$ ب) $y=\dfrac{2^{x+1}}{5^{x-1}}$ ج) $y=3^{\sqrt{x}}+1$

۷– اگر نمودارهای تابع $f(x)=a(2)^{bx}$ و خط $4y=5x$ در دو نقطه به طول های ۲ و ۴ متقاطع باشند .

مقدار $f^{-1}(10)$ را حساب کنید .

۸– فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادله های $y=2^x$ و $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x+1}$ از نقطه ی $A(0,4)$ را بیابید .

۹– اگر نمودار تابع $f(x)=a(b)^x-1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ و $B(1,11)$ بگذرد . حاصل $f(-1)$ را حساب کنید .

۱۰–نمودار تابع $y=5^{\frac{3x+6}{2}}-20\left(5\sqrt{5}\right)^{x+\frac{2}{3}}-\frac{1}{5}$ محور طول ها را با کدام طول قطع می کند ؟

۱۱– خط $y=9$ نمودار تابع $y=(0/01)^x-1$ را در چه نقطه ای قطع می کند ؟

۱۲– نموار های دو تابع $f(x)=4^x$ و $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+\frac{3}{2}$ در نقطه A متقاطع هستند . فاصله نقطه A تا نقطه $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

به دست آورید .

تمرین

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y=2x^2-3x+1$ ب) $y=x^3$ پ) $y=(0/1)^x$

ت) $y=(\frac{3}{2})^x$ ث) $y-3x=2$ ج) $y=\sqrt{x-1}$

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1,0)$ ب) $(3,1)$ پ) $(0,1)$ ت) $(\sqrt{3},\frac{1}{3})$ ث) $(1,3)$ ج) $(-1,\frac{1}{3})$

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\sqrt{5}\ ,\ \frac{1}{2})$ روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y=10^x$ با محور yها، نقطهٔ $(0,10)$است.

پ) دامنهٔ توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ و $y=x^2$ مساوی‌اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y=6^x$ با محور xها، نقطهٔ $(6,0)$ است.

۴ الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{1}{2})^{\sqrt{5}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

۵ فرض کنیم $f(x)=3^x$, $g(x)=(\frac{1}{16})^x$ و $h(x)=10^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(3)$ ب) $g(-1)$ پ) $h(-2)$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{3n-2}=\frac{1}{32^2}$ ب) $9^{3y-3}=27^{y+1}$ پ) $4^{3x+2}=\frac{1}{64^3}$

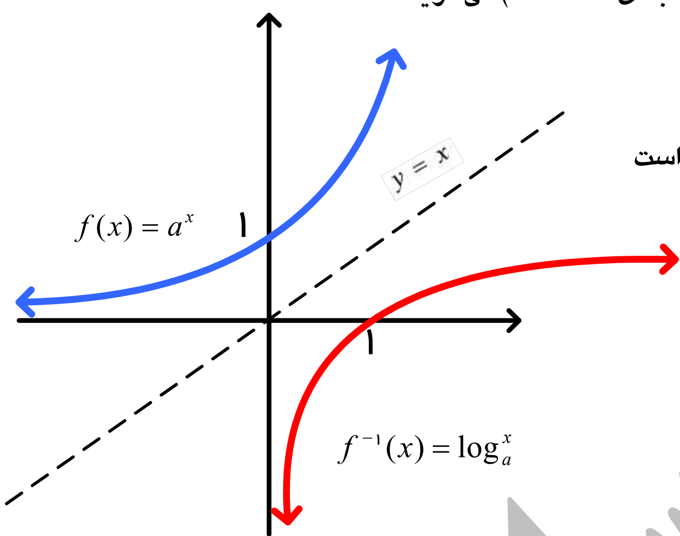
ت) $9^x=3^{x^2-4x}$ ث) $(\frac{3}{5})^{x+1}=\frac{25}{9}$

درس دوم تابع لگاریتم :

تابع نمایی $y=f(x)=a^x$ ($a>0$ و $a\neq 1$) یک به یک است ، بنابراین معکوس پذیر است .

معکوس آن را به شکل $x=\log_a^y$ (بخوانید x مساوی با لگاریتم y در مبنای a است .) می نویسند.

بنابراین می توان نوشت : $f^{-1}(x)=\log_a^x$



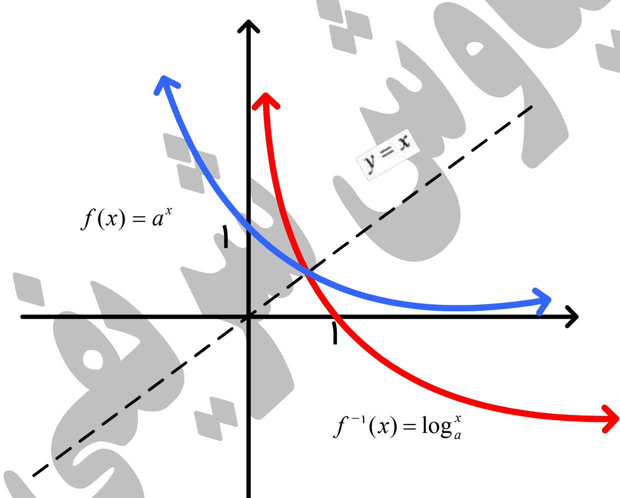
در تابع نمایی $y=f(x)=a^x$ اگر $a>1$ باشد , نمودار به شکل روبرواست

بنابر آنچه گفته شد :

