تابع درجه ۲

تعریف

تابع‌هایی را که بتوان قانون آنها را به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم نوشت، یک **تابع درجهٔ دوم** می‌نامند. قانون یک تابع درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ است که درآن a و b و c اعداد حقیقی مشخصی هستند ($a\neq 0$). دامنهٔ این تابع‌ها می‌توانند $\mathbb{R}$ یا هر زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشند.

مثال ۴

تابع‌های زیر نمونه‌هایی از تابع درجهٔ۲ با دامنه $\mathbb{R}$ هستند.

۱) $f(x)=2x^2+3x+1$

۲) $g(x)=-3x^2+5$

۳) $h(x)=1/2x^2-5x+2$

در تابع درجه ۲ بزرگترین توان متغیر (x) ۲ می باشد، نمودار تابع درجه ۲ به صورت سهمی است.

$y=x^2$ ساده ترین تابع درجه ۲ است که برای رسم توابع دیگر از آن کمک می گیرند.

رسم تابع درجه ۲

برای رسم تابع درجه ۲ $y = ax^2 + bx + c$ آن را به صورت $y = k(x-q)^2 + p$ در می‌آوریم

به عنوان مثال $y = x^2 - 4x + 3$ به صورت $y = (x-2)^2 - 1$ نوشته می‌شود سپس با انتقال آن را رسم می‌کنیم.

تبدیل $y = ax^2 + bx + c$ به این فرم $y = k(x-q)^2 + p$ در کتاب نیامده و یادگیری آن اختیاری است.

(روش تبدیل برای علاقه‌مندان، صفحه آخر توضیح داده شده است)

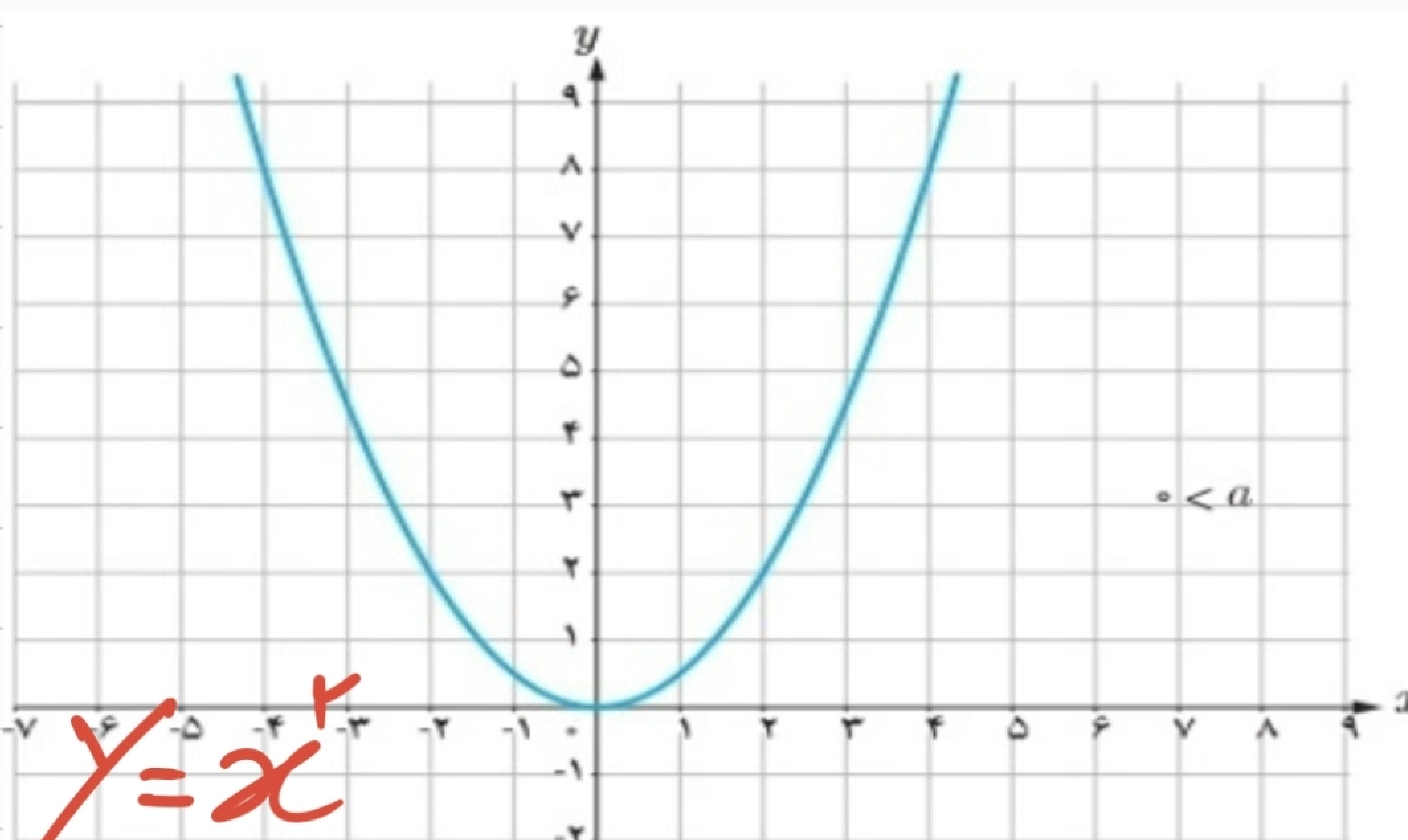
رسم تابع درجه ۲

اگر تابع درجه ۲ ، به صورت $y=k(x-q)^2+p$

باشد، خیلی راحت، با انتقال $y=x^2$

روی محور افقی و عمودی رسم می‌شود.

نکته: تابع $y=x^2$ به صورت زیر می‌باشد



حال با انتقال $y=x^2$ ، تابع درجه ۲ را رسم می‌کنیم

حالت اول: $y = x^2 + p$

در این حالت $y = x^2$ با یک عدد جمع شده است.

به عنوان مثال

$y = x^2 + 2$
در اینجا $p = 2$ است.

یا

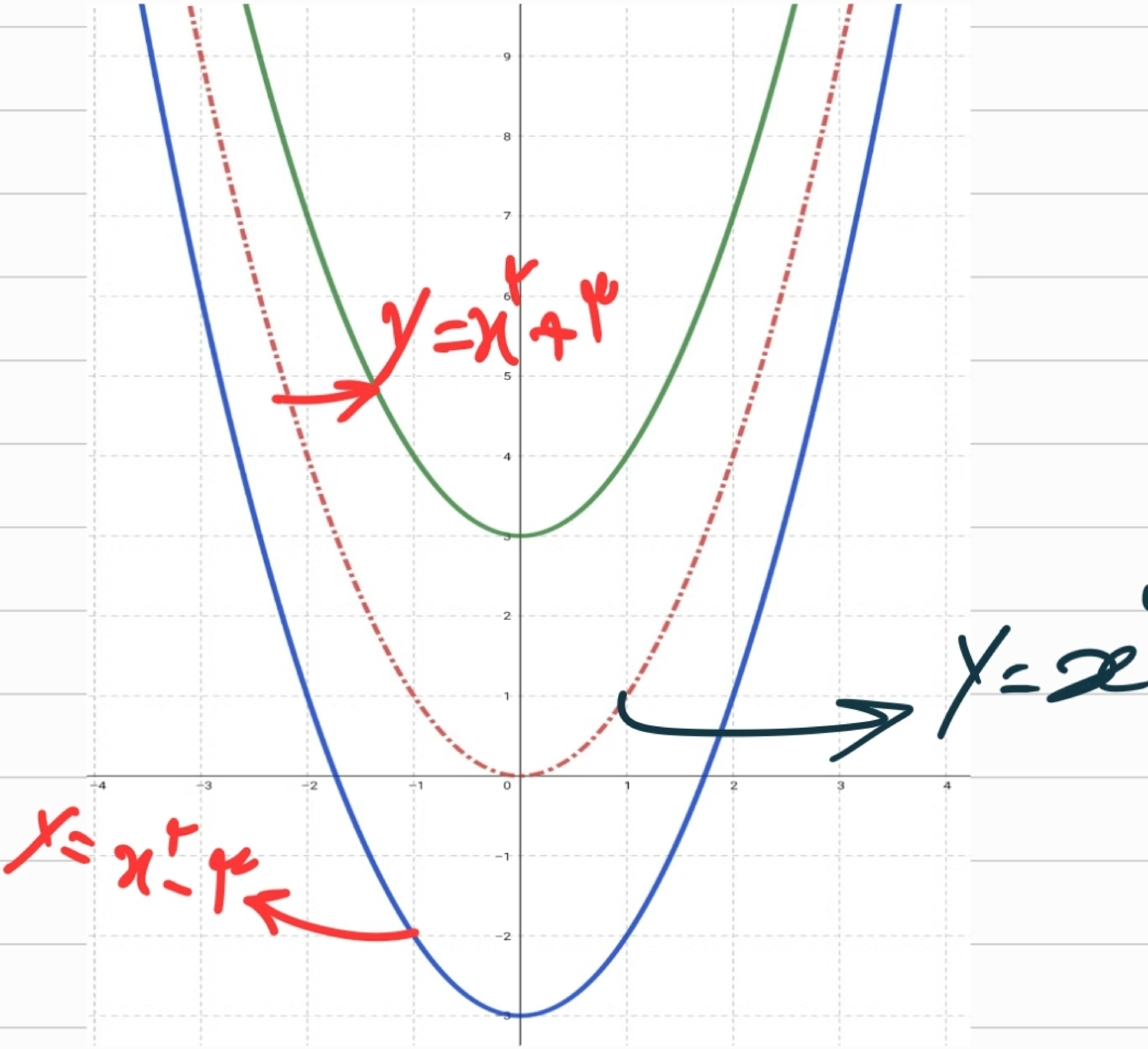
$y = x^2 - 2$
که $p = -2$ است.

p عددی است مثبت یا منفی که در کنار x^2 می باشد. برای رسم کافیست $y = x^2$ را روی محور y ها به اندازه p جابجا کنیم.

