

فصل ۷

«عبارت های گویا»

معرفی و ساده کردن عبارت های گویا

به کسری که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد **عبارت گویا** می گویند. مانند: $\frac{4x}{2y+7}$ ، $-\frac{3}{8}$

نکته: هر گاه در عبارتی، متغیر، **زیر رادیکال** باشد یا **درون قدر مطلق** باشد و یا **در توان** باشد آن گاه آن عبارت، گویا نیست.

تمرین (۱) کدام یک از عبارت های زیر، گویا است؟

الف $\frac{-x^2}{2x+1}$ **هست**

ب $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ **هست**

پ $\frac{x}{\sqrt{y}}$ **نیست**

ت $\frac{a^3-b^3}{b+1}$ **هست**

ث 5 **هست**

ج $\frac{3x+\sqrt{7}}{x^2}$ **هست**

ح $\frac{x}{y}$ **هست**

د $\frac{x^{-1}}{x}$ **هست**

خ $\frac{|x||y|}{a}$ **نیست**

مقادیر تعریف نشده عبارت گویا

می دانیم کسرهایی که مخرج آن ها صفر باشد **تعریف نشده** هستند (مانند $\frac{7}{0}$ ، $\frac{5}{0}$ و ...)؛ یعنی مقدار مشخصی ندارند. بنابراین یک عبارت گویا زمانی تعریف نشده است که **مخرج آن مساوی صفر** باشد.

تمرین (۲) هر یک از عبارت های زیر، به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف $\frac{3x-1}{x+1}$

ب $\frac{a-5}{3a+1}$

مخرج = 0 $\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

مخرج = 0 $\Rightarrow 3a+1=0 \Rightarrow 3a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

پس عبارت بالا به ازای $x=-1$ تعریف نشده است.

پس عبارت بالا به ازای $a=-\frac{1}{3}$ تعریف نشده است.

پ $\frac{2x}{x^2-9}$

ت $\frac{a}{a^2-5a+6}$

اتحاد مزدوج $x^2-9=0 \Rightarrow$ مخرج = 0 \Rightarrow

اتحاد جمله مشترک $a^2-5a+6=0 \Rightarrow (a-2)(a-3)=0 \Rightarrow$ مخرج = 0 \Rightarrow

$(x-3)(x+3)=0 \Rightarrow$

$(a-2)=0 \Rightarrow a=+2$

$(x-3)=0 \Rightarrow x=+3$

$(a-3)=0 \Rightarrow a=+3$

$(x+3)=0 \Rightarrow x=-3$

پس عبارت گویای بالا به ازای $a=+2$ و $a=+3$ تعریف نشده است.

پس عبارت گویای بالا به ازای $x=+3$ و

$x=-3$ تعریف نشده است.

$$\text{ث}^* \frac{9+x}{x}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $x=0$ تعریف نشده است.

$$\text{ج}^* \frac{7x}{x^2+5}$$

عبارت گویای بالا به ازای هر عدد حقیقی دلخواه، همیشه تعریف شده است.
توجه: هرگاه توان متغیر مخرج زوج باشد و با یک عدد حقیقی جمع شده باشد
آنگاه مخرج هیچگاه صفر نمی شود و عبارت گویا همواره تعریف شده است.

$$\text{چ}^* \frac{2x}{x(3x-9)}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x(3x-9) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x=0}$$

$$(3x-9) = 0 \Rightarrow 3x = +9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{x = +3}$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $x = +3$ و $x = 0$ تعریف نشده است.

$$\text{ح}^* \frac{x}{x-5}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x-5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = +5}$$

پس عبارت بالا به ازای $x = 5$ تعریف نشده است.

$$\text{خ}^* \frac{8}{x^6+1}$$

چون توان متغیر مخرج زوج است و با یک عدد حقیقی جمع شده است بنابراین مخرج هیچگاه صفر نمی شود و عبارت گویا همواره تعریف شده است.

$$\text{د}^* \frac{4x}{x^2}$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

پس عبارت گویای بالا به ازای $x = 0$ تعریف نشده است.