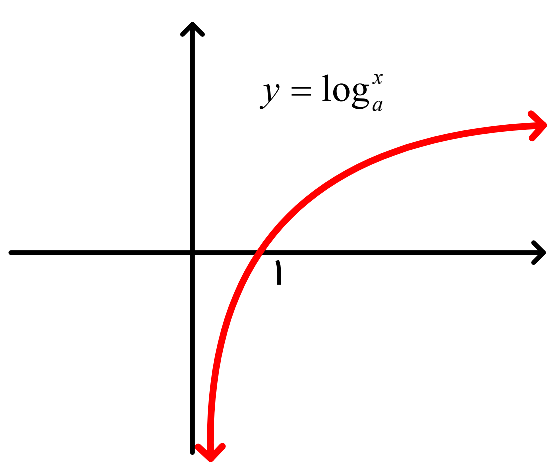
$$D_f=R \quad \Leftrightarrow \quad R_{f^{-1}}$$

$$R_f=(0,+\infty) \quad \Leftrightarrow \quad D_{f^{-1}}=(0,+\infty)$$

و اگر $0<a<1$ باشد نمودار به شکل زیر است :



بنابراین نمودار تابع $y=\log_a^x$ به یکی از دو شکل زیر می باشد :



۱- اگر $a>1$ باشد .

دامنه آن $(0,+\infty)$ است .

برد آن R است .

تابع افزایشی (صعودی) است .

محور y ها (یا خط $x=0$) مجانب قائم آن است .

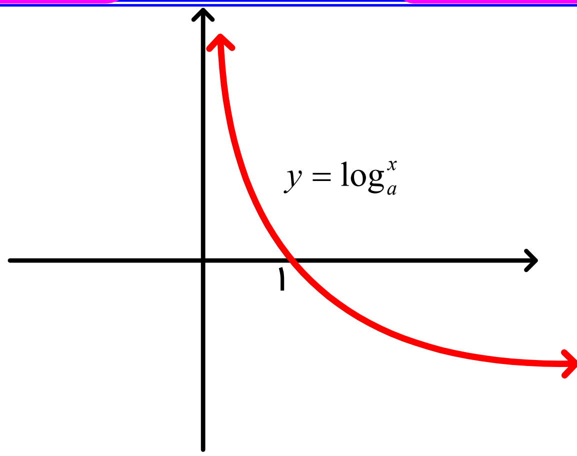
۲- اگر $0 < a < 1$ باشد .

دامنه آن $(0,+\infty)$ است .

برد آن R است .

تابع کاهشی (نزولی) است .

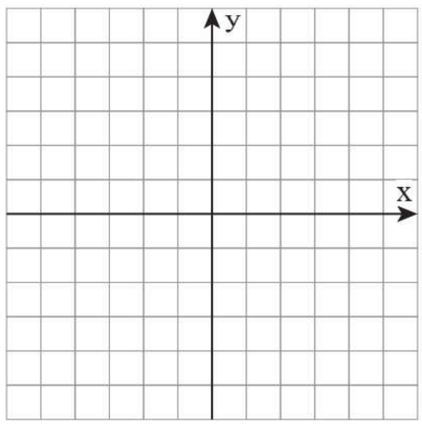
محور y ها (یا خط $x = 0$) مجانب قائم آن است .



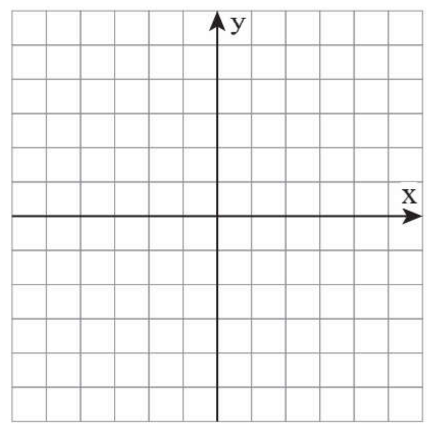
مثال ۱۹ :

نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن ها را بنویسید .

