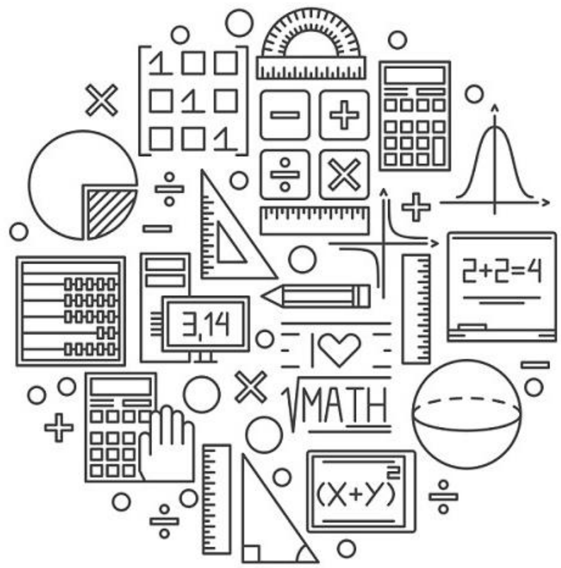
ریاضیات هفتم

جزوه آموزشی فصل ۶ (سطح و حجم)



اکبریان

دبیرستان آزادگان

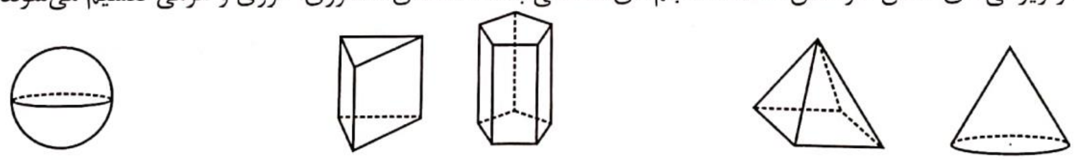
سال تحصیلی ۹۹ – ۱۳۹۸

فصل شش

سطح و حجم

حجم

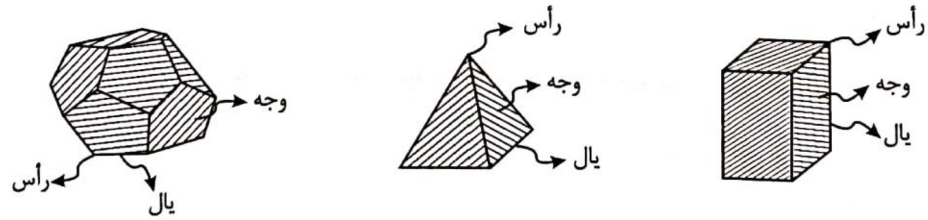
آموزش هندسه بیش‌تر در فضای دو بعدی و تک‌بعدی انجام می‌شود. بیش‌ترین زمان یادگیری دانش‌آموزان در هندسه صرف مفاهیمی مانند خط، نقطه، زاویه، مساحت و محیط می‌شود. امّا واقعیّت آن است که زندگی واقعی ما در فضای سه بعدی است و بسیاری از لوازم زندگی ما مانند کتاب، میز، لوازم آشپزخانه و ... شکل‌هایی فضایی (سه‌بعدی) هستند. به عنوان نمونه وقتی می‌خواهیم یک آکواریوم را از آب پر کنیم به حجم آن نیاز داریم یا هنگام نقّاشی دیوارهای اتاقمان به مساحت دیوارها نیاز داریم. حجم‌ها را به دو دسته‌ی هندسی و غیر هندسی تقسیم می‌کنیم. حجم‌های هندسی شکل‌های مشخّصی هستند که دارای تعریف و ویژگی‌های خاصّ خودشان هستند. حجم‌های هندسی به سه دسته‌ی منشوری، کروی و هرمی تقسیم می‌شوند.