ساده کردن عبارت های گویا

برای ساده کردن یک عبارت گویا، ابتدا در صورت امکان، صورت و مخرج کسر را به کمک اتحادهای و فاکتورگیری، تجزیه کرده سپس عامل های مشترک موجود در صورت و مخرج کسر را حذف می کنیم.
تمرین ۳) عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

$$\text{الف}^* \frac{x^2+5x+6}{x^2-4} \quad \begin{array}{l} \text{اتحاد جمله مشترک} \\ \text{اتحاد مزدوج} \end{array} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x-2}$$

$$\text{ب}^* \frac{x^3+3x^2}{x^2+3x} \quad \begin{array}{l} \text{فاکتورگیری} \\ \text{فاکتورگیری} \end{array} = \frac{x^2(x+3)}{x(x+3)} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = x$$

$$\text{پ}^* \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} \quad \begin{array}{l} \text{اتحاد جمله مشترک} \\ \text{اتحاد جمله مشترک} \end{array} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\text{ت}^* \frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y} \quad \begin{array}{l} \text{فاکتورگیری} \\ \text{فاکتورگیری} \end{array} = \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} \quad \begin{array}{l} \text{اتحاد جمله مشترک} \\ \text{اتحاد جمله مشترک} \end{array} = \frac{(y-3)(y+1)}{(y+1)} = y-3$$

$$\text{ث} * \frac{x-y}{y-x} \stackrel{\text{فاکتورگیری}}{=} \frac{(x-y)}{-(x-y)} = -1$$

$$\text{ج} * \frac{2+x}{-x-2} \stackrel{\text{فاکتورگیری}}{=} \frac{(2+x)}{-(x+2)} = -1$$

$$\text{چ} * \frac{1-a^2}{a^2+1} \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \frac{(1-a^2)(1+a^2)}{(a^2+1)} = 1-a^2$$

$$\text{ح} * \frac{-10a+15}{4a-6} \stackrel{\text{فاکتورگیری}}{=} \frac{-5(2a-3)}{2(2a-3)} = -\frac{5}{2}$$

نکته: هر گاه صورت و مخرج یک عبارت گویا، قرینه یکدیگر باشند آن گاه حاصل آن عبارت، -1 می شود.

تمرین ۴) حاصل کدام عبارت برابر -1 می باشد؟

$$\text{الف} * \frac{3x+7}{3x-7}$$

$$\text{ب} * \frac{6x-1}{-1-6x}$$

$$\text{پ} * \frac{6y+5}{5+6y}$$

$$\text{ت} * \frac{2y-5}{5-2y}$$

$$\frac{2y-5}{5-2y} = -1 \quad \text{پاسخ: گزینه ت}$$

نکته: هر گاه صورت و مخرج یک عبارت گویا مساوی باشند آن گاه حاصل آن عبارت، 1 می شود.

تمرین ۵) حاصل کدام عبارت برابر یک می باشد؟

$$\text{الف} * \frac{2a+5}{2a-5}$$

$$\text{ب} * \frac{2a-5}{5-2a}$$

$$\text{پ} * \frac{2a+5}{5+2a}$$

$$\text{ت} * \frac{5+2a}{2a+5}$$

$$\frac{2a+5}{5+2a} = 1 \quad \text{پاسخ: گزینه ت}$$

تمرین ۶) عبارت $\frac{-2+x}{x+4}$ با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟

$$\text{الف} * \frac{x-2}{x+4}$$

$$\text{ب} * \frac{x+2}{x+4}$$

$$\text{پ} * \frac{2-x}{x+4}$$

$$\text{ت} * \frac{2+x}{x+4}$$

$$-\frac{2-x}{x+4} = \frac{-2+x}{x+4}$$

پاسخ: گزینه پ - زیرا اگر علامت منفی را در صورت کسر ضرب کنیم داریم:

تمرین ۷) کدام یک از عبارت های زیر با $\frac{x}{y}$ برابر است؟

$$\text{الف} * \frac{x^3}{y^3}$$

$$\text{ب} * \frac{3x}{3y}$$

$$\text{پ} * \frac{3x}{3y}$$

$$\text{ت} * \frac{x+3}{y+3}$$

$$\frac{3x}{3y} = \frac{x}{y} \quad \text{پاسخ: گزینه ب}$$

تمرین ۸) عبارت $\frac{3-x}{x-5}$ با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟

ت* $-\frac{3-x}{x-5}$

پ* $\frac{3-x}{5-x}$

ب* $\frac{x-3}{5-x}$

الف* $-\frac{x+3}{x-5}$

$\frac{x-3}{5-x} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} = \frac{-(3-x)}{-(x-5)} = \frac{3-x}{x-5}$

