

تابع خطی:

تعریف



تابع‌هایی را که بتوان با قانون $f(x) = ax + b$ (و a و b دو عدد مشخص هستند) نوشت، تابع‌های خطی می‌نامند. دامنه این تابع‌ها می‌تواند \mathbb{R} یا هر زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد. نمودار تابع‌های خطی با دامنه \mathbb{R} به صورت خط راست است. ویژگی اساسی تابع‌های خطی، آن است که به ازای هر ۱ واحد افزایش یا کاهش متغیر تابع، مقدار تابع به اندازه ثابتی تغییر می‌کند.

تمامی توابع به درجه ۱ باشند یا درجه صفر تابع

خطی هستند مثل $y = 4x - 4$

$y = -5$, $y = -2x$

این توابع خطی هستند و به ازای هر ۱ واحد

افزایش x مقدار تابع (y) به اندازه ثابتی

تغییر می‌کند. که آن مقدار ثابت

شیب خط (m) نیز می‌باشد.

به عنوان مثال تابع $f(x) = 2x - 1$

اگر نظر بگیریم با توجه به جدول دیده می شود که هر چه x واحد افزایش داشته،

$f(x)$ با همان مقدار 2 واحد اضافه می شود.

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	3	5

$2 \times 1 - 1 = 1$ $2 \times 2 - 1 = 3$ $2 \times 3 - 1 = 5$

+2 +2 +2

شیب خط = 2

x	1	2	3	4
$g(x)$	5	0	-5	-10

-5 -5 -5

شیب $m = -5$

نکات شیب خط ۱

۱- شیب خط در تابع خطی، همان ضریب

عداست. $۱- = شیب$ $۲- = ۲$ $۳- = ۳$

۲- شیب خط نشان دهنده تغییران امراس

یا کاهش مقدار تابع، به ازای هر واحد

اقراس عداست.

مثلاً اگر شیب مساوی ۳ باشد یعنی اگر

عد، ۱ واحد اضافه شود ۳ به اندازه ۳

واحد اقراس دارد.

رسم خط

برای رسم تابع خطی، ابتدا نقطه کافیت، اگر دامنه به صورت بازه داده شود، ابتدا و انتهای بازه کافیت در غیر این صورت α در نقطه صفر قرار می‌دهیم.

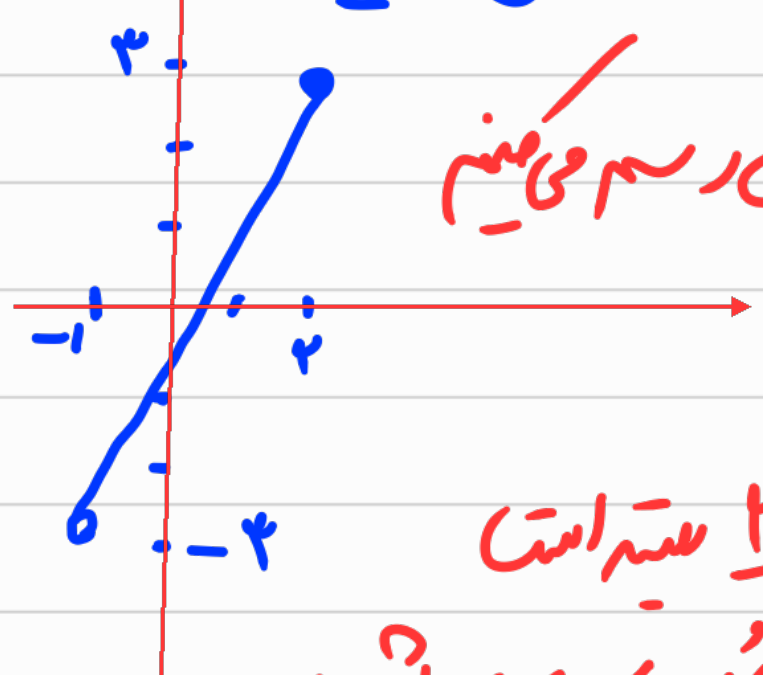
دامنه $[-1, 2]$ $y = 2x - 1$

برای رسم این تابع α کافیت -1 و 2 را

α	$y = 2\alpha - 1$
-1	$-1 \times 2 - 1 = -3$
2	$2 \times 2 - 1 = 3$

به جای α قرار دهیم $\Rightarrow [2, 3]$ و $[-1, -3]$

و در رسم می‌گیریم و به صورت خط وصل می‌کنیم.