حجم کروی — حجم‌های منشوری — حجم‌های هرمی و مخروطی

توجّه: در فضای دو بُعدی (صفحه) وقتی می‌خواهیم به بیننده حسّ حجم را القا کنیم، خط‌های پشت شکل را به صورت خط‌چین یا نقطه‌چین رسم می‌کنیم. حجم‌های هرمی و منشوری زیرمجموعه‌ی گروه بزرگ‌تری از حجم‌های هندسی هستند که به حجم‌های چندوجهی معروف‌اند.

تعریف: شکلی را که از همه طرف به صفحه محدود است، چندوجهی می‌نامند. بخش‌هایی از صفحات که به صورت چندضلعی بوده و چندوجهی را پدید آورده‌اند، وجه نام دارند که هر ضلع این وجه‌ها را یال و هر رأس آن‌ها را رأس یا کُنج چندوجهی می‌نامند.



نکته: در یک چندوجهی دلخواه همواره داریم:

۲ − تعداد وجه‌ها + تعداد رأس‌ها = تعداد یال‌ها

اثبات این رابطه فراتر از سطح این کتاب است.

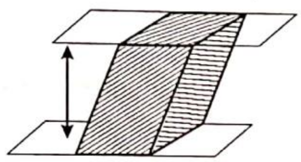
مثال: در یک چندوجهی ۶ رأس و ۸ وجه وجود دارد. تعداد یال‌ها چند است؟

حل:

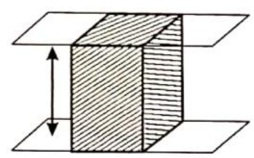
۱۲ = ۲ − ۸ + ۶ = تعداد یال‌ها

منشور

منشور شکلی سه‌بُعدی است که دارای دو قاعده‌ی موازی و مساوی بوده و پهلوهای (وجه‌های کناری) آن همگی مستطیل یا متوازی‌الاضلاع هستند. اگر پهلوهای شکل، همگی مستطیل باشند، منشور از نوع قائم و اگر تعدادی از آن‌ها متوازی‌الاضلاع باشند، منشور از نوع مایل است. در این کتاب از این به بعد هرجا صحبت از منشور شد، منظور منشور قائم است.



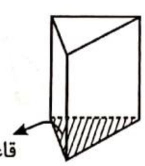
منشور مایل



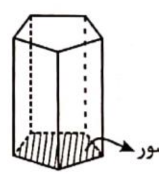
منشور قائم

در حالت کلّی منشورها را بر حسب تعداد اضلاع قاعده‌شان نام‌گذاری می‌کنند.

مثال:



منشور ۳ پهلو



منشور ۵ پهلو

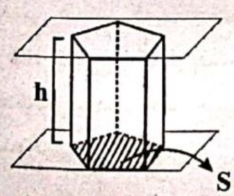
حجم منشور: منظور از حجم یک منشور، مقدار فضایی است که توسط آن اشغال می‌شود.

نکته: حجم هر منشور از رابطه‌ی «ارتفاع × مساحت قاعده = حجم منشور» به‌دست می‌آید.

V : حجم

S : مساحت قاعده

h : ارتفاع (فاصله‌ی دو قاعده)



$$V = S \times h$$

مثال: مساحت قاعده‌ی یک منشور ۵ پهلو، $۷\,cm^۲$ و ارتفاع آن $۱۲\,cm$ است. حجم منشور را حساب کنید.

حل:

$V = ۷ \times ۱۲ = ۸۴\,cm^۳$

نکته: در سال‌های گذشته با واحدهای رایج حجم آشنا شده‌اید. یک بار تعدادی از آن‌ها را یادآوری می‌کنیم.

m^3 = متر مکعب dm^3 یا lit = دسی‌متر مکعب یا لیتر cm^3 = سانتی‌متر مکعب

$$\left.\begin{array}{l} 1m^3 = 1000\,lit \\ 1lit = 1000\,cm^3 \end{array}\right\} \Rightarrow 1m^3 = 1000\,lit = 1000000\,cm^3$$

مثال: قاعده‌ی یک منشور ۳ پهلو، مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۳ و ۴ سانتی‌متر هستند. اگر ارتفاع منشور $7cm$ باشد، حجم آن را بیابید.