اکنون برای مثال دو تابع زیر را رسم می کنیم

$y = x^2 - 3 \longrightarrow p = -3$

$y = x^2 + 3 \longrightarrow p = +3$



همین طور که دیده می‌شود برای رسم $y=x^2+3$

نمودار $y=x^2$ را ۳ واحد به بالا انتقال داده‌ام

و برای $y=x^2-3$ ، ۳ واحد به پایین چون ۳- است.

$$y=(x-q)^2$$

حالت دوم

مثال: $y=(x-2)^2$ در اینجا عدد کنار x، داخل پرانتز است و

برای بدست آوردن q کافیست عدد داخل پرانتز را قرینه کنیم

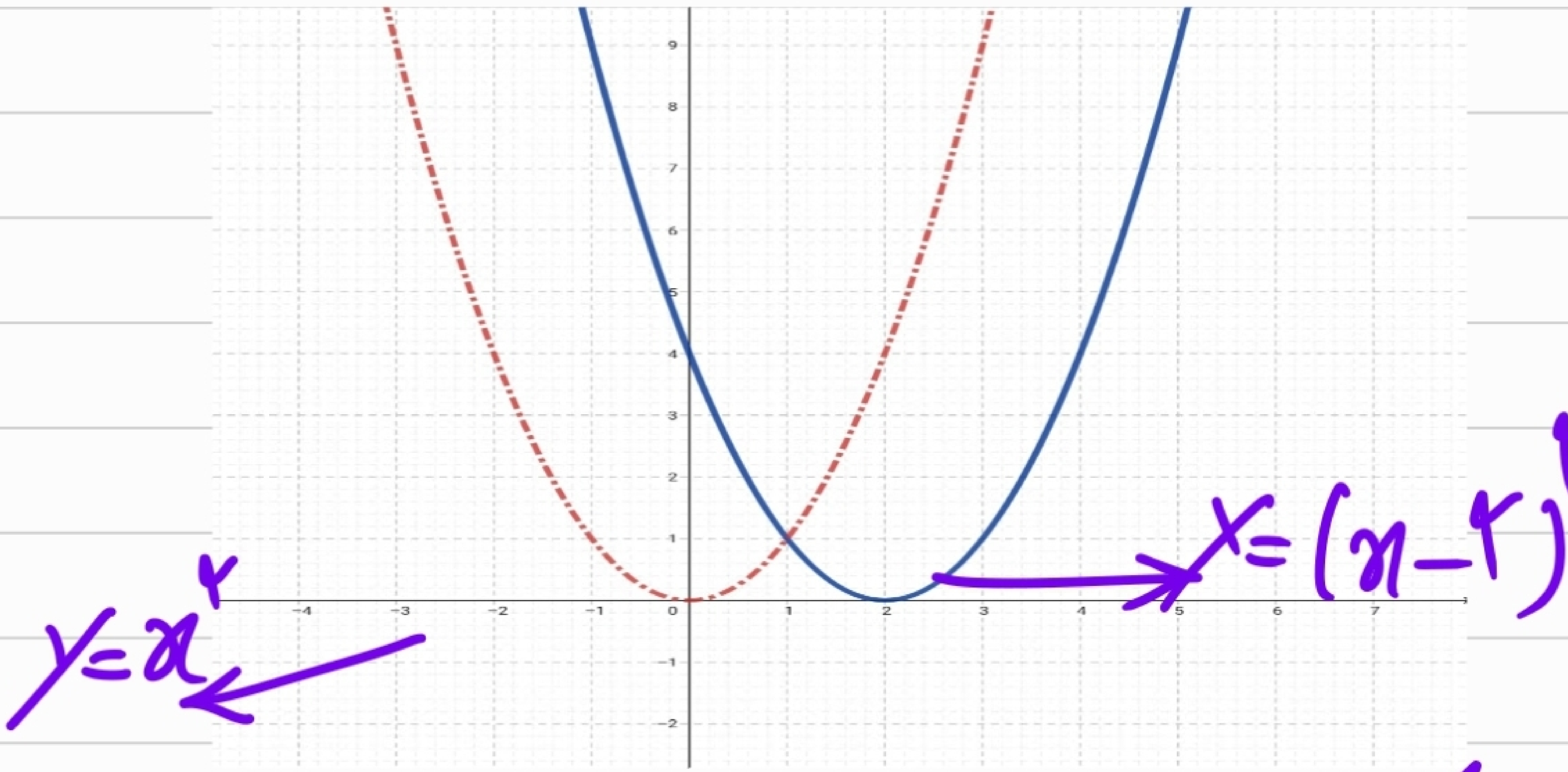
$$y=(x-q)^2$$

$$y=(x-2)^2 \Rightarrow \boxed{q=2}$$

$$y=(x-q)^2$$

$$y=(x+2)^2$$

$$(x-(-2))^2 \Rightarrow \boxed{q=-2}$$



به طور کلی برای رسم توابع به صورت

$y=(x-h)^2$ کافیست $y=x^2$ را به اندازه

h واحد روی محور x انتقال دهیم

مثلا $y=(x-3)^2 \longrightarrow$ ۳ واحد

$y=(x+3)^2 \longrightarrow$ در این جا $x+3$ همان

$x-(-3)$ است پس $h=-3$ است.

و نقطه شیب روی محور x ها ۳ واحد به سمت چپ

برویم چون q منفی است.

$y=(x-q)^2$ q را در هر یک پیدا کنید.