پاسخ: گزینه ب - زیرا

تمرین ۹) کدام یک از عبارت های زیر را می توان ساده کرد؟

ت* $\frac{x^2+7x}{x}$

پ* $\frac{x^2+7}{x^2-7}$

ب* $\frac{x^2+7}{7}$

الف* $\frac{x^2+7}{x+7}$

$\frac{x^2+7x}{x} \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} = \frac{x(x+7)}{x} = x+7$

پاسخ: گزینه ت - زیرا

تمرین ۱۰) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید تا تساوی برقرار باشد.

(ابتدا صورت و مخرج کسرها را با کمک اتحادها یا فاکتورگیری تجزیه می کنیم سپس با مقایسه صورت ها با هم و مخرج ها با هم جاهای خالی را کامل می کنیم.)

الف* $\frac{5}{3x} = \frac{\boxed{}}{3xy}$

ب* $\frac{5x}{2-x} = \frac{5x^2+10x}{\boxed{}$

$\frac{5}{3x} \xrightarrow{\times xy} = \frac{5xy}{3xy}$

$\frac{5x}{2-x} \xrightarrow{\times(x+2)} = \frac{5x(x+2)}{(2-x)(x+2)}$

پاسخ:

پ* $\frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{}}{z^2+z}$

ت* $\frac{x-1}{x} = \frac{\boxed{}}{x^3+x^2+x}$

$\frac{1-z}{z} \xrightarrow{\times(z+1)} = \frac{(1-z)(z+1)}{z(z+1)}$

$\frac{x-1}{x} \xrightarrow{\times(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x^2+x+1)}$

پاسخ:

ث* $\frac{x}{\boxed{}} = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$

پاسخ
⇒

$\frac{x}{(x+2)} \xrightarrow{\times(x-2)} = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

ضرب و تقسیم عبارت های گویا

ضرب و تقسیم عبارت های گویا مانند ضرب و تقسیم اعداد گویا است. فقط قبل از انجام عمل ضرب یا تقسیم، در صورت امکان کسرها را در صورت امکان تجزیه کرده و ساده می کنیم.

تمرین (۱) حاصل عبارت های زیر را به ساده ترین شکل بنویسید.

$$\text{الف} \quad \frac{1 \cdot x}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 2x}{5x^2} = \frac{\cancel{x}^1 + x}{(x-2)(x+2)} \times \frac{x(x-2)}{5x^2} = \frac{2x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

$$\text{ب} \quad \frac{5x^2 - 15x}{x+7} \times \frac{7}{x-3} = \frac{5x(x-3)}{x+7} \times \frac{7}{x-3} = \frac{35x}{x+7}$$

$$\text{پ} \quad \frac{a^2 - 1}{a^2 - 2a + 1} \div \frac{2a + 2}{ax - x} = \frac{a^2 - 1}{a^2 - 2a + 1} \times \frac{ax - x}{2a + 2} = \frac{(a-1)(\cancel{a+1})}{(a-1)(a-1)} \times \frac{x(\cancel{a-1})}{2(\cancel{a+1})} = \frac{x}{2}$$

$$\text{ت} \quad \frac{x^2 y - xy}{x^2 - 1} \div \frac{6y}{3x^2 + 3x} = \frac{x^2 y - xy}{x^2 - 1} \times \frac{3x^2 + 3x}{6y} = \frac{xy(x-1)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{3x(x+1)}{6y} = \frac{x^2}{2}$$

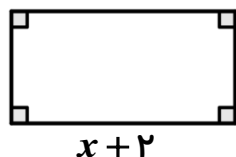
$$\text{ث} \quad \frac{x^2 - 49}{x^2 + 6x - 7} \div \frac{7-x}{x+1} = \frac{x^2 - 49}{x^2 + 6x - 7} \times \frac{x+1}{7-x} = \frac{(x-7)(x+7)}{(x+7)(x-1)} \times \frac{x+1}{-(x-7)} = \frac{x+1}{-(x-1)}$$

$$\text{ج} \quad \frac{3a^2}{a+1} \div \frac{a^2 - a}{a^2 - 1} = \frac{3a^2}{a+1} \times \frac{a^2 - 1}{a^2 - a} = \frac{3a^{\cancel{2}}}{(a+1)} \times \frac{(a-1)(\cancel{a+1})}{a(a-1)} = 3a$$