حل:

در مثلث قائم‌الزاویه اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی همان قاعده و ارتفاع مثلث هستند. پس:

$$S_{\text{قاعده}} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6cm^2$$

$$V = S \times h = 6 \times 7 = 42cm^3$$

مساحت جانبی منشور: فرض کنید می‌خواهید اتاق‌تان را که شبیه یک مکعب مستطیل است رنگ کنید. واضح است که کف اتاق را رنگ نمی‌کنید و رنگ سقف را متفاوت با رنگ دیوارها انتخاب می‌کنید. مقدار مساحتی که از دیوارهای اتاق‌تان رنگ می‌کنید (البته با فرض این‌که در و پنجره نداشته باشیم)، مساحت جانبی مکعب مستطیل اتاق شما است. پس مجموع مساحت وجه‌های جانبی هر منشور را مساحت جانبی منشور می‌نامیم.

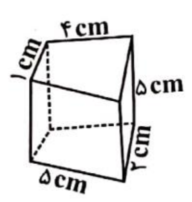
نکته: مساحت جانبی هر منشور از رابطه‌ی «ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی منشور» به‌دست می‌آید.

مثال: محیط قاعده‌ی یک منشور ۷ پهلو با ارتفاع $10cm$ مساوی $27cm$ است. مساحت جانبی منشور چه‌قدر است؟

حل:

مساحت جانبی = محیط قاعده × ارتفاع $= 27 \times 10 = 270cm^2$

مثال: یک منشور ۴ پهلو مانند شکل زیر است. اگر ارتفاع منشور $5cm$ باشد، مساحت جانبی منشور را حساب کنید.



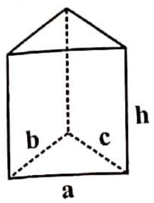
حل:

محیط قاعده $= 5 + 2 + 4 + 1 = 12cm$

مساحت جانبی $= 12 \times 5 = 60cm^2$

مثال: **با استفاده از حروف و عبارت‌های جبری، رابطه‌ی محاسبه‌ی مساحت جانبی منشورها را اثبات کنید.**

حل:



یک منشور سه‌پهلو را فرض می‌کنیم. اندازه‌ی ضلع‌های قاعده را a ،b و c و ارتفاع منشور را h فرض می‌کنیم. منظور از مساحت جانبی منشور، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های جانبی منشور است که طول هر یک از آن‌ها h و عرض‌شان یکی از ضلع‌های قاعده است.

- عرض × طول = مساحت هر مستطیل جانبی منشور

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های جانبی $= a\times h + b\times h + c\times h \overset{\text{فاکتورگیری}}{=\!=\!=} h\times(\underbrace{a+b+c})$ محیط قاعده × ارتفاع

این اثبات برای منشور سه پهلو بود، اما واضح است که می‌توان آن را به هر منشوری تعمیم داد.

مساحت کل منشور: اگر یک مکعب را درون قوطی رنگ غوطه‌ور کنیم، رنگ، همه‌ی وجوه آن‌را فرامی‌گیرد. بنابراین می‌توان ادعا کرد مساحت کل هر منشور، مجموع مساحت جانبی آن و مساحت‌های کف و سقف آن است. پس مجموع مساحت‌های همه‌ی وجه‌های یک منشور را مساحت کل آن منشور می‌نامیم.

نکته: مساحت کل هر منشور از رابطه‌ی «مساحت قاعده × ۲ + مساحت جانبی = مساحت کل منشور» به‌دست می‌آید.

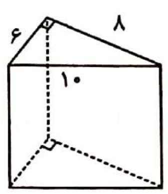
مثال: **قاعده‌ی یک منشور با ارتفاع ۱۰cm، مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اندازه‌ی ضلع‌های آن ۶، ۸ و ۱۰ سانتی‌متر هستند.**

الف) شکل فرضی این منشور را رسم کنید.