نقطه: $[-1, -3]$ را توپالی رسم می‌کنیم

عوض بازه $[-1, 2]$

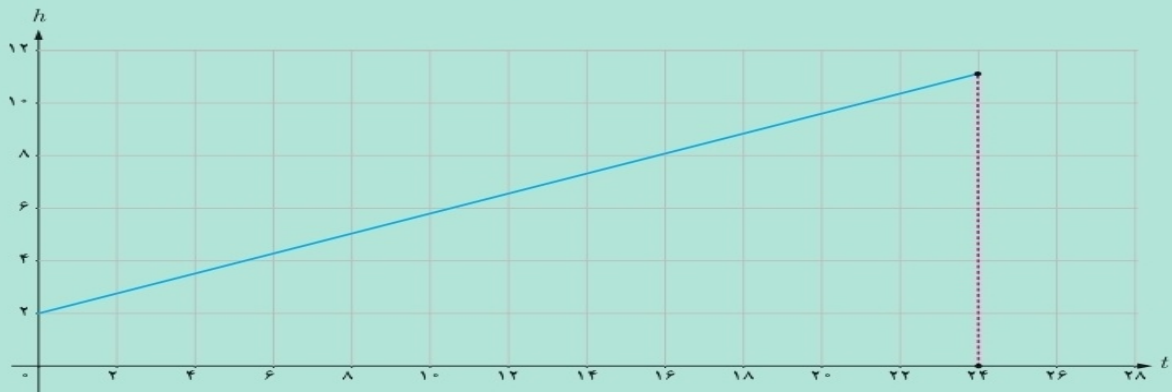
در -1 بازو در 2 بسته است

پس نقطه $[2, 3]$ توپالی رسم می‌شود.

نوعی بامبو پس از آنکه به ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر می‌رسد، به‌طور تقریبی در هر ساعت $\frac{3}{8}$ سانتی‌متر رشد می‌کند. ارتفاع بامبو تابعی از زمان است و اگر ارتفاع بامبو را (برحسب سانتی‌متر) پس از t ساعت با $h(t)$ نشان دهیم داریم: $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$.
 اگر رشد بامبو را در یک شبانه‌روز در نظر بگیریم، دامنه این تابع $[0, 24]$ خواهد بود.
 ۱ جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

t (برحسب ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (برحسب سانتی‌متر)	۲۰	۲۳٫۸	۲۷٫۶	۳۱٫۴	۳۵٫۲
		$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

نمودار زیر، نمودار تابع $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$ را نشان می‌دهد.



۲ به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t ، مقدار h چه تغییری می‌کند؟

۳٫۸ واحد افزایش می‌یابد

۳ رابطه بین دو کمیت h و t ، خطی است یا غیر خطی؟ چرا؟ خطی است چون به ازای هر واحد افزایش t ، تابع مقدار ثابتی افزایش می‌یابد

۴ $h(2)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ $h(18)$ چطور؟

۵ اگر $h(a) = 39$ ، a را پیدا کنید. این مقدار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۴ - $h(2)$ ارتفاع بامبو بعد از ۲ ساعت و $h(18)$ ارتفاع " " " " ساعت را نشان می‌دهد

۵ - وقتی بعد از گذشت چند ساعت ارتفاع ۳۹ می‌شود.

$$h(a) = 3,8a + 20 = 39 \Rightarrow 3,8a = 39 - 20$$

$$\Rightarrow 3,8a = 19 \Rightarrow a = \frac{19}{3,8} = 5 \text{ ساعت}$$



کار در عمل! صفحه ۳۷

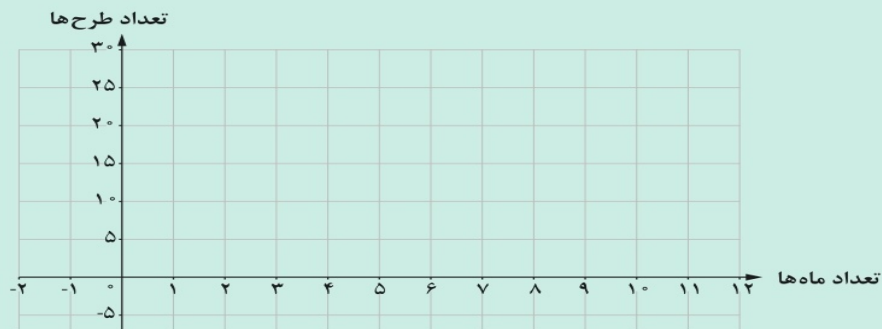
رضا علاقه زیادی به طراحی داشت. او تا سال قبل، ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد.