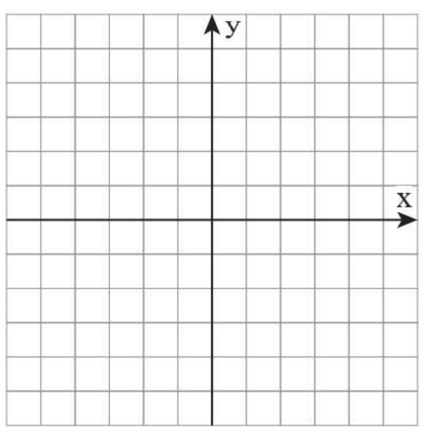
الف) $y=\log_2^{(x-1)}$



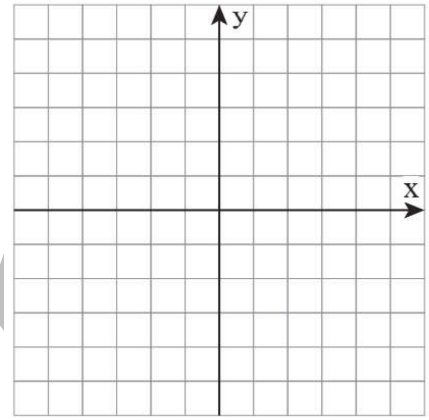
ب) $y=\log_2^x+1$



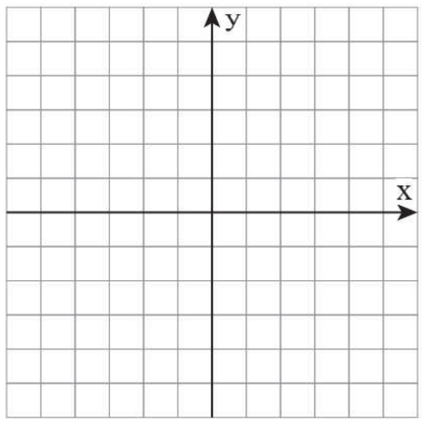
ج) $y=\left|\log_2^x\right|$

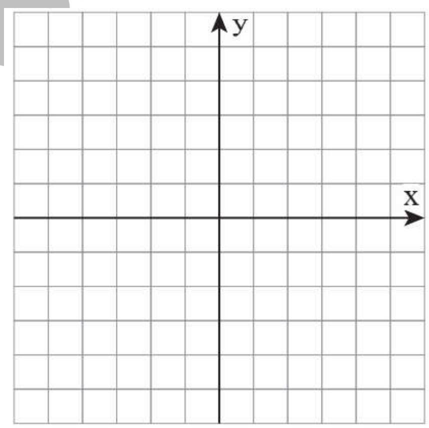


د) $y=\log_{2}^{|x|}$

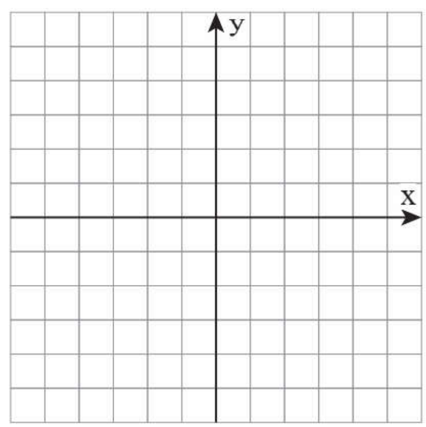


هـ) $y=\left|\log_{2}^{|x|}\right|$

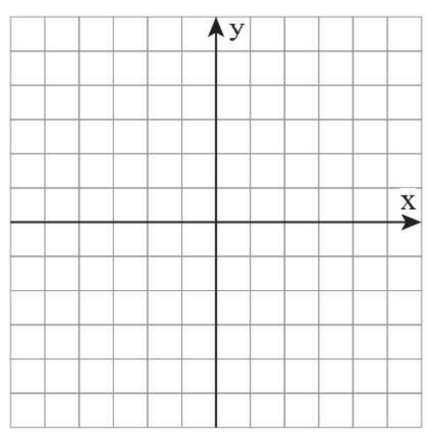




و) $y=-\log_{2}^{x}$



ز) $y=-\log_{2}^{(-x)}$



مثال ۲۰ :

باتوجه به تعریف لگاریتم ؛ هر یک از عبارت های توان دار را به شکل یک عبارت لگاریتمی بنویسید .

الف) $۲^{۵} = ۳۲ \quad \Rightarrow$

ب) $۴^{\left(\frac{۱}{۲}\right)} = ۲ \quad \Rightarrow$

ج) $۵^{۰} = ۱ \quad \Rightarrow$

د) $۳^{-۲} = \frac{۱}{۹} \quad \Rightarrow$

مثال ۲۱ :

هریک از عبارت های لگاریتمی زیر را به شکل یک عبارت توان دار بنویسید .

الف) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} = -۳ \quad \Rightarrow$

ب) $\log_{۳}^{۸۱} = ۴ \quad \Rightarrow$

ج) $\log_{a}^{c} = b \quad \Rightarrow$

د) $\log_{۲}^{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow$

قرارداد :

اگر در لگاریتم مبنا عدد ۱۰ باشد معمولاً آن را نمی نویسند .

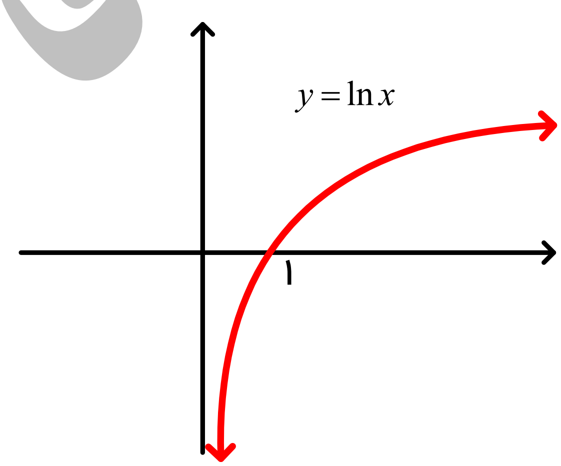
$\log_{۱۰}^{x} = \log^{x} = \log x$.

لگاریتم طبیعی :

اگر مبنای لگاریتم عدد نپر e ($e = ۲/۷۲۸۱۸۲۸۱۸۴۵۹۰۴۵...$ یا مقدار تقریبی $e \cong ۲/۷$) باشد ، آن را لگاریتم طبیعی گویند.

$\log_{e}^{x} = \ln x$ (عبارت $\ln x$ را بخوانید اِل اِن x یا لگاریتم طبیعی x)

بنابراین نمودار تابع $y = \ln x$ به شکل زیر است :



به دست آوردن تابع معکوس توابع نمایی و توابع لگاریتمی :

با توجه به رابطه بین تابع نمایی و تابع لگاریتم می توان معکوس آن ها به دست آورد .

$$y = a^{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{a}^{y}$$

مثال۲۲ :

معکوس توابع زیررا به دست آورید .