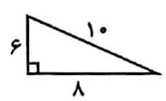
ب) مساحت کل منشور را حساب کنید.

حل:

الف)



شکل فرضی منشور



شکل فرضی قاعده

ب) حتماً می‌دانید که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع‌های زاویه‌ی قائمه همان قاعده و ارتفاع مثلث هستند.

مساحت قاعده $= \frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶ = ۲۴\,cm^۲$

مساحت جانبی $= (۶+۸+۱۰)\times ۱۰ = ۲۴۰\,cm^۲$

مساحت کل $= ۲۴۰ + ۲\times ۲۴ = ۲۴۰ + ۴۸ = ۲۸۸\,cm^۲$

مثال: **مساحت کل یک منشور $۱۵۰\,cm^۲$ و مساحت قاعده‌ی آن $۲۵\,cm^۲$ است. اگر محیط قاعده‌ی منشور ۲۰cm باشد، ارتفاع منشور چه‌قدر است؟**

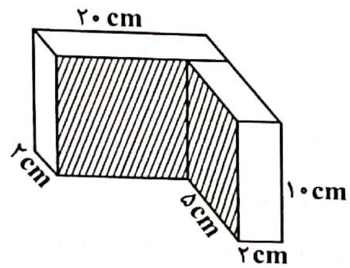
حل:

مساحت قاعده × ۲ + مساحت جانبی = مساحت کل منشور

$\Rightarrow ۱۵۰ = (۲۰\times h) + ۲\times ۲۵$

$\Rightarrow ۲۰\times h = ۱۵۰ - ۵۰ = ۱۰۰ \Rightarrow h = \frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵\,cm$

مثال: با توجّه به شکل، مساحت جانبی، مساحت کل و حجم را حساب کنید.



حل:

مساحت قاعده $= (۲\times ۵)+(۲\times ۲۰)=۱۰+۴۰=۵۰\text{cm}^۲$

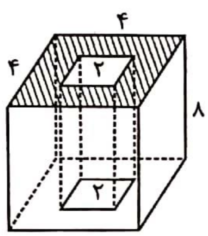
محیط قاعده $= ۲\times(۲۰+۷)=۵۴\text{cm}$

مساحت جانبی $= ۵۴\times ۱۰=۵۴۰\text{cm}^۲$

مساحت کل $= ۵۴۰+۲\times ۵۰=۵۴۰+۱۰۰=۶۴۰\text{cm}^۲$

حجم $= ۵۰\times ۱۰=۵۰۰\text{cm}^۳$

مثال: می‌خواهیم سطح خارجی و درونی منبعی دوجداره (به شکل مقابل) را رنگ کنیم (به جز کف و سقف). چه مساحتی را باید رنگ کنیم؟



حل:

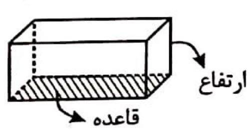
مساحت دیواره‌ی خارجی $= ۴\times ۴\times ۸=۱۲۸\text{cm}^۲$

مساحت دیواره‌ی داخلی $= ۴\times ۲\times ۸=۶۴\text{cm}^۲$

مساحت دیواره‌های داخلی و خارجی $= ۱۲۸+۶۴=۱۹۲\text{cm}^۲$

مکعب مستطیل

منشوری که قاعده‌اش مستطیل باشد را مکعب مستطیل می‌نامیم.



نکته: هر مکعب مستطیل، ۸ کُنج و ۱۲ یال دارد.