$$\text{چ} \quad \frac{m+4}{3m^2 - 12m} \div \frac{m^2 + 8m + 16}{m^2 - 4m} = \frac{m+4}{3m^2 - 12m} \times \frac{m^2 - 4m}{m^2 + 8m + 16} =$$

$$\frac{(m+4)}{3m(m-4)} \times \frac{m(m-4)}{(m+4)(m+4)} = \frac{1}{3(m+4)}$$

تمرین ۱۲) مساحت مستطیل زیر را بر حسب x به دست آورید. ($x > ۲$)



$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$$

پاسخ: می دانیم مساحت مستطیل برابر است با طول ضربدر عرض .

بنابراین طول و عرض را ضرب کرده و ساده می کنیم:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \times \frac{x + 2}{1} = \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} \times \frac{x+2}{1} = (x-2)(x+2)$$

تمرین ۱۳) اگر $A = a^2 - b^2$ و $B = a^2 + b^2$ و $C = 2ab$ باشد، آن گاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{A^2 - B^2}{C^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) - (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)}{4a^2b^2}$$

پاسخ:

$$= \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4}{4a^2b^2} = \frac{-4a^2b^2}{4a^2b^2} = -1$$

توجه: استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای $(a^2 - b^2)^2 = (a^2)^2 - 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

توجه: استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای $(a^2 + b^2)^2 = (a^2)^2 + 2(a^2)(b^2) + (b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

تمرین ۱۴) دو عبارت گویا بنویسید که حاصل ضرب آن ها $\frac{a+7}{a-3}$ شود.

پاسخ: برای پاسخ دادن به این سؤال، کافی است عبارت را به صورت $\frac{a+7}{a-3} \times \frac{\square}{\square}$ بنویسیم و در جاهای خالی دو چند جمله ای یکسان قرار دهیم . بنابراین پاسخ های مختلفی وجود دارد؛ چند نمونه از آن ها به صورت زیر است:

$$\frac{a+7}{\square} \times \frac{\square}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}$$

$$\frac{a+7}{2a-1} \times \frac{2a-1}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}$$

$$\frac{a+7}{2} \times \frac{2}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}$$

تمرین ۱۵) عبارت گویایی بیابید که اگر در عبارت $\frac{x^2 - y^2}{2x + y}$ ضرب شود حاصل آن برابر $x - y$ شود.

$$\frac{x^2 - y^2}{2x + y} \times \frac{\square}{\square} = x - y$$

پاسخ:

کافی است عبارت $x - y$ را بر $\frac{x^2 - y^2}{2x + y}$ تقسیم کنیم:

$$x - y \div \frac{x^2 - y^2}{2x + y} = \frac{x - y}{1} \times \frac{2x + y}{x^2 - y^2} = \frac{x - y}{1} \times \frac{2x + y}{(x - y)(x + y)} = \frac{2x + y}{x + y}$$

جمع و تفریق عبارات های گویا

نکته: در جمع و تفریق عبارات های گویا، اگر مخرج ها مساوی نباشند ابتدا مخرج مشترک می گیریم.

توجه: برای تعیین مخرج مشترک، ابتدا در صورت امکان، مخرج ها را با کمک فاکتورگیری و اتحادها تجزیه می کنیم سپس حاصل ضرب عامل های مشترک با توان بیشتر و عامل های غیر مشترک را به عنوان مخرج مشترک در نظر

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

و

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

می گیریم.

تمرین ۱۶) حاصل عبارات های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف*} \quad \frac{3x+1}{5x+3} - \frac{8x+4}{5x+3} = \frac{3x+1-(8x+4)}{5x+3} = \frac{3x+1-8x-4}{5x+3} = \frac{-5x-3}{5x+3} = \frac{-(5x+3)}{5x+3} = -1$$

$$\text{ب*} \quad \frac{6}{x} - \frac{4}{-x} = \frac{6}{x} + \frac{4}{x} = \frac{10}{x}$$

$$\text{پ*} \quad \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a/b)(a+b)}{a/b} = a+b$$