$y=(x-1)^2 \rightarrow q=1$

$y=(x+1)^2 \rightarrow q=-1$

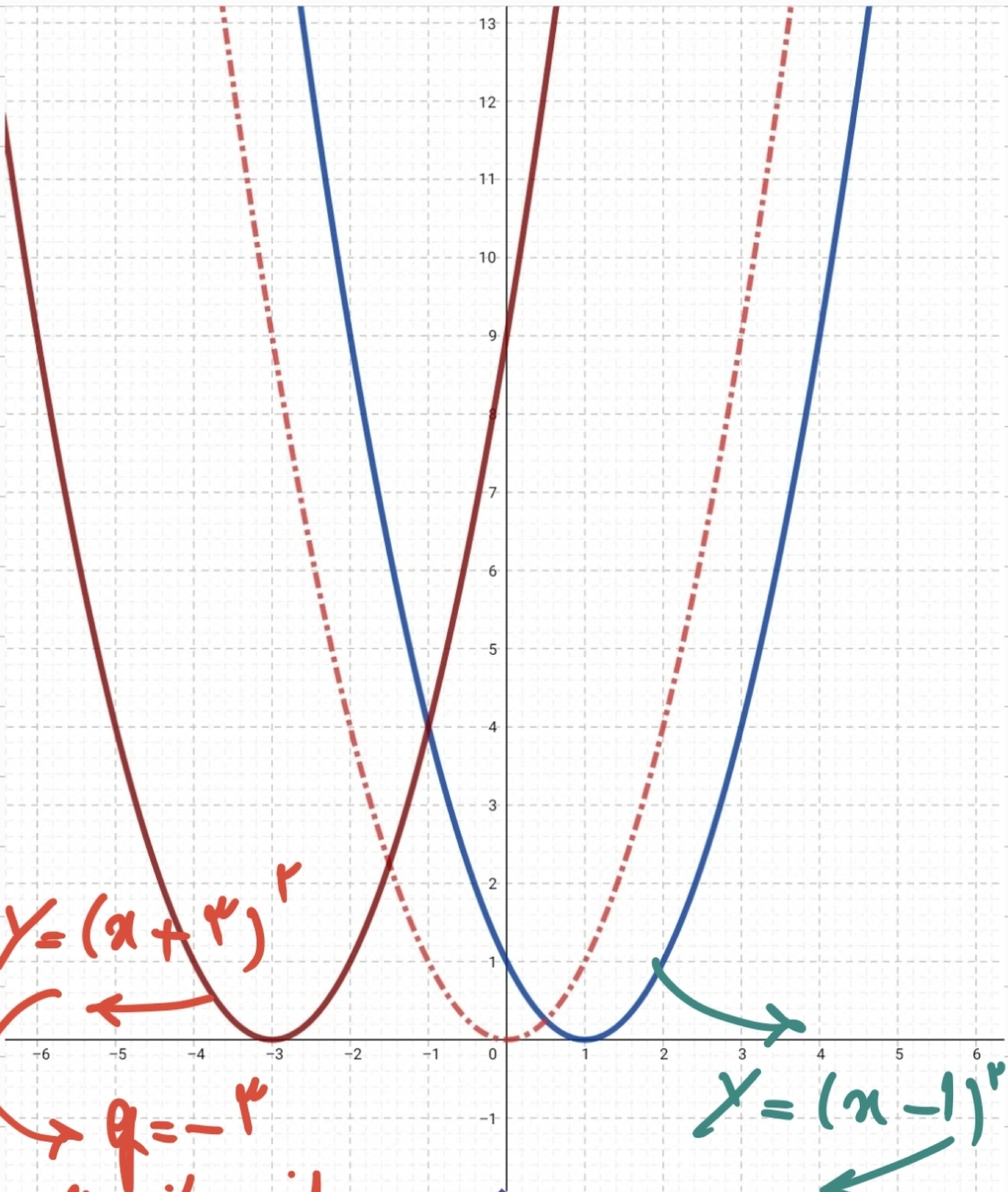
$y=x^2+1 \rightarrow q=0$

$y=(x+4)^2 \rightarrow q=-4$

همان طور که دیده می شود برای به دست آوردن q نقطه شیب

عدد داخل پرانتز را قرینه کرد. چنانچه اگر علامت نیز آنجا

منفی بود مثبت می شود و برعکس مثبت بود، منفی می شود



$y=(x+۳)^۲$

$q=-۳$

عدد داخل پرانتز $+۳$ است که قرینه شده است.

$y=(x-1)^۲$

$q=+1$

۱- داخل پرانتز قرینه می‌شود.

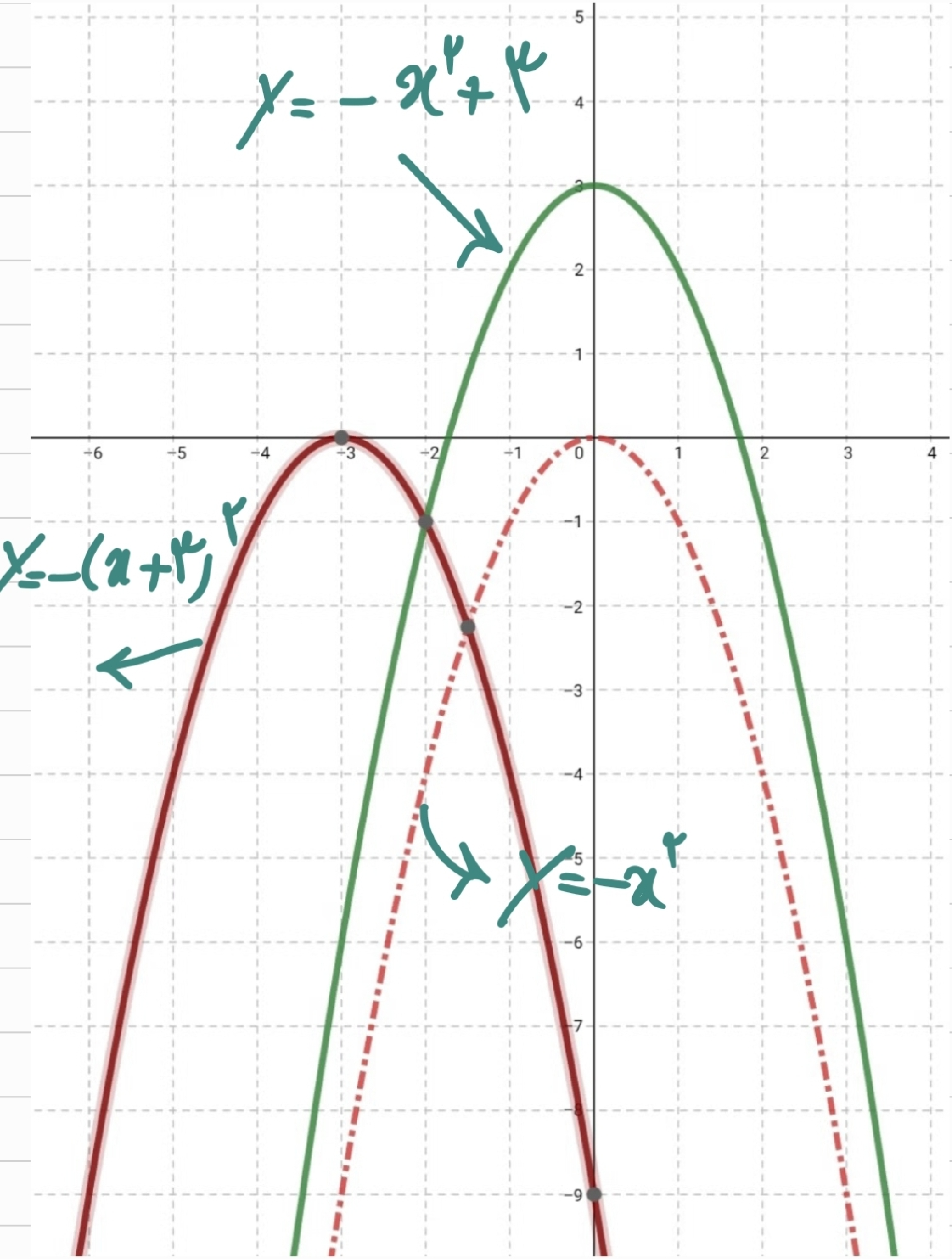
رسم $y=-x^2$

اگر ضریب x^2 یا ضریب پرانتز $(x-h)^2$ منفی باشد، سهمی به سمت پایین کشیده می‌شود مثل

$y=-x^2 \longrightarrow k<0$

$y=-(x+4)^2 \longrightarrow \begin{array}{l} h=-4 \\ k<0 \end{array}$

$y=-x^2+3 \longrightarrow \begin{array}{l} p=3 \\ k<0 \end{array}$



y = -x۲ + ۳
y = -(x+۳)۲
y = -x۲
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9

رسم حالت کلی $y=k(x-q)^2+p$

ابتدا p و q و علامت k را مشخص می‌کنیم

به اندازه p روی محور yها

" " q " " " xها

و برای k مثبت به سمت بالا و

" k منفی " " پایین رسم می‌کنیم

مثال:

$y=-(x+2)^2+1$

$k<0 \xrightarrow{\text{علامت پرانتز}}$

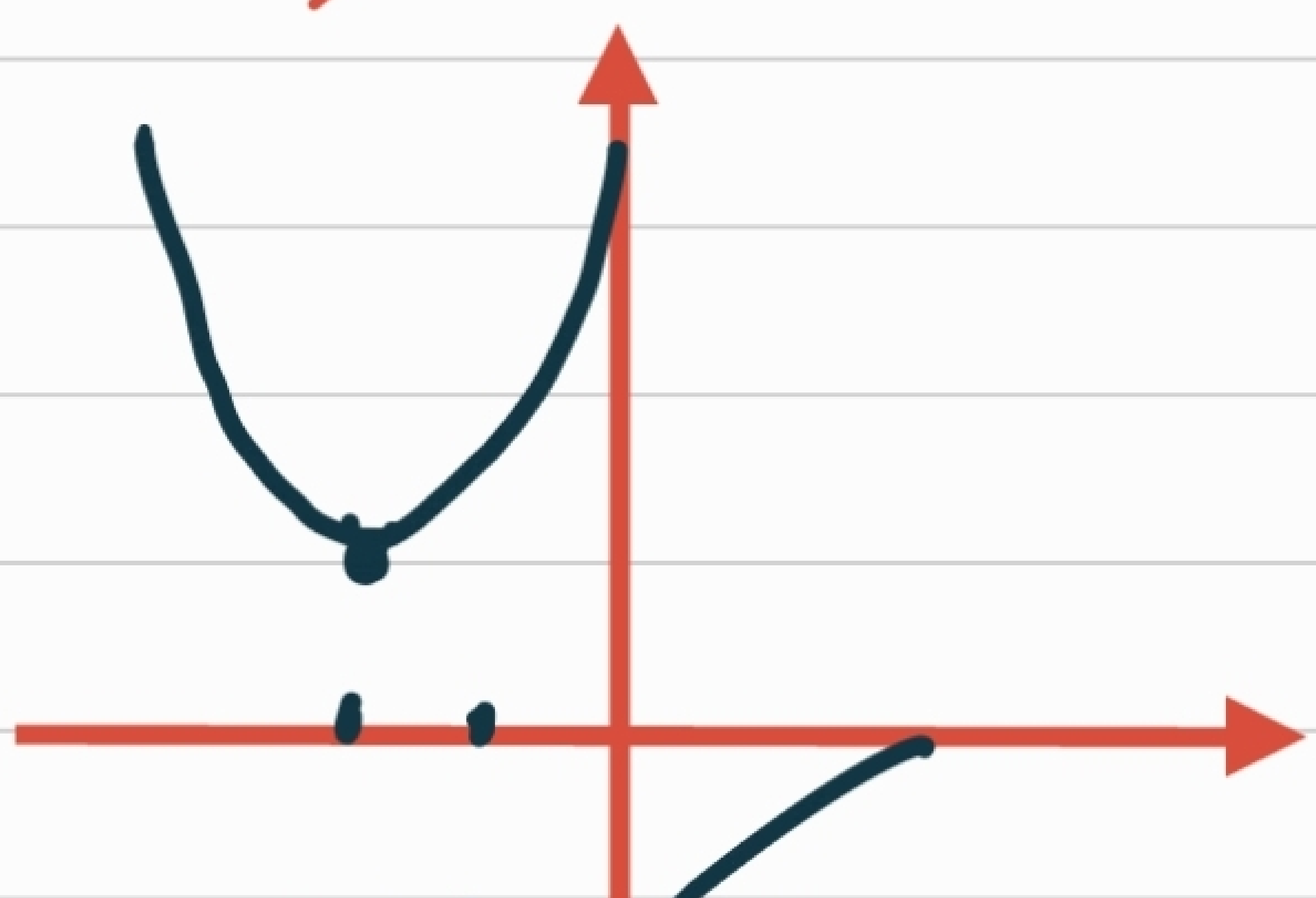
$p=+1 \longrightarrow$ عدد بیرون پرانتز

$q=-2 \longrightarrow$ قرینه عدد داخل پرانتز

مثال: در هر یک علامت k و مقدار p و q را بدست آورید و آن را رسم کنید.

1) $y = (x+2)^2 + 1$

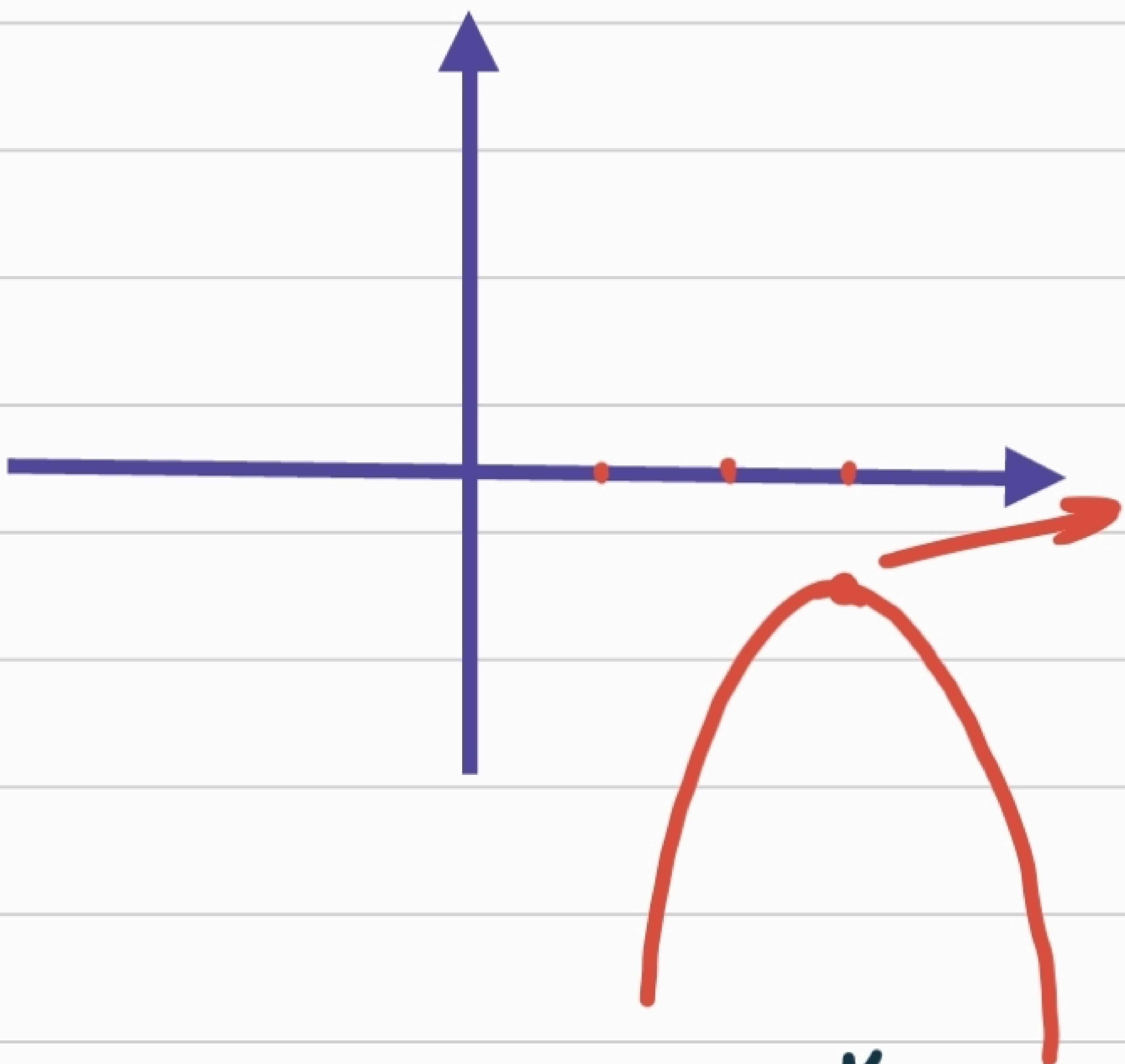
$$\begin{cases} k > 0 \\ q = -2 \\ p = 1 \end{cases}$$



با توجه به اینکه به اندازه q روی محور x ها و به اندازه p روی محور y ها انتقال می‌دهیم کافیست نقطه (q, p) یعنی $(-2, 1)$ را در نظر گرفته و اگر k مثبت بود سهمی به سمت بالا و اگر منفی بود به سمت پایین بکشیم.

$y = -(x-3)^2 - 1$

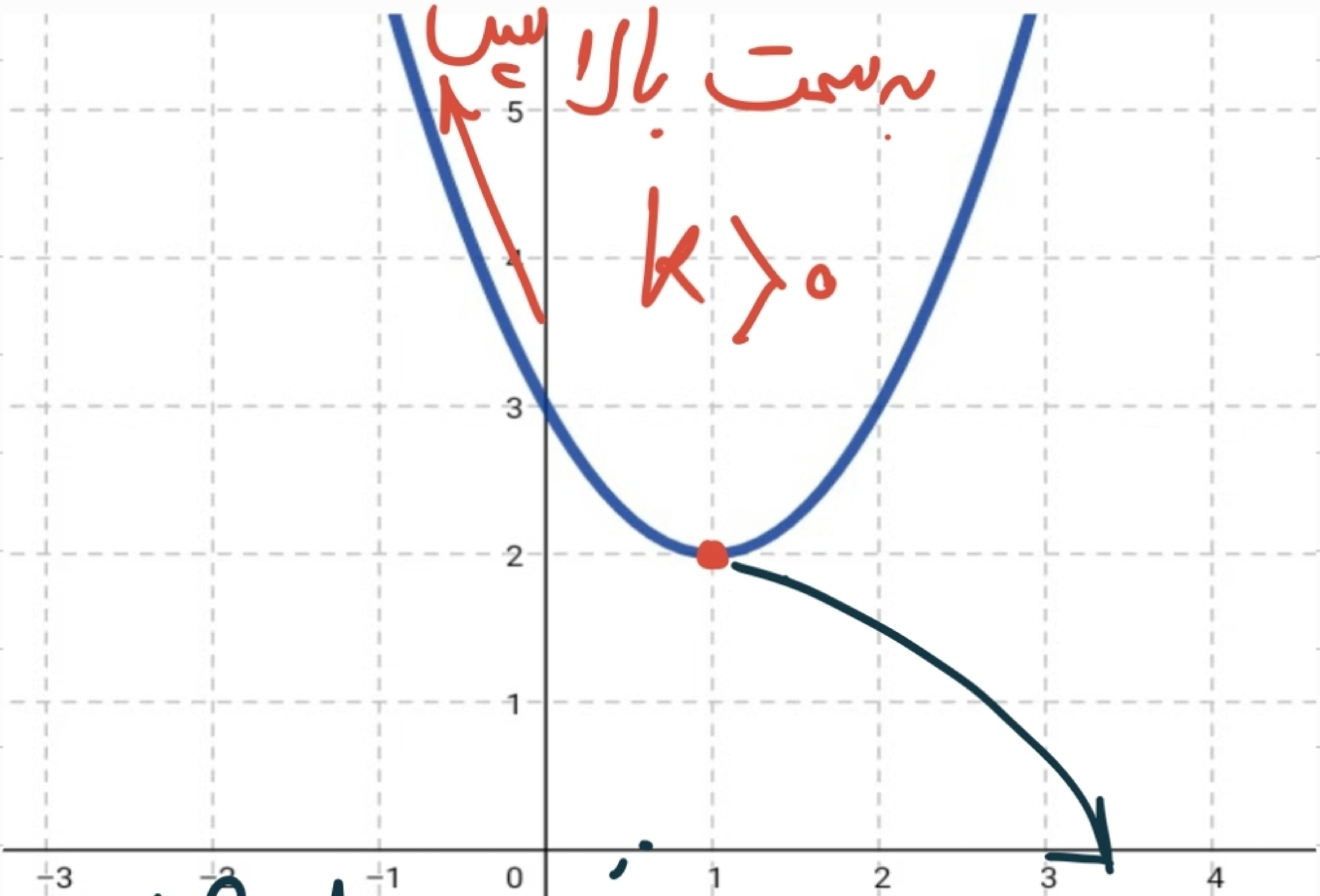
$\begin{cases} k < 0 \\ q = 3 \\ p = -1 \end{cases} \longrightarrow$ نقطه (۳و-۱) را در نظر گرفته و دهانه سهمی به سمت پایین (k<0) رسم می کنیم.