نکته: در هر مکعب مستطیل با ارتفاع h که طول و عرض قاعده‌ی آن a و b باشد، بر اساس آنچه در قسمت منشورها آموختیم رابطه‌های زیر برقرار است:

حجم : $V=a\times b\times h=abh$

مساحت جانبی : $S=۲\times(a+b)\times h=۲ah+۲bh$

مساحت کل : $S=۲ah+۲bh+۲ab=۲(ah+bh+ab)$

مثال: برای ساختن یک مکعب مستطیل مقوایی با ابعاد ۳، ۴ و ۵ سانتی‌متر، چند سانتی‌متر مربع مقوا نیاز داریم؟

حل:

کافی است مساحت کل مکعب مستطیل را حساب کنیم.

$S = ۲(۳\times۴+۳\times۵+۴\times۵) = ۲\times۴۷ = ۹۴cm^۲$

مثال: مساحت سه وجه متفاوت در یک مکعب مستطیل به ترتیب ۶، ۱۵ و ۱۰ سانتی‌متر مربع است.

الف) مساحت کل مکعب مستطیل چه‌قدر است؟

ب) حجم مکعب مستطیل چه‌قدر است؟

پ) آیا می‌توانید مقداری مشخص برای اندازه‌ی اضلاع مکعب مستطیل به‌دست آورید.

حل:

الف) مساحت کل مستطیل $= ۲(۶+۱۵+۱۰) = ۲\times۳۱ = ۶۲cm^۲$

ب) اگر اندازه‌ی ضلع‌های مکعب مستطیل را a، b و c در نظر بگیریم، داریم:

طرفین تساوی‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\begin{array}{l} a\times b = ۶ \\ \times\ a\times c = ۱۵ \\ \underline{\ b\times c = ۱۰\ } \end{array}$$

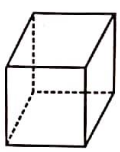
$$a\times a\times b\times b\times c\times c = ۹۰۰ \Rightarrow abc\times abc = ۹۰۰ \Rightarrow a\times b\times c = ۳۰$$

پ) بله، به شکل زیر:

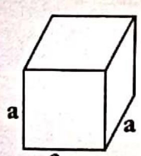
$$\left.\begin{array}{l} abc = ۳۰ \\ ab = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow c = ۵ \qquad \left.\begin{array}{l} ac = ۱۵ \\ c = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۳ \qquad \left.\begin{array}{l} bc = ۱۰ \\ c = ۵ \end{array}\right\} \Rightarrow b = ۲$$

مکعب

مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع و ارتفاع آن مساوی ضلع قاعده باشد را مکعب می‌نامند.



نکته: در مکعبی به ضلع a ، حجم، مساحت جانبی و مساحت کل از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید.



حجم $V = a\times a\times a = a^۳$

جانبی $S = ۴\times a^۲ = ۴a^۲$

کل $S = ۶\times a^۲ = ۶a^۲$

مثال: در مکعبی به ضلع ۱۰cm، حجم، مساحت جانبی و مساحت کل را حساب کنید.

حل:

$V = ۱۰^۳ = ۱۰۰۰cm^۳$

جانبی $S = ۴\times۱۰^۲ = ۴۰۰cm^۲$

کل $S = ۶\times۱۰^۲ = ۶۰۰cm^۲$

نکته: در مکعب یا مکعب مستطیل اگر اندازه‌ی هر ضلع را n برابر کنیم، مساحت کل و مساحت جانبی $n^{۲}$ برابر و حجم $n^{۳}$ برابر می‌شود. با تبدیل هر شکل سه‌بعدی به تعدادی مکعب ریز، می‌توانیم این نکته را تعمیم دهیم و برای هر شکل آن را استفاده کنیم.

مثال: اگر ضلع مکعبی را ۵ برابر کنیم، حجمش چند برابر می‌شود؟

حل:

$۵^{۳} = ۱۲۵$

مثال: در مکعب مستطیلی با ابعاد ۱۲، ۱۳ و ۱۷ سانتی‌متر چند مکعب به ضلع ۵cm می‌توان جا داد؟

حل:

اشتباه نکنید. بسیاری از دانش‌آموزان ممکن است حجم مکعب مستطیل را بر حجم مکعب تقسیم کنند، در حالی که چنین چیزی اشتباه است، زیرا مکعب‌ها نمی‌توانند کل فضای مکعب مستطیل را پر کنند.