$$\text{ت*} \quad \frac{-3x}{x^2-4} + \frac{2}{x+2} = \frac{-3x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2}{(x+2)} = \frac{-3x}{(x-2)(x+2)} + \frac{2 \times (x-2)}{(x+2) \times (x-2)} =$$

$$\frac{-3x+2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x-4}{(x-2)(x+2)}$$

$$\text{ث*} \quad \frac{2x-4}{5-x} - \frac{5x-2}{x-5} = \frac{2x-4}{5-x} - \frac{5x-2}{-(5-x)} = \frac{2x-4}{5-x} + \frac{5x-2}{(5-x)} = \frac{2x-4+5x-2}{5-x} = \frac{7x-6}{5-x}$$

$$\text{ج*} \quad \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{1 \times (x-1)}{(x+2) \times (x-1)} - \frac{3}{(x-1)(x+2)} =$$

$$\frac{x-1-3}{(x-1)(x+2)} = \frac{x-4}{(x-1)(x+2)}$$

$$\text{چ*} \quad \frac{5x^2}{x^2+x} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5x^2}{x(x+1)} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5x^2}{x(x+1)} - \frac{3x \times x}{(x+1) \times x} = \frac{5x^2-3x^2}{x(x+1)} = \frac{2x^2}{x(x+1)} = \frac{2x}{(x+1)}$$

$$\text{ح*} \quad \frac{5x+1}{x^2-y^2} - \frac{6}{x+y} = \frac{5x+1}{(x-y)(x+y)} - \frac{6}{x+y} = \frac{(5x+1)}{(x-y)(x+y)} - \frac{6 \times (x-y)}{(x+y) \times (x-y)} =$$

$$\frac{(5x+1)-6(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{5x+1-6x+6y}{(x-y)(x+y)} = \frac{-x+6y+1}{(x-y)(x+y)}$$

$$\text{ح}^* \frac{-x^r}{x^r-9} - \frac{x}{x+3} = \frac{-x^r}{(x-3)(x+3)} - \frac{x}{x+3} = \frac{-x^r}{(x-3)(x+3)} - \frac{x \times (x-3)}{(x+3) \times (x-3)} =$$

$$\frac{-x^r - x(x-3)}{(x+3) \times (x-3)} = \frac{-x^r - x^r + 3x}{(x+3) \times (x-3)} = \frac{-2x^r + 3x}{(x+3)(x-3)}$$

$$\text{د}^* \frac{x-1}{x-y} - \frac{1-y}{y-x} = \frac{x-1}{x-y} - \frac{1-y}{-(x-y)} = \frac{x-1}{x-y} + \frac{1-y}{(x-y)} = \frac{x-1+1-y}{x-y} = \frac{x-y}{x-y} = 1$$

$$\text{س}^* \frac{r+x^r-2x}{r+x} - r - x = \frac{r+x^r-2x}{(r+x)} + \frac{(-r-x)}{1} = \frac{r+x^r-2x}{(r+x)} + \frac{(-r-x) \times (r+x)}{1 \times (r+x)} =$$

$$\frac{r+x^r-2x-r-rx-2x-x^r}{(r+x)} = \frac{-6x}{r+x}$$

$$\text{ز}^* \frac{rx}{3x-12} + \frac{x}{x^r-16} = \frac{rx}{3(x-4)} + \frac{x}{(x-4)(x+4)} = \frac{rx \times (x+4)}{3(x-4) \times (x+4)} + \frac{x \times 3}{(x-4)(x+4) \times 3} =$$

$$\frac{rx^r+16x+3x}{3(x-4) \times (x+4)} = \frac{rx^r+19x}{3(x-4) \times (x+4)}$$

$$\text{ح}^* \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+2} = \frac{1 \times (x+2)}{(x-3) \times (x+2)} + \frac{2 \times (x-3)}{(x+2) \times (x-3)} = \frac{x+2+2x-6}{(x-3) \times (x+2)} = \frac{+3x-4}{(x-3)(x+2)}$$