الف) $f(x) = ۳^{x} - ۱$

ب) $f(x) = \dfrac{۲^{x} + ۱}{۲^{x} - ۱}$

ج) $y = e^{۲x-۱} + ۲$

د) $y = \log_{۵}^{(x-۳)} - ۱$

هـ) $y = \log_{۳}^{(x^{۳}+۱)}$

و) $y = \dfrac{۲^{x} - ۲^{-x}}{۲^{x} + ۲^{-x}}$

ویژگی های لگاریتم :

دیدیم که

$$y = a^x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log_a^{y}$$

اکنون با توجه به این تعریف ، ویژگی های لگاریتم را ذکر می کنیم :

۱– لگاریتم یک در هرمبنایی برابر با صفرمی باشد یعنی اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک باشد :

$\log_a^{1} = 0$ و نیز $\ln 1 = 0$.

زیرا $a^0 = 1$.

مثال۲۳ :

حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

$\log_{32}^{1} = 0 \qquad \log_{\sqrt{3}}^{1} = 0 \qquad \log_{0/6}^{1} = 0$

۲– لگاریتم هر عدد در مبنای خودش برابر یک می باشد یعنی اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک باشد :

$\log_a^{a} = 1$ و نیز $\ln e = 1$

زیرا $a^1 = a$.

مثال ۲۴ :

حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

$\log_{8}^{8} = 1 \qquad \log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 1 \qquad \log_{0/6}^{0/6} = 1$

۳– اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دوعدد حقیقی مثبت باشند داریم :

$$\log_a^{xy} = \log_a^{x} + \log_a^{y}$$

اثبات :

فرض کنید $\log_a^{x} = s$ پس بنابر تعریف $x = a^s$.

همچنین فرض کنید $\log_a^{y} = t$ پس $y = a^t$.

$$xy = a^s \times a^t = a^{s+t}$$

بنابر تعریف : $s + t = \log_a^{xy}$. که اگر بجای s و t مقادیر فرض شده قرار دهیم نتیجه حاصل می شود .

همچنین : $\boxed{\ln xy = \ln x + \ln y}$

مثال۲۵ :

اگر $\log_{۱۰}^{۲} = ۰/۳۰۱$ و $\log_{۱۰}^{۳} = ۰/۴۷۷$ باشد . حاصل عبارتهای زیر را بنویسید .

الف) $\log_{۱۰}^{۶} =$

ب) $\log_{۱۰}^{۸} =$

۴- اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک و b عددی حقیقی مثبت و n یک عدد طبیعی باشد داریم : $\log_a^{b^n} = n\log_a^b$

اثبات :

$$\log_a^{b^n} = \log_a^{\overbrace{bbb....b}^{n\text{بار}}} = \overbrace{\log_a^b + \log_a^b + ... + \log_a^b}^{n} = n\log_a^b$$

ودر حالت کلی داریم :

۵ - اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک و b عددی حقیقی مثبت و x و y دوعدد حقیقی باشند داریم :

$$\log_{a^y}^{b^x} = \frac{x}{y}\log_a^b$$

مثال۲۶ :

حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) $\log_{\sqrt{۸}}^{۳۲} =$

ب) $\log_{\left(\frac{۱}{۲۷}\right)}^{\sqrt[۵]{۸۱}} =$

ج) $\log_{\sqrt{۲۷\sqrt{۲۷}}}^{\sqrt{۳\sqrt{۳}}} =$

مثال۲۷ :

حاصل $۲^{۳۰۰}$ چند رقمی است ؟ ($\log^{۲} = ۰/۳۰۱$) (اگر $۱۰^n \le a < ۱۰^{n+1}$ باشد . عدد a دارای $n+۱$ رقم است .)

مثال ۲۸ :

اگر $\log_{10}^{2} = 0/301$ و $\log_{10}^{3} = 0/477$ باشد . حاصل عبارتهای زیر را بنویسید .

الف) $\log_{10}^{32} =$

ب) $\log_{0/1}^{12} =$

ج) $\log^{\sqrt{48}} =$

۶- اگر a عددی حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دوعدد حقیقی مثبت باشند داریم :

$$\log_a^{\left(\frac{x}{y}\right)} = \log_a^x - \log_a^y$$

اثبات :

فرض کنید $\log_a^x = s$ پس بنابر تعریف $x = a^s$.

همچنین فرض کنید $\log_a^y = t$ پس $y = a^t$.

پس $\frac{x}{y} = \frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}$ بنابر تعریف :

$$\log_a^{\left(\frac{x}{y}\right)} = s - t = \log_a^x - \log_a^y$$

نتیجه :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

مثال ۲۹ :

اگر $\log_{10}^{2} = 0/301$ و $\log_{10}^{3} = 0/477$ باشد . حاصل عبارتهای زیر را بنویسید .

الف) $\log^{5} =$

ب) $\log^{1/5} =$

ج) $\log^{\left(\frac{12\times\sqrt{5}}{\sqrt[3]{3}}\right)} =$

مثال ۳۰ :

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

الف) $\log_{2}^{5}-\log_{2}^{15}+\log_{2}^{24}+\log_{2}^{20}=$

ب) $\log_{3}^{15}+2\log_{3}^{6}-\log_{3}^{15}-2\log_{3}^{2}=$

مثال ۳۱ :

اگر $\log_{30}^{3}=a$ و $\log_{30}^{5}=b$ باشد حاصل $\log_{30}^{32}$ برحسب a و b به دست آورید .

مثال ۳۲ :

اگر $\left(\log_{6}^{12}\right)^{2}-\left(\log_{6}^{3}\right)^{2}=a$ باشد . حاصل $\log_{6}^{2}$ را بنویسید .