بنابراین باید بررسی کنیم که روی هر ضلع چند مکعب می‌توان جای داد.

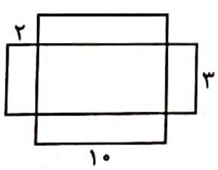
تعداد مکعب‌ها روی ضلع $۱۲\text{cm} = \frac{۱۲}{۵} \simeq ۲$

تعداد مکعب‌ها روی ضلع $۱۳\text{cm} = \frac{۱۳}{۵} \simeq ۲$

تعداد مکعب‌ها روی ضلع $۱۷\text{cm} = \frac{۱۷}{۵} \simeq ۳$

تعداد کل مکعب‌های جاشده $= ۲ \times ۲ \times ۳ = ۱۲$

مثال: در شکل، گسترده‌ی یک حجم را مشاهده می‌کنید. حجم آن‌را حساب کنید.



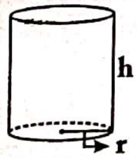
حل:

$$\left.\begin{aligned} \text{مساحت قاعده} &= ۱۰ \times ۳ = ۳۰\text{cm}^{۲} \\ \text{ارتفاع} &= ۲\text{cm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = ۳۰ \times ۲ = ۶۰\text{cm}^{۳}$$

استوانه

منشوری که قاعده‌ی آن دایره باشد را استوانه می‌نامیم.

نکته: در استوانه‌ای که اندازه‌ی شعاع قاعده r و اندازه‌ی ارتفاع h باشد، رابطه‌های حجم و مساحت به صورت زیر است:



$V = ۳/۱۴ \times$ شعاع $\times$ شعاع $\times$ ارتفاع $= \pi \times r^{۲} \times h = \pi r^{۲} h$

S جانبی $=$ قطر $\times ۳/۱۴ \times$ ارتفاع $= ۲ \times r \times \pi \times h = ۲\pi rh$

S کل $=$ مساحت جانبی $+ ۲ \times (۳/۱۴ \times$ شعاع $\times$ شعاع$) = ۲\pi rh + ۲\pi r^{۲}$

مثال: در استوانه‌ای با ارتفاع $۴cm$، اندازه‌ی شعاع قاعده $۱۰cm$ است. حجم، مساحت جانبی و مساحت کل آن را حساب کنید.

حل:

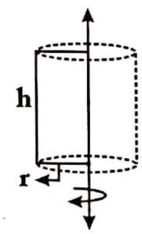
$h = ۴cm, r = ۱۰cm$

$V = ۱۰\times۱۰\times۳/۱۴\times۴ = ۱۲۵۶cm^۳$

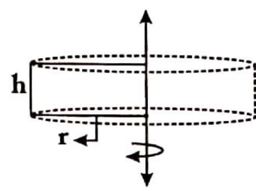
جانبی $S = ۲\times۱۰\times۳/۱۴\times۴ = ۲۵۱/۲cm^۲$

کل $S = ۲۵۱/۲ + ۲\times(۱۰\times۱۰\times۳/۱۴) = ۸۷۹/۲cm^۲$

تعریف استوانه با مفهوم دوران: یک مستطیل مقوایی را از لبه‌ی طولش به یک مداد بچسبانید. مداد را در جهتی ثابت با کف دست‌تان به صورت عمودی بچرخانید. اگر این کار را با سرعت و مداوم انجام دهید، مستطیل دوران‌یافته در ذهن شما احساس استوانه تداعی می‌کند. واضح است که اگر مستطیل را حول محور طولش دوران دهیم طول مستطیل، ارتفاع و عرض مستطیل، شعاع قاعده خواهد بود و اگر مستطیل را حول محور عرضش دوران دهیم، عرض مستطیل، ارتفاع استوانه و طول مستطیل، شعاع قاعده‌ی آن خواهد بود.