$y = -(x+2)^2 \longrightarrow \begin{cases} k < 0 \\ q = -2 \\ p = 0 \end{cases}$

$y = x^2 - 5 \begin{cases} k > 0 \\ q = 0 \\ p = -5 \end{cases}$

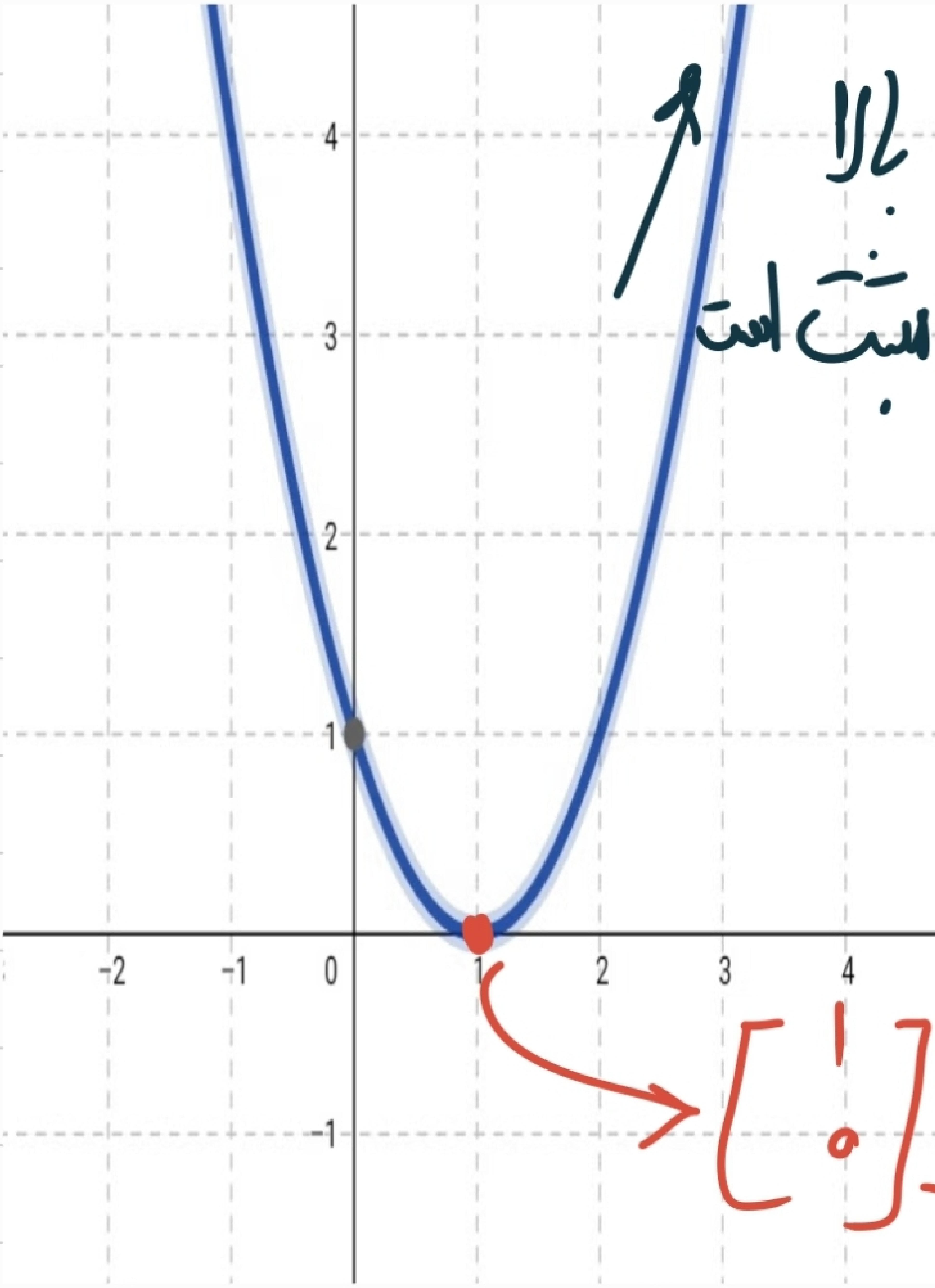
با توجه به شکل علامت k و مقدار p و q را بدست آورید.



مقدار q و p را x و y این نقطه مشخص می‌کند

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow 1 = q \\ \longrightarrow 2 = p \end{matrix}$$

$$y = k(x-q)^2 + p \Rightarrow y = k(x-1)^2 + 2$$

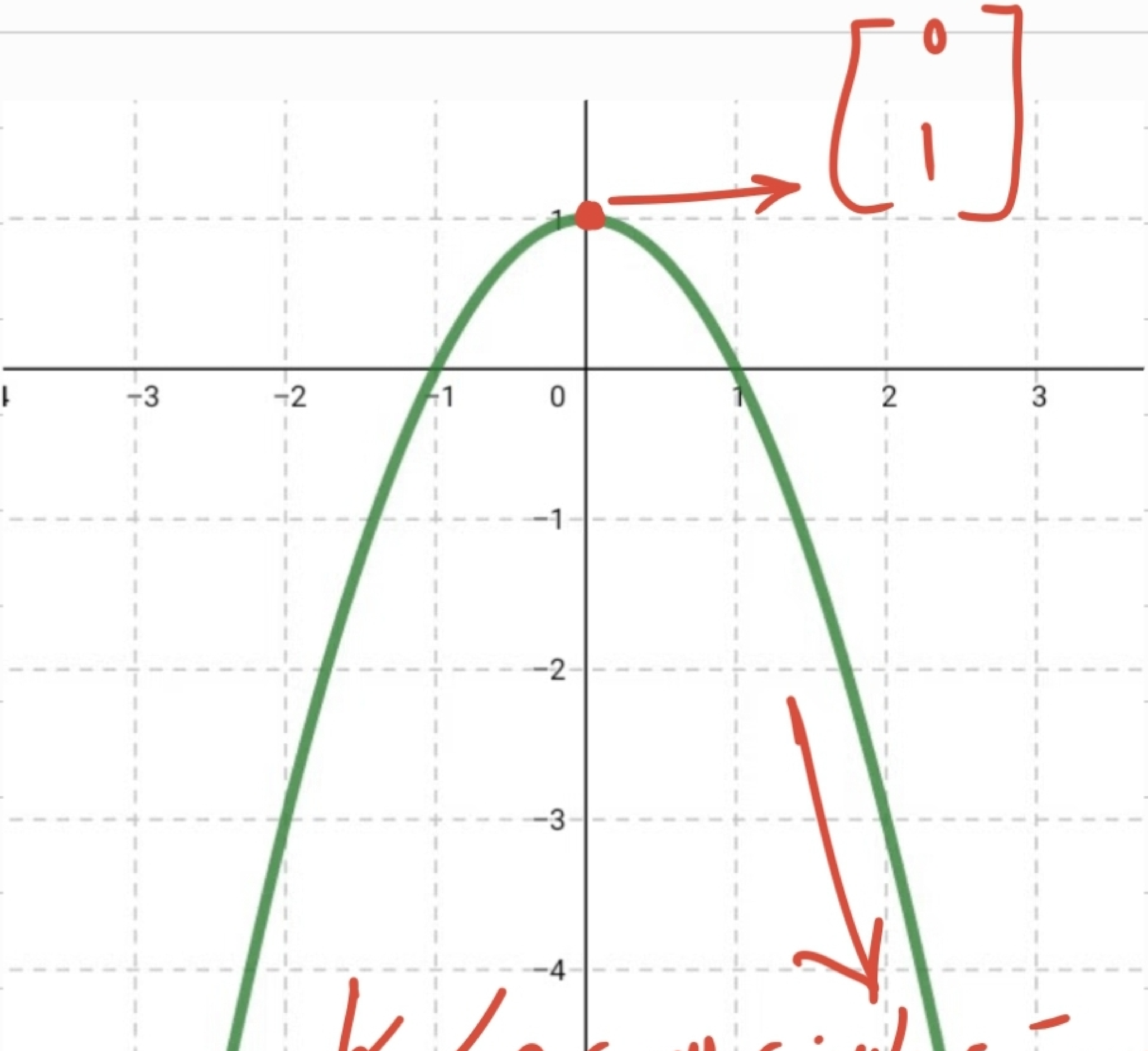


به سمت بالا

پس k مثبت است

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\rightarrow q=1$, $\rightarrow p=0$