۷– (خاصیت تغییر مبنا) اگر a و b و c سه عدد حقیقی مثبت و b و c مخالف یک باشند . آن گاه داریم :

$$\log_{b}^{a}=\frac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{b}}$$

اثبات :

فرض کنید $\log_{c}^{a}=x$ بنابراین $a=c^{x}$

و $\log_{c}^{b}=y$ پس $b=c^{y}$.

حال اگر در عبارت $\log_{b}^{a}$ بجای a و b مقادیر مساوی قرار دهیم بنابر خاصیت (۵) داریم :

$$\log_{b}^{a}=\log_{c^{y}}^{c^{x}}\underset{(5)}{=}\frac{x}{y}\log_{c}^{c}=\frac{x}{y}=\frac{\log_{c}^{a}}{\log_{c}^{a}}$$

توجه :

این خاصیت به ما اجازه می دهد از یک مبنا به مبنای دیگر برویم

همچنین این خاصیت زمانی به کار می آید که در یک مبنا راحت نیستیم و یا مقدارش در مبنای داده شده مشخص نیست .

مثال۳۳ :

اگر $\log_{۱۰}^{۲}=۰/۳۰۱$ و $\log_{۱۰}^{۳}=۰/۴۷۷$ باشد . حاصل عبارتهای زیر را بنویسید .

الف) $\log_{۳}^{۲}=$

ب) $\log_{۱۶}^{۲۴۳}=$

ج) $\log_{۶۰}^{۳۶}=$

مثال۳۴ :

اگر $\log^{۲}=a$ باشد . حاصل $\log_{۴}^{۱۲۵}$ را حساب کنید .

به عنوان نتایج خاصیت قبل ، در ادامه دو خاصیت ۸ و ۹ را داریم :

۸ - اگر a ، b ، c و d اعداد حقیقی مثبت و b ، c و d مخالف یک باشند آنگاه

$$\log_{b}^{a}\times\log_{c}^{b}\times\log_{d}^{c}=\log_{d}^{a}$$

اثبات :

$$\log_{b}^{a}\times\log_{c}^{b}\times\log_{d}^{c}=\frac{\log_{d}^{a}}{\cancel{\log_{d}^{b}}}\times\frac{\cancel{\log_{d}^{b}}}{\cancel{\log_{d}^{c}}}\times\frac{\cancel{\log_{d}^{c}}}{\underbrace{\log_{d}^{d}}_{۱}}=\log_{d}^{a}$$

مثال۳۵ :

حاصل عبارت $A=\log_{\sqrt{۲۷}}^{۳۲}\times\log_{۴۹}^{۸۱}\times\log_{۱۲۵}^{\sqrt{۷}}\times\log_{۸}^{۵\sqrt{۵}}$ را به دست آورید .

۹ – اگر a و b دوعدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشند آن گاه :

$$\log_b^a \times \log_a^b = 1 \quad \text{یا} \quad \log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

مثال۳۶ :

حاصل $A = \frac{1}{1+\log_2^3} + \frac{1}{1+\log_3^2}$ را حساب کنید .

۱۰ – اگر a و b و c سه عدد حقیقی مثبت و c مخالف یک باشد آن گاه : $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

اثبات :

فرض کنید $\log_c^a = x$ بنابراین $a = c^x$.

همچنین $\log_c^b = y$ پس $b = c^y$.

دو طرف تساوی $a = c^x$ را به توان $\log_c^b$ می رسانیم : $a^{\log_c^b} = \left(c^x\right)^{\log_c^b} \overset{y=\log_c^b}{=} \left(c^x\right)^y = c^{xy}$

دو طرف تساوی $b = c^y$ را به توان $\log_c^a$ می رسانیم : $b^{\log_c^a} = \left(c^y\right)^{\log_c^a} \overset{x=\log_c^a}{=} \left(c^y\right)^x = c^{xy}$

بنابراین تساوی برقرار است .

مثال ۳۷ :

حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) $2^{\log_8^3} =$

ب) $25^{\log_5^{\sqrt{2}}} =$

اگر در خاصیت قبل بجای c مقدار b قرار دهیم خاصیت زیر به دست می آید :

۱۱- اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و a مخالف یک باشد آن گاه : $a^{\log_a^b} = b$

نتیجه :

$$e^{\ln a} = a$$

مثال۳۸ :

حاصل عبارت زیر را بنویسید .

$$3^{\log_9^{25} + \log_3^4} =$$

مثال ۳۹ :

نمودار تابع $y = 9^{\log_3^x}$ را رسم کنید .

از خاصیت زیر در حل معادلات لگاریتمی می توان استفاده کرد:

۱۲- فرض کنید a و b و c سه عدد حقیقی مثبت و c مخالف یک باشد

$$\log_c^a = \log_c^b \Leftrightarrow a = b$$

که به دلیل یک به یک بودن تابع لگاریتم برقرار است .

معادلات لگاریتمی :

برای حل یک معادله لگاریتمی ابتدا هرطرف تساوی معادله را به کمک خواص لگاریتم ساده می کنیم.

سپس از یکی خواص زیر استفاده کرده ومعادله را حل می کنیم :

۱- $x = \log_a^y \Leftrightarrow y = a^x$

۲- $a = b \Leftrightarrow \log_c^a = \log_c^b$

جواب هایی قابل قبول هستند که به ازای آنها عبارت جبری جلوی همه لگاریتم های موجود ، مثبت شود .