۱ رضا قبل از این تصمیم، چند طرح داشت؟ او در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

۲ اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با $f(x)$ نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنه آن را بنویسید.

۳ مقادیر $f(0)$ ، $f(10)$ را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا $f(-1)$ معنایی دارد؟

۴ اگر دامنه تابع را بازه $[0, 12]$ در نظر بگیریم، نمودار تابع را رسم کنید.



۵ اگر $f(a) = 17$ مقدار a را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید.

۱ ۵ طرح تا سال قبل - در آخر ماه اول ۷ طرح - در آخر ماه پنجم $15 = 5 + 2$

۲ $f(x) = 2x + 5$ چون عمل طراحی فقط ۱۲ ماه ادامه دارد، دامنه این تابع مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 12\}$ است.

۳ $f(0)$ یعنی رضا قبل از این تصمیم، ۵ طرح داشته است.

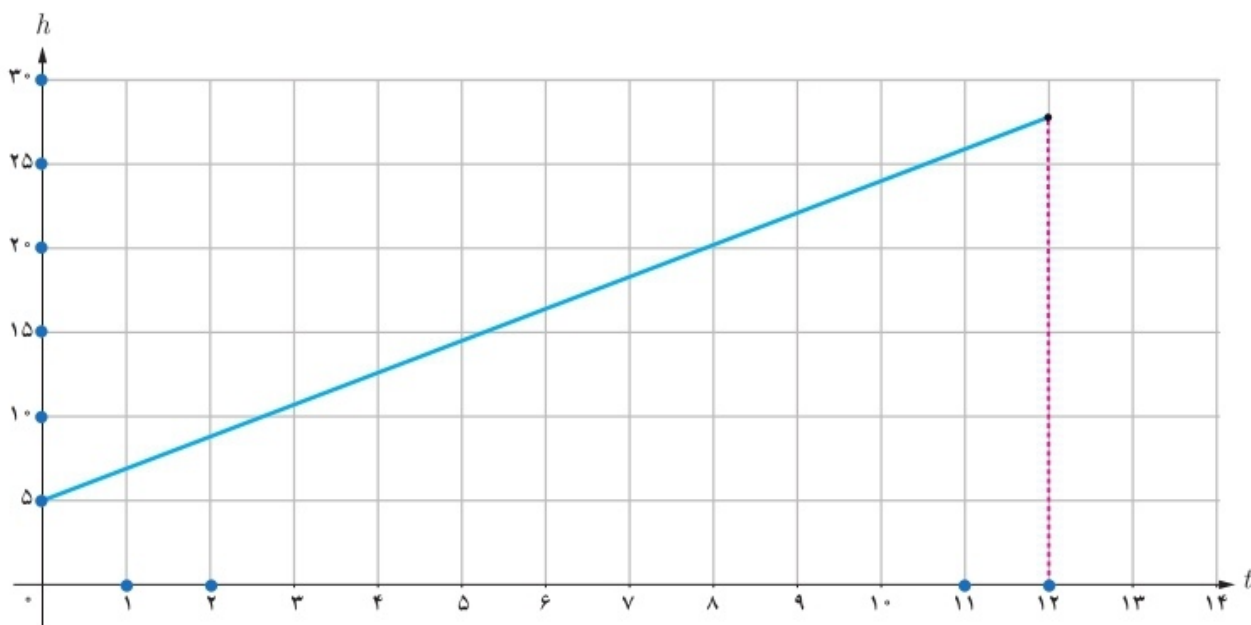
$$f(0) = 2 \times 0 + 5 = 5$$

$f(10)$ یعنی رضا بعد از ماه دهم، ۱۵ طرح دارد.

$$f(10) = 2 \times 10 + 5 = 25$$

$f(-1)$ معنا ندارد زیرا این تابع فقط از ماه اول به بعد را توصیف می‌کند و در مورد قبل از آن اطلاعاتی را نمی‌دهد.

۴ دامنه واقعی تابع مجموعه گسسته $\{0, 1, 2, \dots, 12\}$ است ولی در اینجا دامنه را به صورت بازه $[0, 12]$ در نظر گرفته ایم.