$y = k(x-1)^{۲}$

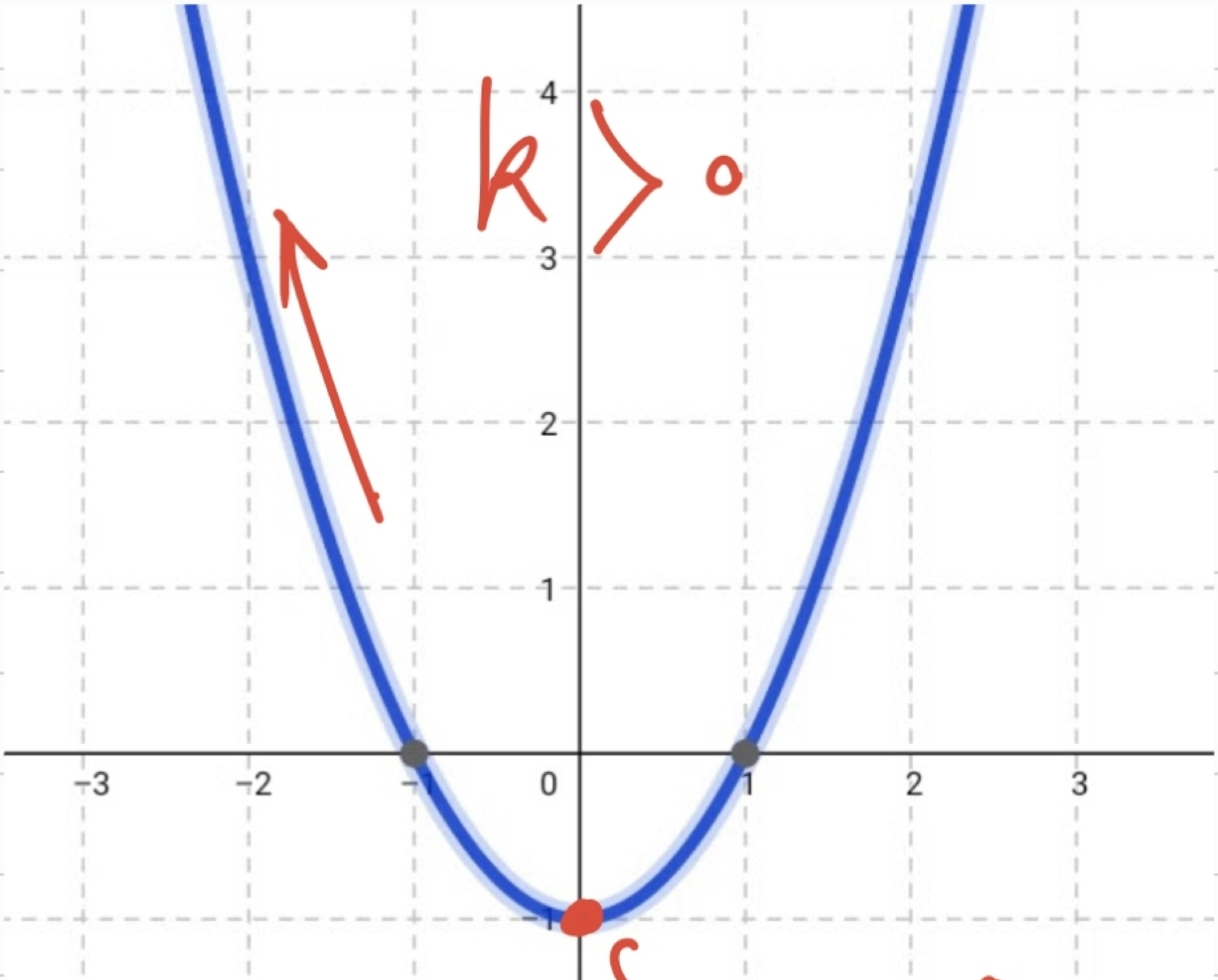


بسمت پایین سی $k < 0$

نقطه $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ مشخص کننده p و q است.

$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} q=0 \\ p=1 \end{matrix}$

$y = kx^2 + 1$



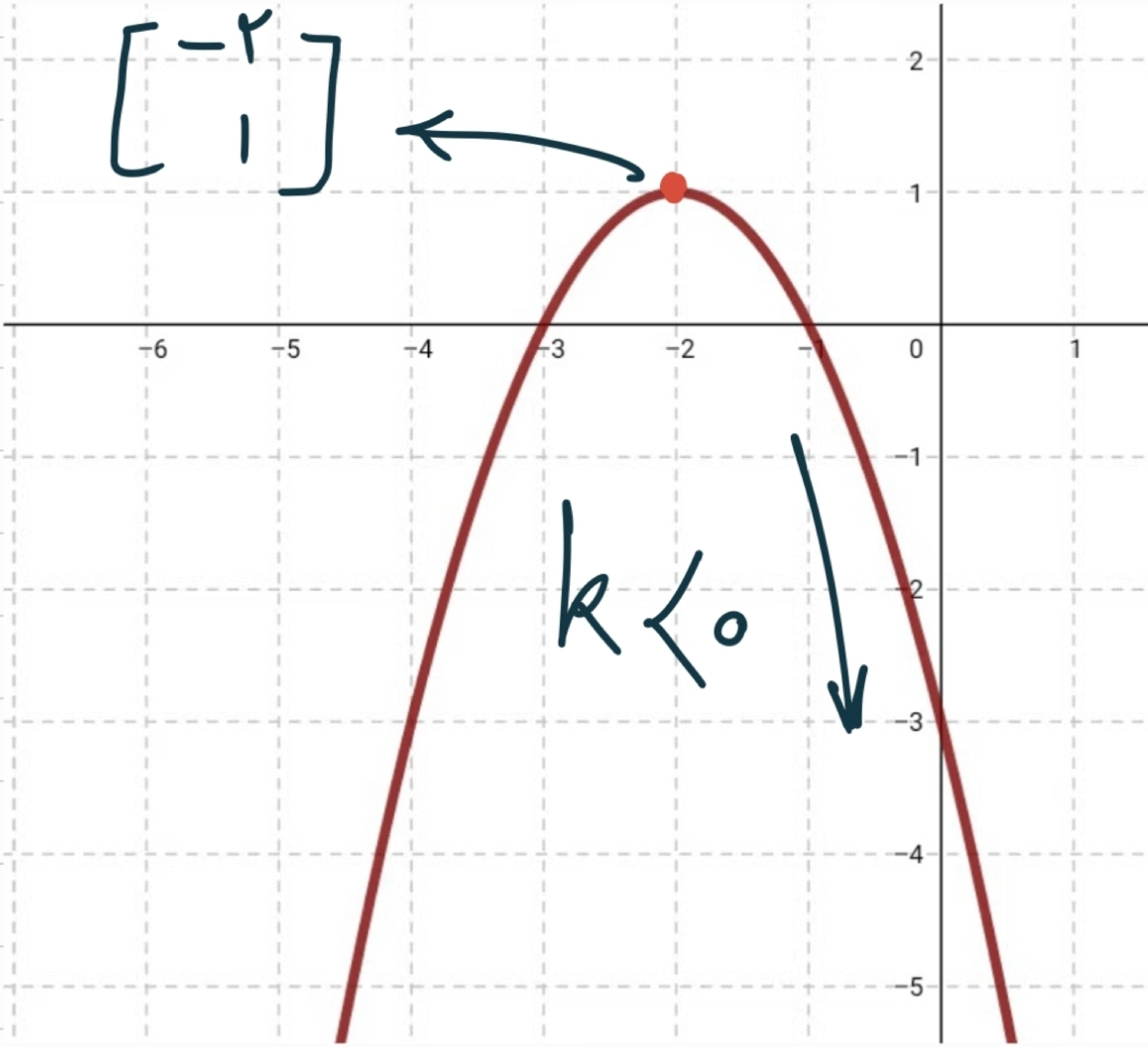
$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow q = 0$

$\rightarrow p = -1$

$y = kx^2 - 1$

نقطهٔ $\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$ رأس سهمی گفته می‌شود. اگر $k>0$ پایین‌ترین نقطه و اگر $k<0$ بالاترین نقطه سهمی است.