و چنانچه مقدار مجهول در مبنای لگاریتم باشد ، علاوه بر مثبت بودن ، نباید مقدار آن **عدد یک** شود.

توجه :

در بعضی از معادله ها ، می توان از تغییر متغیر استفاده کرد .

مثال ۴۰ :

معادله های لگاریتمی داده شده را حل کنید .

الف) $\log_{۲}^{۲x}-\log_{۲}^{(x-۳)}=۱$

ب) $\log^{(x+۳)}+\log^{(x-۳)}-\log^{x}=۳\log^{۲}$

ج) $\log_{۳}^{(۲x^{۲}+۱)}-\log_{۳}^{(x+۲)}=۱$

د) $\log_{۲}^{x}+\log_{x}^{۱۶}=۵$

هـ) $\log(۳x-۲)=(\log ۵)^{۲}-(\log ۲)^{۲}$

و) $\log_{۲}^{۲(x-۱)^{۳}}=۵-\log_{(\frac{۱}{۳})}^{(x-۱)}$

ز) $\ln(x-1)+\ln(x-8)=\ln 24-\ln 3$

مثال۴۱ :

نمودار تابع $f(x)=\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}^{(ax+b)}$ محور xها را در نقطه ای به طول ۲ و خط $2x+y=1$ را در نقطه ای به عرض ۱− قطع می کند.

حاصل $f(-2)$ را حساب کنید .

دستگاه معادلات لگاریتمی :

گاهی اوقات به جای یک معادله لگاریتمی ، یک دستگاه معادله لگاریتمی به ماداده می شود . برای حل این گونه دستگاه ها معمولاً باید از یک معادله یک مجهول را برحسب مجهول دیگر نوشته و آن را در معادله دیگر جای گذاری نموده تا به یک معادله لگاریتمی یک مجهولی برسیم .

مثال ۴۲ :

دستگاه های زیر را حل کنید .

الف) $\begin{cases}\log(y+2)=1\\ \log(y-x)+\log(4x+y)=2\end{cases}$

ب) $\begin{cases} \ln(y+x-۱)+\ln(۲y+۳)=۰ \\ \ln(x-۴y)=۲\ln ۲ \end{cases}$

نامعادله های لگاریتمی :

برای حل نامعادله های لگاریتمی از دو خاصیت زیر استفاده می کنیم .

۱- اگر $\log_a^{f(x)} \ge \log g_a^{g(x)}$ $(a>۱)$ آن گاه $f(x)\ge g(x)$ و برعکس .

۲- اگر $\log_a^{f(x)} \ge \log g_a^{g(x)}$ $(۰<a<۱)$ آن گاه $f(x)\le g(x)$ و برعکس .

توجه :

در حل نامعادله های لگاریتمی ، نامساوی های $f(x)>۰$ و $g(x)>۰$ نیز باید در نظر گرفته شود .

مثال۴۳ :

نامعادله های زیر را حل کنید .

الف) $\log_۳^{(۵-x)} \le ۰$

ب) $\log_۳^{(۲x+۱)} < \log_۳^{۳x}$

ج) $\log_{۰/۵}^{(x+۱)} + \log_{۰/۵}^{(x-۱)} < \log_{۰/۵}^{(۴x-۴)}$

د) $\log_{0/1}^{(6-x)} \geq \log_{0/1}^{(x-2)}$

دامنه توابع لگاریتمی :

دامنه تابع لگاریتمی $y=\log_{(g(x))}^{(f(x))}$ از اشتراک جواب سه نامعادله زیر به دست می آید .

۱) $f(x)>0$ ۲) $g(x)>0$ ۳) $g(x)\neq 1$

توجه :

اگر مبنای لگاریتم عددی حقیقی مثبت و مخالف یک باشد نیاز به بررسی شرط ۲ و ۳ نیست .

مثال ۴۴ : دامنه توابع زیر را به دست آورید .

الف) $y=\log_{2}^{(8x-x^2)}$

ب) $y=\log_{0/1}^{\left(\frac{2x-3}{x+2}\right)}$

ج) $y=\log_{(x)}^{(x^2-6x+9)}$

د) $y=\log_{(4-x)}^{\sqrt{x}}$

هـ) $y=\sqrt{\log_{3}^{(x-2)}}$

و) $y=\dfrac{\log_x^{۲}}{\log_{۳}^{(۸-x)}-۱}$

ز) $y=\sqrt{۲-\log_{۵}^{(x+۳)}}$

کاربرد لگاریتم در محاسبه رشد جمعیت (سرمایه) :

در قسمت های، کاربرد تابع نمایی در محاسبه رشد جمعیت(سرمایه) گفته شد. به مثالی بحث را کامل می کنیم.

مثال۴۵ :

پس از چند سال جمعیت کشوری با آهنگ رشد سالانه ۲درصد در سال ، ۴ برابر می شود ؟ ($\log^{۲}=۰/۳۰۱$)

کاربرد لگاریتم در زلزله :

اگر زلزله ای با قدرت M در واحد ریشتر رخ دهد، میزان انرژی آزاد شده (E) برحسب واحد اِرگ (Erg) توسط این زلزله از رابطه ی زیر به دست می آید .

$$\log^{E}=۱۱/۸+۱/۵M$$

($۱Erg=۱۰^{-۷}J$)

مثال۴۶ :

میزان انرژی آزاده شده از زلزله ای با قدرت ۷/۲ در واحد ریشتر چند ارگ است؟

مثال۴۷ :

میزان تخریب زلزله ای با قدرت ۷ ریشتر چند برابر زلزله ای با قدرت ۵ ریشتر است ؟

کاربرد لگاریتم در تخمین قدمت اشیاء :

در قسمت تابع نمایی گفته شد که جرم ثانویه مواد هسته را می توان از رابطه ی زیر حساب کرد .

$$m_t = m_{\circ}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{t}{n}}$$

از این رابطه برای تخمین قدمت اشیاء استفاده می شود .