۵- $17 = 5 + 2a$ یعنی در ماه خنجر رضا
 ۱۷ طرح دارد. کسی توان برای بدست آوردن
 آن یا به صورت ذهنی (چون آسان است)
 یا معادله a را بدست آورد.
 $17 = 5 + 2a \Rightarrow 17 - 5 = 2a \Rightarrow$
 یعنی ماه ششم ۱۷ طرح دارد. $a = 6$
 $12 = 2a \Rightarrow a = 6$

- تابع ثابت:

- تابعی که به ازای تمامی مقادیر دامنه فقط مقدار

برای آن وجود دارد و اصلاً تغییر نمی‌کند **نسبت = ۵**

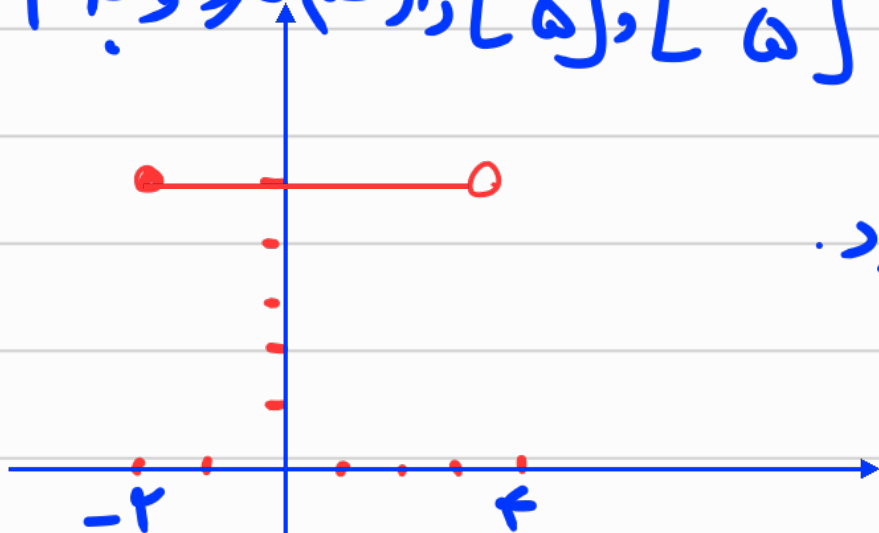
مثلاً $f(x) = 5$ در دامنه $(-2, 4)$ یعنی

$f(1) = 5$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$ و ...

اسم تابع ثابت: خطی موازی محور x ها است

برای رسم گراف $[5, 5]$ داریم که در $x = 4$ و $x = -2$

به صورت خط وصل کرد.



نقطه $[5, 5]$ توخالی!

چون 4 عضو دامنه نیست و بازه $(-2, 4)$ در 4 باز است.

نسبت خط = ۵ (صفر)

خطوط موازی:

نکته: تمامی خطوط با شیب یکسان موازی هستند.

مثلاً شیب $y = 2x - 5$ و $y = 2x + 2$ و $y = 2x$

برابر ۲ است. و این خطوط با هم موازی اند.

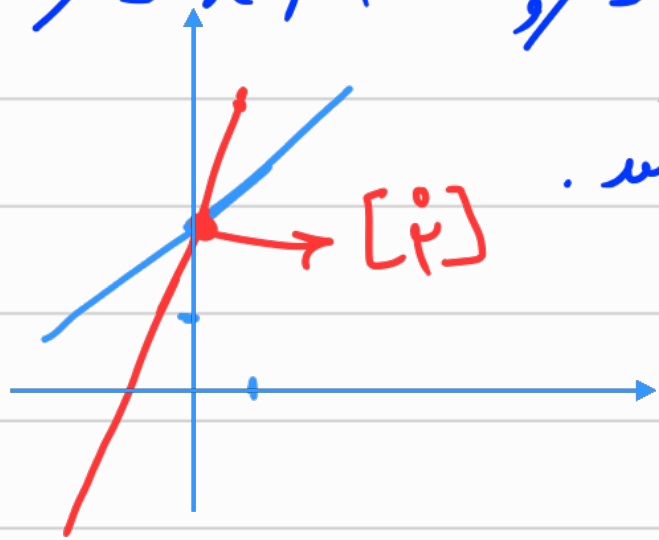
وضعیت خطوط به صورت $y = ax + 2$

تمامی این خطوط در نقطه $[2, 0]$ محدود می‌شوند.

چون عرض از مبدا همه یکی است.