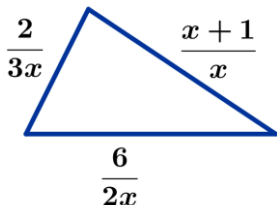
$$\text{ز}^* \frac{3}{x-y} + \frac{4}{x+y} = \frac{3 \times (x+y)}{(x-y) \times (x+y)} + \frac{4 \times (x-y)}{(x+y) \times (x-y)} = \frac{3x+3y+4x-4y}{(x+y) \times (x-y)} = \frac{7x-y}{(x+y)(x-y)}$$

$$\text{س}^* \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{(a+b) \times b}{a \times b} + \frac{(a+b) \times a}{b \times a} = \frac{ab+b^r}{ab} + \frac{a^r+ab}{ba} = \frac{a^r+2ab+b^r}{ab} = \frac{(a+b)^r}{ab}$$

$$\text{ش}^* \frac{m+3}{m^r-9} + \frac{m+7}{m^r+1 \cdot m+21} = \frac{m+3}{(m+3)(m-3)} + \frac{m+7}{(m+3)(m+7)} = \frac{1}{(m-3)} + \frac{1}{(m+3)} =$$

$$\frac{1 \times (m+3)}{(m-3) \times (m+3)} + \frac{1 \times (m-3)}{(m+3) \times (m-3)} = \frac{m+3+m-3}{(m+3) \times (m-3)} = \frac{2m}{(m+3)(m-3)}$$

تمرین ۱۷) محیط هر یک از شکل های زیر را بر حسب x به دست آورید و آن را ساده کنید. ($x > 0$)



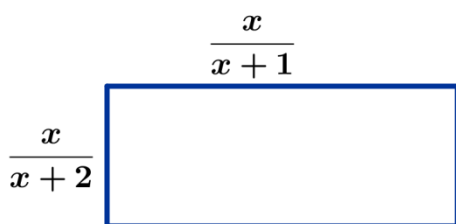
پاسخ: برای یافتن محیط مثلث کافی است که هر سه ضلع مثلث را با هم جمع کنیم و

مخرج مشترک بگیریم:

$$P = \frac{2}{3x} + \frac{6}{2x} + \frac{x+1}{x} = \frac{2 \times 2}{3x \times 2} + \frac{6 \times 3}{2x \times 3} + \frac{(x+1) \times 6}{x \times 6} = \frac{4+18+6x+6}{6x} = \frac{6x+28}{6x}$$

پاسخ: برای یافتن محیط مستطیل، کافی است که یک طول و یک عرض را

با هم جمع کنیم و حاصل را در ۲ ضرب کنیم:



$$\text{محیط مستطیل} = 2 \times (\text{طول} + \text{عرض})$$

$$\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x+1} = \frac{x \times (x+1)}{(x+2) \times (x+1)} + \frac{x \times (x+2)}{(x+1) \times (x+2)} = \frac{x^2 + x + x^2 + 2x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x^2 + 3x}{(x+1)(x+2)}$$

$$P = 2 \times \frac{2x^2 + 3x}{(x+1)(x+2)} = \frac{4x^2 + 6x}{(x+1)(x+2)}$$

تمرین ۱۸) دو عبارت گویا بنویسید که حاصل جمع آن ها $\frac{a+7}{a-3}$ شود.

پاسخ: برای پاسخ دادن به این سؤال، کافی است عبارت را به صورت $\frac{\square}{a-3} + \frac{\square}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}$ بنویسیم و در جاهای خالی دو چند جمله ای به گونه ای قرار دهیم که حاصل جمع آنها $a+7$ شود. بنابراین پاسخ های مختلفی وجود دارد؛ چند نمونه از آن ها به صورت زیر است:

$$\frac{a}{a-3} + \frac{7}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}, \quad \frac{a+8}{a-3} + \frac{-1}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}, \quad \frac{a+3}{a-3} + \frac{4}{a-3} = \frac{a+7}{a-3}$$

تمرین ۱۹) دو عبارت گویا بنویسید که حاصل جمع آن ها $\frac{4x}{x+5}$ شود.

پاسخ: برای پاسخ دادن به این سؤال، کافی است عبارت را به صورت $\frac{\square}{x+5} + \frac{\square}{x+5} = \frac{4x}{x+5}$ بنویسیم و در جاهای خالی دو چند جمله ای به گونه ای قرار دهیم که حاصل جمع آنها $4x$ شود. بنابراین پاسخ های مختلفی وجود دارد؛ چند نمونه از آن ها به صورت زیر است:

$$\frac{3x}{x+5} + \frac{x}{x+5} = \frac{4x}{x+5}, \quad \frac{2x}{x+5} + \frac{2x}{x+5} = \frac{4x}{x+5}, \quad \frac{5x}{x+5} + \frac{-x}{x+5} = \frac{4x}{x+5}$$

ساده کردن عبارت های مرکب

نکته: کسری که صورت و مخرج آن عبارت های گویا باشد، کسر گویای مرکب نام دارد.