مثال۴۸ :

میزان ئیدروژن موجود در یک قطعه چوب ۲۰ درصد مقدار اولیه آن است . اگر نیم عمر ئیدروژن ۱۲/۳ سال باشد.
عمر این قطعه چوب را تخمین بزنید . ($\log^{۲} = ۰/۳۰۱$)

تمرین :

۱– نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن ها را بنویسید .

الف) $y = \log_{۳}^{\sqrt{x}}$

ب) $y = \begin{cases} \log_{۲}^{x} & , \quad x \geq ۱ \\ x^{۲} - ۱ & , \quad x < ۱ \end{cases}$

ب) $y = \left|۱ - \log_{۲}^{|x|}\right|$

د) $y = \left|۱ - \log_{۲}^{x}\right|$

$$y = \begin{cases} ۲^{x} & , \quad x < ۰ \\ ۱ - x & , \quad ۰ \leq x < ۱ \\ \log_{۲}^{x} & , \quad x \geq ۱ \end{cases}$$

۲– اگر $\log^{۲}=۰/۳۰۱$ و $\log^{۳}=۰/۴۷۷$ و $\log^{۷}=۰/۸۴۵$ باشد . حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) $\log^{\left(\frac{۱۲\sqrt{۷}}{۲۵}\right)}$ ب) $\log_{۴}^{۱۲۵}=$ ج) $\log_{۳}^{۸\sqrt{۳۲}}=$

۳– حاصل عبارت های زیر را بنویسید .

الف) $A=۴\log_{\left(\frac{۱}{\sqrt{۱۲۵}}\right)}^{(۲۵\sqrt{۵})}-۶\log_{\sqrt{۰/۱}}^{۱۰۰۰۰}+\log_{۸۱\sqrt{۳}}^{۹\sqrt{۲۷}}=$

ب) $B=۵^{-۱+\log_{\sqrt{۵}}^{۲}}+۶\log_{۸\log_{۴}^{۲\sqrt{۲}}}^{۴\left(۳+۸\log_{۴}^{۲\sqrt{۲}}\right)}=$

ج) $C=\log_{۸۱}^{۵\sqrt{۵}}\times\log_{۳۲}^{۲۷}\times\log_{۱۲۵}^{۴۹}\times\log_{\sqrt{۷}}^{۸}=$

د) $D=۷^{۲\log_{۴۹}^{۲}+۳\log_{۴۹}^{۳}}+\sqrt{۱۰}^{\left(\log^{۵}\right)}=$

هـ) $E=(\log ۲)^{۲}+(\log ۵)(\log ۲۰)$

۴– اگر $\log^{۲}=a$ باشد . حاصل $\log^{\sqrt[۳]{۱/۶}}$ و $\log\left(۶-۲\sqrt{۵}\right)+۲\log\left(۱+\sqrt{۵}\right)$ را بر حسب a بنویسید .

۵– اگر $۳^{a}=A$ باشد . حاصل $\log_{۳}^{۹A^{۲}}$ را بر حسب a بنویسید .

۶– اگر $\log_{۸}^{۲(\sqrt[۳]{۰/۲۵})}=A$ باشد . حاصل $\log_{۴}^{\left(\frac{۱}{A}-۱\right)}$ را حساب کنید .

۷– اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt{۳}$ برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد . لگاریتم $a^{۳}+۷$ در پایه ۸ را حساب کنید .

۸– اگر $\log_{۱۵}^{۵}=a$ باشد . حاصل $\log_{۹}^{۲۵}$ را بر حسب a بنویسید .

۹– اگر $\log^{۲}=a$ باشد . حاصل $\log_{۲۰}^{۱/۶}$ را بر حسب a بنویسید .

۱۰- حاصل $\frac{۲}{\log_{۱۲}^{۲}}+\frac{\log_{۵}^{۹}}{\log_{۰/۲}^{۲}}$ را بنویسید .

۱۱- ضابطه تابع معکوس ، توابع زیر را بنویسید .

الف) $f(x)=\frac{۳^{x}-۱}{۳^{x}+۱}$ ب) $g(x)=\sqrt{e^{۶x+۲}}$ ج) $h(x)=\frac{۲^{x}-۲^{-x}}{۲^{x}+۲^{-x}}$

ج) $f(x)=\log^{\left(\log^{(x-۱)}\right)}$ د) $g(x)=۳\log_{۳}^{(x-۲)}-۱$

۱۲– معادله های زیر را حل کنید .