$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\rightarrow h=-2$, $\rightarrow p=1$

توجه کنید چون مقدار k را نمی‌دانیم آن را

در فرمول فقط k می‌گذاریم $y=k(x+2)^2+1$

در هر یک مقدار p و q و علامت k را بنویسید.

$$y = -(x-1)^2 - 3$$

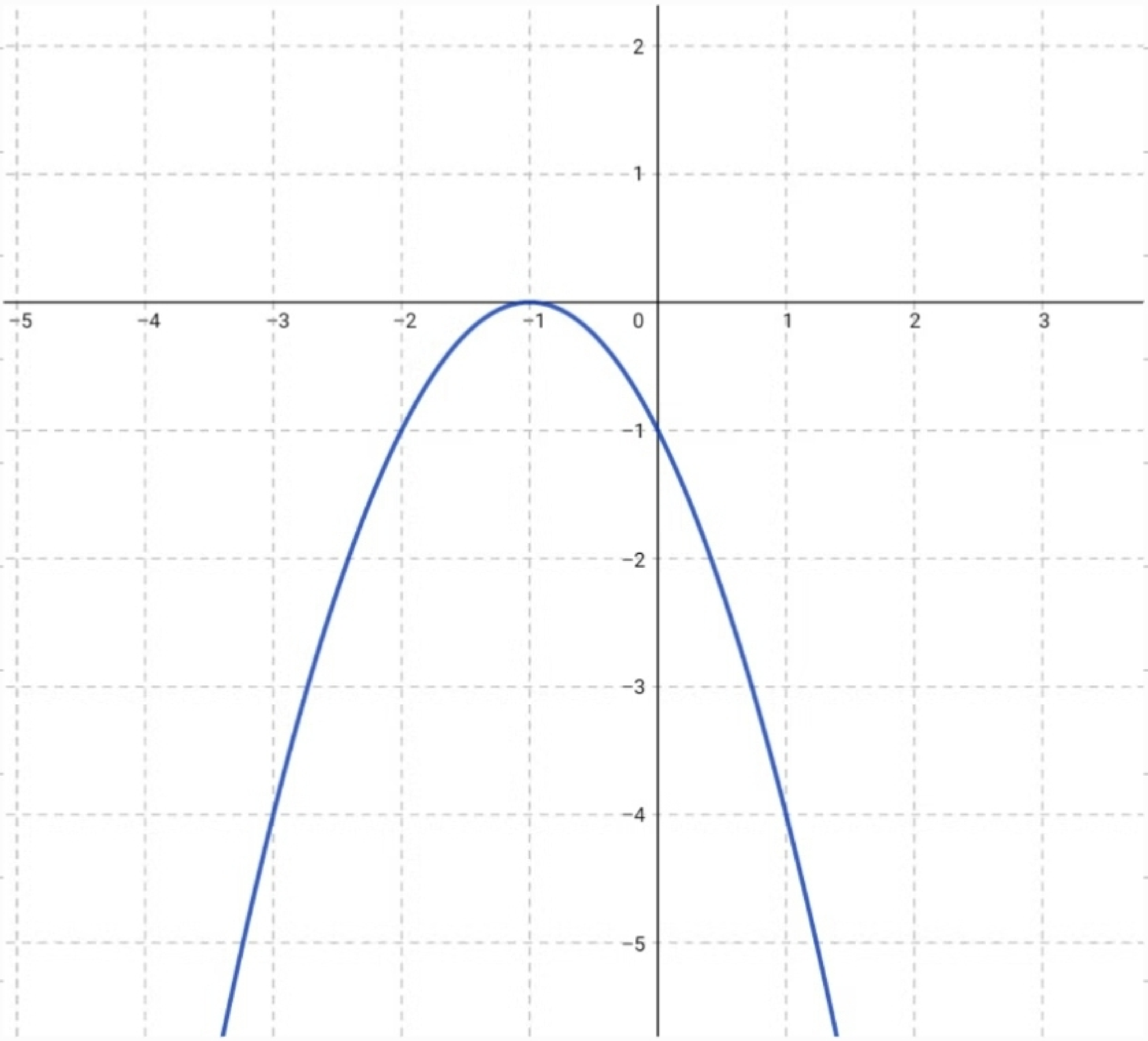
$$y = (x+2)^2 + 1$$

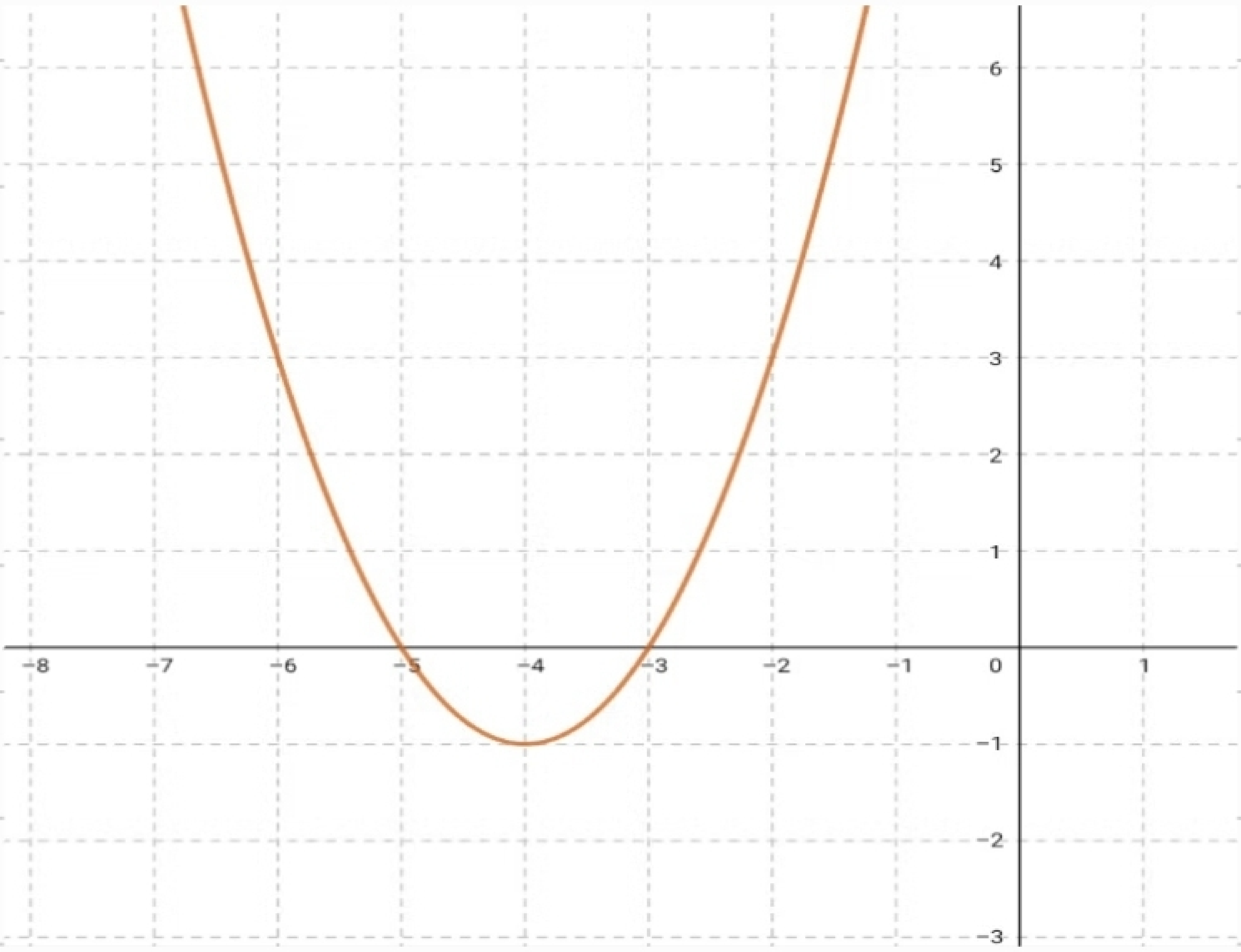
$$y = x^2 - 4$$

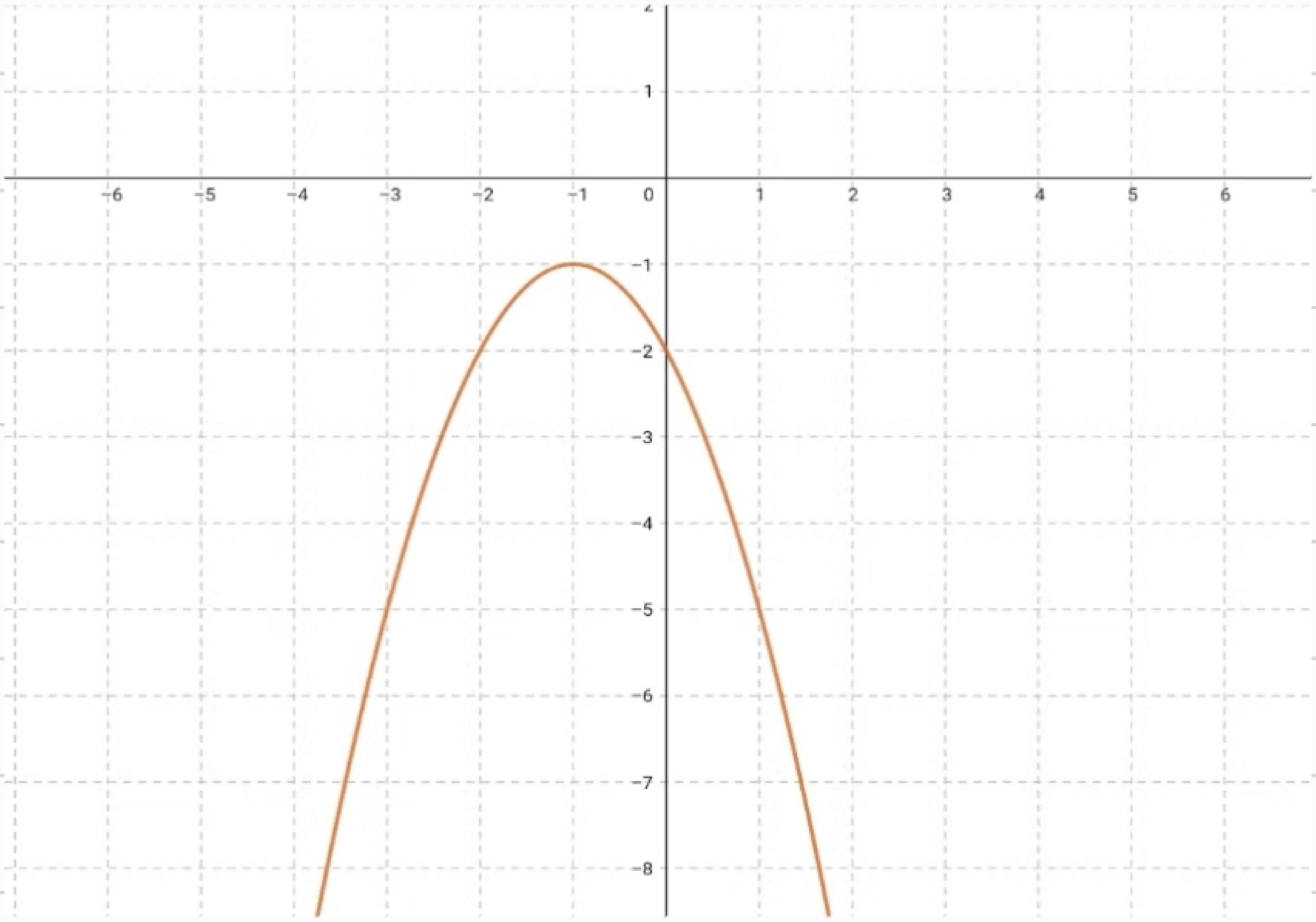
$$y = -(x+2)^2$$

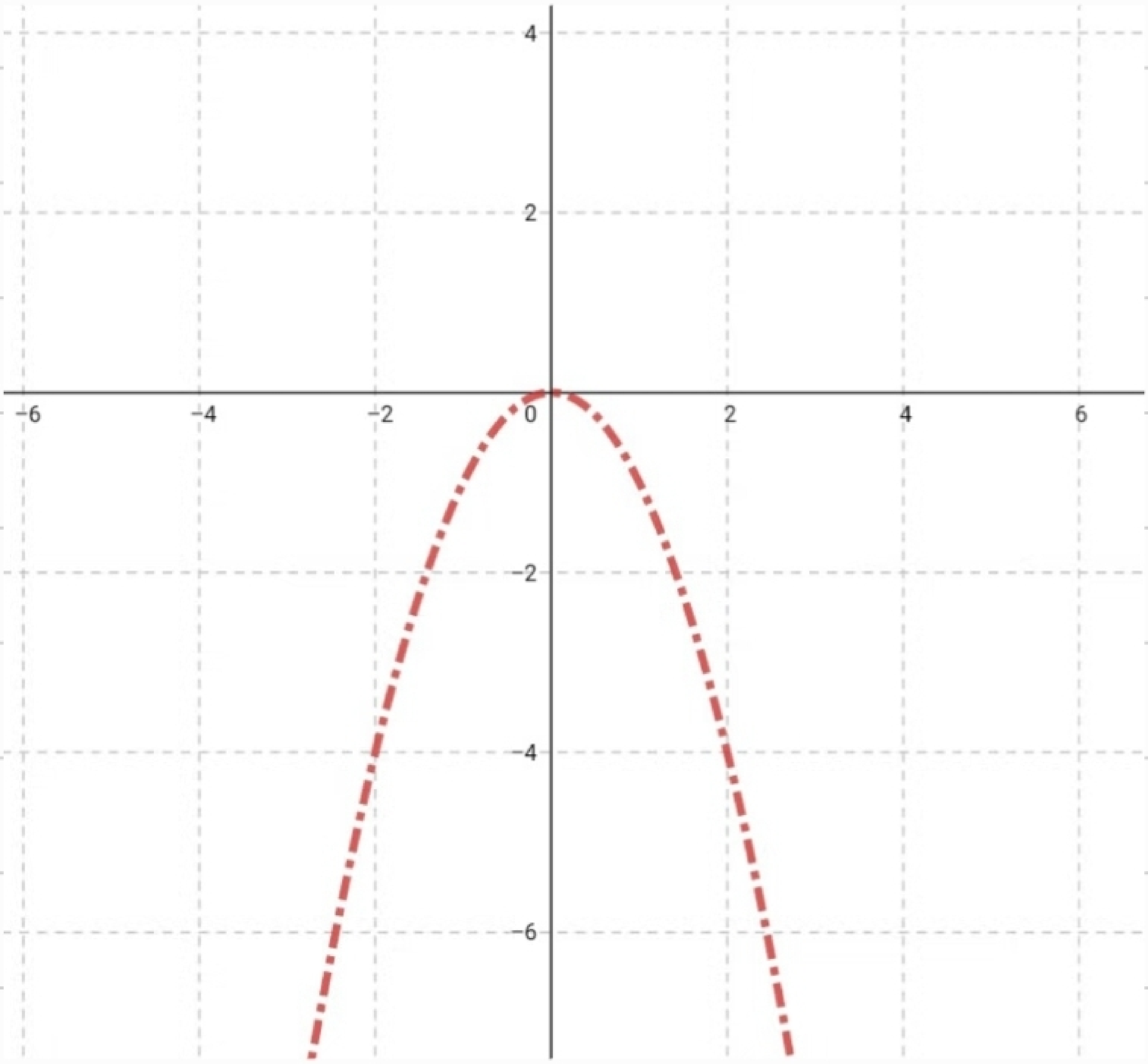
$$y = -(x-14)^2$$

$$y = -x^2 + 2$$


-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5


-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3


1
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8


4
2
−6
−4
−2
0
2
4
6
−2
−4
−6

تبدیل $y = ax^2 + bx + c$ به فرم

$$y = k(x - q)^2 + p$$

مثال: می‌خواهیم $y = x^2 - 4x + 3$

را به صورت $y = (x - q)^2 + p$ دربیاوریم

$$x^2 - 4x + 3 =$$

مرحله اول:

ضریب x را بر $\underline{2}$ تقسیم کرده و به توان $\underline{2}$ می‌رسانیم

x ضریب $4 \longrightarrow \frac{4}{2} = 2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 2^2 = 4$

مرحله دوم: عدد بدست آمده را به عنوان جمله‌ای، یک بار اضافه

و یک بار کم می‌کنیم $\Longleftarrow x^2 - 4x + 3 + 4 - 4$

مرحله سوم

$$x^2-4x+3+4-4$$

جملاتی که علامت — دارند را کنار هم قرار می‌دهیم

و به صورت اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نویسیم. دو عدد بعدی

را باهم جمع یا ازهم کم می‌کنیم