نکته: برای به دست آوردن حاصل یک عبارت گویای مرکب، ابتدا حاصل صورت و مخرج را جداگانه به دست می آوریم و سپس آن ها را بر هم تقسیم می کنیم.

تمرین ۲۰) حاصل هر عبارت را به ساده ترین شکل بنویسید. (مخرج همه کسرها مخالف صفر فرض شده است)

$$\text{الف}^* \frac{\frac{3}{x} + 2}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x}} =$$

$$\text{جواب صورت} \Rightarrow \frac{3}{x} + 2 = \frac{3}{x} + \frac{2 \times x}{1 \times x} = \frac{3+2x}{x}$$

$$\text{جواب مخرج} \Rightarrow \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{5}{x^2} - \frac{1 \times x}{x \times x} = \frac{5-x}{x^2}$$

$$\text{حاصل کل عبارت} \Rightarrow \frac{\frac{3}{x} + 2}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{x} + 2 \right) \div \left(\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{3+2x}{x} \div \frac{5-x}{x^2} = \frac{3+2x}{x} \times \frac{x^2}{5-x} = \frac{x(3+2x)}{5-x}$$

$$\text{ب}^* \frac{a - \frac{a^2}{a-b}}{1 + \frac{b^2}{a^2-b^2}} =$$

$$\text{جواب صورت} \Rightarrow a - \frac{a^2}{a-b} = \frac{a \times (a-b)}{1 \times (a-b)} - \frac{a^2}{a-b} = \frac{a^2 - ab - a^2}{a-b} = \frac{-ab}{a-b}$$

$$\text{جواب مخرج} \Rightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2-b^2} = \frac{1 \times (a^2-b^2)}{1 \times (a^2-b^2)} + \frac{b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2}{a^2-b^2}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل کل عبارت} \Rightarrow \frac{a - \frac{a^2}{a-b}}{1 + \frac{b^2}{a^2-b^2}} &= \left(a - \frac{a^2}{a-b} \right) \div \left(1 + \frac{b^2}{a^2-b^2} \right) = \frac{-ab}{a-b} \div \frac{a^2}{a^2-b^2} = \frac{-ab}{a-b} \times \frac{a^2-b^2}{a^2} \\ &= \frac{-ab}{a-b} \times \frac{(a-b)(a+b)}{a^2} = \frac{b(a+b)}{a} \end{aligned}$$

$$* \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} =$$

$$\text{جواب صورت} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1 \times y}{x \times y} - \frac{1 \times x}{y \times x} = \frac{y-x}{xy}$$

$$\text{جواب مخرج} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1 \times y}{x \times y} + \frac{1 \times x}{y \times x} = \frac{y+x}{xy}$$

$$\text{حاصل کل عبارت} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{y-x}{xy} \div \frac{y+x}{xy} = \frac{y-x}{xy} \times \frac{xy}{y+x} = \frac{y-x}{y+x}$$

تمرین ۲۱) کدام یک از تساوی های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح کنید.

$$\frac{1}{a-b} \xrightarrow{\times(-1)} = \frac{-1}{-a+b}$$

نادرست - زیرا

$$* \text{ الف} \quad \frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$$

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{z}} = \frac{x}{y} \div \frac{x}{z} = \frac{x}{y} \times \frac{z}{x} = \frac{z}{y}$$

درست - زیرا

$$* \text{ ب} \quad \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{z}} = \frac{z}{y}$$

$$-\frac{x+2}{x+5} = \frac{-x-2}{x+5}$$

نادرست - زیرا

$$* \text{ پ} \quad -\frac{x+2}{x+5} = \frac{-x+2}{x+5}$$

$$* \text{ ت} \quad \frac{x}{y} - \frac{5x-2}{y} = \frac{-4x-2}{y}$$

$$\frac{x}{y} - \frac{5x-2}{y} = \frac{x-(5x-2)}{y} = \frac{x-5x+2}{y} = \frac{-4x+2}{y}$$

تقسیم چند جمله ای ها

تقسیم چند جمله ای ها شامل سه بخش است:

(۱) تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای

برای تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای از قوانین ساده کردن کسرها و قوانین مربوط به ساده کردن جمله های توان دار استفاده می کنیم.