الف) $\log^{(x-۱)}+\log^{(x-۲)}=\log^{(x^{۲}+۱)}$ ب) $\log_{۲}^{x}-۲\log_{x}^{۲}=۱$

ج) $\left(\log_{۲}^{x}\right)^{۲}-۹\log_{۸}^{x}=۴$ د) $\log_{۳}^{(x^{۲}-۷x+۱)}=۱+\log_{۳}^{(۲-x)}$

هـ) $\log_{۲}^{۴x}\times\log_{۲}^{\left(\frac{x}{۴}\right)}=۵$ و) $\log(۳x-۲)=(\log ۵)^{۲}-(\log ۲)^{۲}$

ز) $۲۵^{\log x} - ۴ \times x^{\log ۵} = ۵$

ح) $\dfrac{۱}{۵-۴\log x} + \dfrac{۴}{۱+\log x} = ۳$

ط) $\log(x+۱) - \frac{۱}{۲}\log(x-۱) = \log ۳$

ی) $\log_x(۲x^۲-۴x+۳) = ۲$

۱۳– دستگاه های زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} y^۲ = x-۴ \\ \log_۲ x = ۲ + \log_۲ y \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \log(۲y-۳x) + \log ۲ = ۰ \\ \log(۲x+۱) + \log(y-۲) = \log ۳ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} \log(y+۲) = ۱ \\ \log(y-x) + \log(۴x+y) = ۲ \end{cases}$

د) $\begin{cases} ۴^x + ۲^x = ۷۲ \\ \log(x+۱) + \log(۲y+x^۲) = ۲ \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} ۴^x = ۴\sqrt{۲} \\ \log y = ۱ + \log\sqrt{x+۱} \end{cases}$

۱۴ – نامعادله های زیر را حل کنید .

الف) $\log_۴(۲x) \le \log_۴(x^۲-۳)$

ب) $\log_{\left(\frac{۱}{۲}\right)}(x-۱) \ge ۲$

ج) $(\log x)^۲ - ۴ \ge ۰$

د) $\log_{۰/۵}(x+۱) + \log_{۰/۵}(x-۱) < \log_{۰/۵}(۴x-۴)$

هـ) $\log_{۰/۵}(۵x-x^۲) \ge -۲$

و) $\log_{۰/۳}(۶-x) < \log_{۰/۳}(x-۲)$

۱۵ – دامنه توابع زیر را به دست آورید .

الف) $y = \log_{(۳x-۲)}\left(\dfrac{۴x+۱}{۳-x}\right)$

ب) $y = \log_x(۲-|x|)$

ج) $y = \sqrt{۱-\log(x-۱)}$

د) $y = \log_۲\left(\log_۵(۱-x)\right)$

هـ) $y = \dfrac{\ln(۵-x)}{۱+\log_۲(x-۱)}$

و) $y = \log_{۰/۲}(۲-x-x^۲)$

۱۶ – اگر $\log ۲$ و $\log(۲^x-۲)$ و $\log(۲^x+۲)$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند. مقدار x رابیابید .

۱۷ – تابع $f(x) = \log_۳(ax+b)$ فقط برای $x \in (-\frac{۱}{۲}, +\infty)$ با معنی است . اگر $f(۴) = ۲$ باشد . مقادیر a و b رابیابید.

۱۸ – جمعیت شهری با نرخ زوال یک درصد در سال کم می شود . با این روند با گذشت چند سال ، جمعیت این شهر نصف جمعیت فعلی آن می شود . ($\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۹۹ = ۱/۹۵۵$)

۱۹ – نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۰ سال است . پس از گذشت چند سال ۴۰درصد مقدار اولیه آن باقی می ماند؟

۲۰ – میزان انرژی آزاد شده در زلزله ای برابر با $۱۰^{۲۱/۷}\, erg$ بوده است . این زلزله چند ریشتر بوده است؟

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_5 x = 3$

۲ $\log_2(2x+1) = 3$

۳ $\log_2(x+1)+\log_2(x+4) = 2$

۴ $\log_3 243 = 2x+1$

۵ $\log_3(x-1) = 4$

۶ $\log(2x)-\log(x-3) = 1$

۷ $2\log_4(x-1) = 3$

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_7 \sqrt[5]{49}$

ب) $\log_3 27^{\frac{1}{2}}$

پ) $-\log_5 125$

ت) $3\log_{10}\sqrt{1000}$

۳ اگر $f(x) = 3-2\log_4(\frac{x}{2}-5)$ ، مقدار $f(42)$ را به‌دست آورید.

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_a x$ از نقطهٔ $(2,2)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_a x$ از نقطهٔ $(-4, \frac{1}{2})$ عبور کند، مقدار a چند است؟

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید.

۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

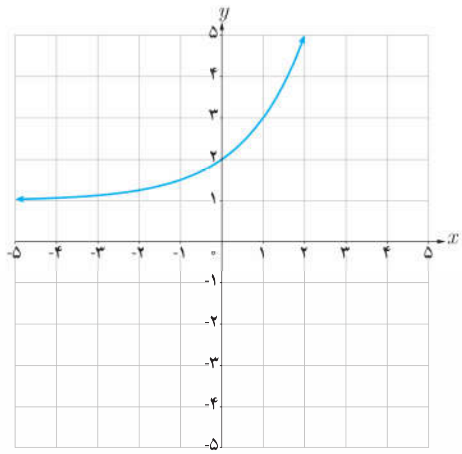
الف) اگر $y=\log_a x$ ، آنگاه $a^x=y$.

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ از نقطهٔ $(1,0)$ عبور می‌کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

تمرین

۱) در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به‌دست آورید.



۲) فرض می‌کنیم $g(x)=4^x+2$. الف) $g(-1)$ را به‌دست آورید. ب) اگر $g(x)=66$، مقدار x چقدر است؟

۳) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=4^x-1$ را در بازهٔ $[-2,2]$ رسم کنید.

۴) نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=-2^x+1$ ب) $y=-\log_2(x-1)$

پ) $y=2^{|x|}$ ت) $y=\frac{|x|}{x}\log x$

۵) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_3(p^2-2)=\log_3 p$ ب) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=1$

پ) $3\log_4 a-\log_4 5=\log_4 25$ ت) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2-21)=-2$