مثلاً $y = 2x + 2$ و $y = x + 2$

در نقطه $[2, 0]$ مشترک هستند.



مسائل: صنف ۴۴ و ۴۵

۱ در زیر، جدول مقادیر مربوط به چهار تابع داده شده است. کدام جدول می تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟

$$\left\{ \begin{array}{l} [-25] \\ m = -15 \end{array} \right. \rightarrow g(x) = -15x - 25$$

x	-2	-1	0	1
$g(x)$	5	-10	-25	-40

$\xrightarrow{-15}$
 $\xrightarrow{-15}$
 $\xrightarrow{-15}$

خطی نیست

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-8	-1	0	1

$\xrightarrow{+7}$
 $\xrightarrow{+1}$
 $\xrightarrow{+1}$

x	0	1	2	3
$k(x)$	1	3	5	7

$\xrightarrow{+2}$
 $\xrightarrow{+2}$
 $\xrightarrow{+2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} [1] \\ m = 2 \end{array} \right. \rightarrow k(x) = 2x + 1$$

$$h(x) = 5$$

x	-2	-1	0	1
$h(x)$	5	5	5	5

۲ علی در یک شرکت بیمه کار می‌کند. او ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان به‌عنوان حقوق پایه دریافت می‌کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می‌کند، ۵۰,۰۰۰ تومان به حقوقش اضافه می‌شود. الف) قانونی برای حقوق علی به‌عنوان تابعی از تعداد مشتری‌هایی که ماهانه جذب می‌کند، بنویسید.

ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید برای شرکت جذب کرده باشد، میزان حقوق او در آن ماه چقدر خواهد بود؟

پ) چرا این تابع خطی است؟

ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟

$$P(x) = 1000000 + 50000x$$

الف)

$$1000000 + 12 \times 50000 =$$

ب)

تومان ۱۴۰۰۰۰۰

ج) چون به ازای هر یک واحد افزایش x حقوق

تعداد ثابت ۵۰,۰۰۰ تومان افزایش می‌یابد

$$2000000 - 1000000 =$$

ت)

۱,۰۰۰,۰۰۰

$$\text{تعداد مشتری} = \frac{1000000}{50000} = 20$$

۳ آرمان سوار بر یک کشتی، در فاصله ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳ کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است.

الف) قانون و دامنه تابع مربوط به فاصله آرمان از ساحل (بر حسب کیلومتر) را بر حسب t (زمان بر حسب ساعت) بنویسید.

ب) آرمان پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟

پ) چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

$$f(t) = 10 + 3t$$

الف)

$$D_f = [0, 5]$$

$$f(2) = 10 + 3 \times 2 = 14 \text{ km}$$

ب)

و) تابع خطی است چون به ازای هر

یک ساعت، ۳ کیلومتر به تابع اضافه می‌شود

مقدار ثابت

$$m = 3$$

شیب مثبت است

۱۲ دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است.
الف) جدول زیر را کامل کنید.

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما بر حسب درجه سانتی‌گراد)	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵

ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟
ت) نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم کنید.

ب) $D_t = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

قانون تابع $t(d) = 35$

پ) تابع ثابت است چون برای تمام مقادیر دامنه یک مقدار دارد.



۵ رابطه بین دو واحد اندازه گیری دما، درجه سانتی گراد (c) و درجه فارنهایت (F) با قانون $F(c) = \frac{9}{5}c + 32$ بیان می شود.

الف) مقدارهای $F(28)$ و $F(-40)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید.

ب) دمای صفر درجه سانتی گراد، معادل چند درجه فارنهایت است؟

پ) اگر $F(c) = 212$ ، مقدار c را حساب کنید. c چه چیزی را نشان می دهد؟

$$F(28) = \frac{9}{5} \times 28 + 32$$

انف

$$= \frac{252}{5} + 32 = 50,4 + 32 = 82,4$$

$$F(-40) = \frac{9}{5} \times (-40) + 32 =$$
$$-\frac{9 \times 40}{5} + 32 = -72 + 32 = -40$$

$$F(0) = \frac{9}{5} \times 0 + 32 = 32$$

$$F(c) = 212 = \frac{9}{5}c + 32$$
$$\Rightarrow 212 - 32 = \frac{9}{5}c \Rightarrow 180 = \frac{9}{5}c$$
$$\Rightarrow 180 \times \frac{5}{9} = 9c \Rightarrow 100 = c$$