دوران حول محور طول



دوران حول محور عرض

پس: از دوران کامل (۳۶۰°) یک مستطیل حول محور طول یا عرضش استوانه پدید می‌آید.

مثال: **مستطیلی با طول و عرض ۱۰ و ۳ سانتی‌متر داریم. اگر این مستطیل را حول محور عرضش به طور کامل دوران دهیم، حجم و مساحت جانبی ایجادشده چه‌قدر است؟**

حل:

اگر مستطیل را حول محور عرض دوران بدهیم، طول مستطیل، شعاع قاعده و عرض مستطیل، ارتفاع آن خواهد بود.

$r = ۱۰cm \quad , \quad h = ۳cm$

$V = \pi r^۲ h = ۳/۱۴\times۱۰^۲\times۳ = ۹۴۲cm^۳$

جانبی $S = ۲\pi rh = ۲\times۳/۱۴\times۱۰\times۳ = ۱۸۸/۴cm^۲$

توجه: در سال‌های بعد خواهید آموخت که مقدار دقیق عدد پی، ۳/۱۴ نیست، بلکه برای راحتی کار با تقریب کم‌تر از ۰/۰۱ آن‌را به‌صورت ۳/۱۴ فرض می‌کنیم. بنابراین اگر بخواهیم مقدار مساحت یا محیط دایره را به‌صورت دقیق و حرفه‌ای بیان کنیم، باید پاسخ را بر حسب π بنویسیم. به این ترتیب در مثال قبل بهتر بود بنویسیم:

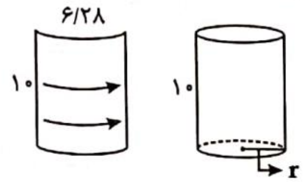
$V = \pi\times۱۰^۲\times۳ = ۳۰۰\pi$

جانبی $S = ۲\pi\times۱۰\times۳ = ۶۰\pi$

مثال: طول مستطیلی $۱۰cm$ و عرض آن $۶/۲۸cm$ است. با انطباق طول‌های مستطیل بر یک‌دیگر یک استوانه ساخته‌ایم. حجم این استوانه را حساب کنید.

حل:

با توجّه به شکل‌ها متوجّه می‌شوید که محیط قاعده‌ی استوانه همان عرض مستطیل است. بنابراین:



$$۲\pi r = ۲\times ۳/۱۴\times r = ۶/۲۸ \Rightarrow r = ۱cm$$

$$S_{\text{قاعده}} = \pi r^۲ = ۳/۱۴\times ۱^۲ = ۳/۱۴cm^۲$$

$$V = S\times h = ۳/۱۴\times ۱۰ = ۳۱/۴cm^۳$$

مثال: مستطیلی با طول و عرض مشخص داریم. از دوران حول کدام ضلع مستطیل، حجم بیش‌تری تولید می‌شود؟

حل:

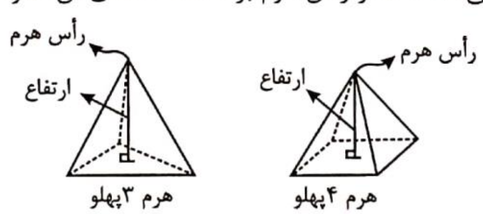
از دوران حول عرض مستطیل، حجم بیش‌تری تولید می‌شود، زیرا در رابطه‌ی حجم $(\pi r^۲ h)$، شعاع قاعده به دلیل وجود توان ۲ در آن، از ارتفاع مؤثرتر است. پس بهتر است دوران را حول عرض مستطیل انجام دهیم تا عدد بزرگ‌تر یعنی طول مستطیل، شعاع قاعده محسوب شود. اگر توضیح بالا شما را قانع نکرد، با چند مثال عددی مناسب آن‌را بررسی کنید.