$$\underbrace{x^2-4x+4}_{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}}+3-4=(x-2)^2-1$$

$$\Rightarrow y=(x-2)^2-1 \quad \begin{cases} k=1>0 \\ q=2 \\ p=-1 \end{cases}$$

$$x^2-4x+4$$

$x \to x$ ، $-$ → علامت ، 4 → جذر

$$=(x-2)^2$$

حال اگر x^2 ضریب داشت از ضریب فاکتور می‌گیریم مثلا:

$$y = -2x^2 + 4x - 3$$

$$y = -2\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) =$$

ضریب x

$$\frac{2}{2} = 1 \longrightarrow 1^2 = 1$$

$$y = -2\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2} + 1 - 1\right)$$

$$y = -2\left(\underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{اتحاد}} + \frac{3}{2} - 1\right)$$

$$y = -2\left[(x-1)^2 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= -2(x-1)^2 + \frac{-2\times 1}{2} \Rightarrow y = -2(x-1)^2 - 1$$

$$\begin{cases} k < 0 \\ q = 1 \\ p = -1 \end{cases}$$

$$y = -3x^2 + 2x$$

$$y = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right)$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$y = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right)$$

$$y = -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$$

$$= \boxed{-3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases} k = -3 < 0 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}, \quad p = +\frac{1}{3}$$

توجه توجه:

مطلب تبدیل ax^2+bx+c به

حالت $k(x-q)^2+p$

فقط برای علاقه‌مندان گفته شده

است و نیازی به یادگیری

همه دانش آموزان نیست.