(در این فصل حجم‌های منشوری را مورد بررسی قرار دادیم. بررسی حجم‌های مخروطی و کروی جزء موضوعات سال‌های آینده هستند که در این قسمت به صورت مختصر برای دانش‌آموزان علاقه‌مند آن‌ها را بررسی می‌کنیم.)

هرم

هرم: شکلی سه‌بُعدی است که دارای یک قاعده‌ی چند ضلعی بوده و پهلوهای مثلثی شکل آن همگی در نقطه‌ای به نام رأس هرم، هم‌رس هستند. هرم‌ها را بر حسب تعداد اضلاع قاعده‌شان نام‌گذاری می‌کنیم.

ارتفاع هرم: ارتفاع هرم، پاره‌خطی است که از رأس هرم بر صفحه قاعده‌ی آن عمود می‌شود.



نکته: در سال‌های آینده خواهید آموخت که هر هرم را می‌توان از برش منشور نظیرش به سه قسمت مساوی به‌دست آورد. بنابراین:

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}\times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

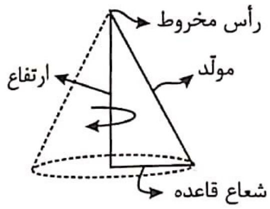
$$V = \frac{۱}{۳}S.h$$

مثال: قاعده‌ی یک هرم چهارپهلو با ارتفاع $۱۲cm$، مربعی به ضلع $۷cm$ است. حجم هرم را حساب کنید.

حل:

$$V = \frac{۱}{۳}\times ۷^۲\times ۱۲ = ۱۹۶cm^۳$$

مخروط



از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از ضلع‌های زاویه‌ی قائمه‌اش، مخروط به‌دست می‌آید. در این حالت ضلعی که دوران حول آن انجام شده را ارتفاع مخروط و ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه را شعاع قاعده‌ی مخروط و وتر مثلث قائم‌الزاویه را مولّد مخروط می‌نامیم.

نکته: اگر یک استوانه را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم، می‌توان سه مخروط مساوی به‌دست آورد (تجسّم این موضوع کمی دشوار است). بنابراین، حجم هر مخروط، ثلث حجم استوانه‌ای با ارتفاع و شعاع قاعده‌ی مخروط است.

ارتفاع × مساحت قاعده × $\frac{۱}{۳}$ = حجم مخروط

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}.h$$

شرمنده که فعلاً نمی‌توانیم این موضوع را اثبات کنیم. اگر دوست نداشتید، حق دارید این رابطه را تا موقعی که اثبات نکرده‌ایم، از ما قبول نکنید.

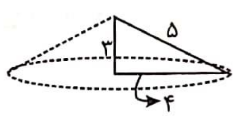
مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع ۳، ۴ و ۵ سانتی‌متر را حول ضلع $۳\,cm$ دوران داده‌ایم.

الف) شکل فرضی مناسب را رسم کنید.

ب) حجم ایجاد شده را حساب کنید.

حل:

الف)

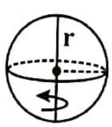


ب)

$$V = \frac{۱}{۳}\pi \times ۴^{۲} \times ۳ = ۱۶\pi\, cm^{۳}$$

کـــره

از دوران کامل یک نیم‌دایره حول قطرش، کره پدید می‌آید.



نکته: حجم و مساحت رویه‌ی کره‌ای با شعاع r از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \qquad S = ۴\pi r^{۲}$$

باز هم شرمنده!

مثال: در کره‌ای به شعاع $۳cm$ حجم و مساحت را حساب کنید.

حل:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi \times ۳^{۳} = ۳۶\pi\ cm^{۳}$$

$$S = ۴\pi \times ۳^{۲} = ۳۶\pi\ cm^{۲}$$

شاید پاسخ‌های این مثال باعث تعجب شما شده باشد. تعجب نکنید! در حالتی که شعاع کره $۳cm$ باشد، حجم و مساحتش از نظر عددی یکسان است.