تمرین ۲۲) حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف} \quad \frac{14x^5y}{2x^2y^2} = \frac{\overset{y}{\cancel{14}}}{\cancel{2}} \times \frac{\overset{x^3}{\cancel{x^5}}}{\cancel{x^2}} \times \frac{\cancel{y}}{\cancel{y^2}} = \frac{7x^3}{y}$$

$$\text{ب} \quad \frac{-24x^3y^2z}{18xy^3z} = \frac{-4x^2}{3y}$$

$$\text{پ} \quad \frac{-\sqrt{5} \cdot m^2 np^4}{\Delta np^2} = \frac{-5\sqrt{2} m^2 np^4}{\Delta np^2} = -\sqrt{2} m^2 p^2$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

۲) تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای

برای تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای، تک تک جملات صورت کسر را بر یک جمله ای مخرج تقسیم می کنیم و حاصل را ساده می کنیم.

تمرین ۲۳) حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف} \quad \frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

$$\text{ب} \quad \frac{18a^3 - 24a^2 + 12a}{3a} = \frac{18a^3}{3a} - \frac{24a^2}{3a} + \frac{12a}{3a} = 6a^2 - 8a + 4$$

$$\text{پ} \quad \frac{27a^3b^2 - 36a^4b^5 - 18a^2b^3}{9a^2b} = \frac{27a^3b^2}{9a^2b} - \frac{36a^4b^5}{9a^2b} - \frac{18a^2b^3}{9a^2b} = 3ab - 4a^2b^4 - 2b^2$$

$$\text{ت} \quad (5a + 6a^2 - 10a^3 - 3a^5) \div (3 \cdot a) = \frac{5a}{3 \cdot a} + \frac{6a^2}{3 \cdot a} - \frac{10a^3}{3 \cdot a} - \frac{3a^5}{3 \cdot a} = \frac{1}{3} + \frac{a}{1} - \frac{a^2}{3} - \frac{a^4}{1}$$

۳) تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای

در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای، باید مراحل زیر را انجام دهیم:

۱- قبل از انجام عمل تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه را بر حسب توان نزولی متغیر، مرتب می کنیم. (یعنی از توان بیشتر به توان کمتر)

۲- اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

۳- حاصل به دست آمده از مرحله قبل را در خارج قسمت می نویسیم و در مقسوم علیه ضرب می کنیم و حاصل ضرب را در زیر مقسوم می نویسیم.

۴- چون عبارت به دست آمده را باید از مقسوم کم کنیم، بنابراین علامت جمله های آن را قرینه می کنیم.

۵- اکنون چند جمله ای باقی مانده را نیز مانند مرحله قبل، بر مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

۶- این تقسیم را تا جایی ادامه می دهیم که باقی مانده صفر شود و یا درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر باشد.

تمرین ۲۴) چند جمله ای $2x^2 - 7x - 15$ را بر $x - 5$ تقسیم کنید و خارج قسمت و باقی مانده تقسیم را مشخص کنید.

$$\begin{array}{r}
 \text{مقسوم علیه} \\
 \text{مقسوم} \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 \textcircled{+2x^2} - 7x - 15 \\
 \underline{- 2x^2 + 10x} \\
 3x - 15 \\
 \underline{- 3x + 15} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \textcircled{x - 5} \\
 \hline
 2x + 3 \\
 \hline
 \text{خارج قسمت}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\frac{2x^2}{x} = 2x$$

$$\frac{3x}{x} = 3$$

باقی مانده \circ

نکته: هر گاه در یک تقسیم باقی مانده صفر شود می گوئیم مقسوم بر مقسوم علیه **بخش پذیر** است.

تمرین ۲۵) تقسیم های زیر را انجام دهید و باقی مانده را مشخص کنید.

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{x^2} + 8x + 11 \\
 \underline{- x^2 + 2x} \\
 6x + 11 \\
 \underline{- 6x + 12} \\
 -1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \textcircled{x + 2} \\
 \hline
 x + 6 \\
 \hline
 \text{خارج قسمت}
 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{x} = x$$

$$\frac{6x}{x} = 6$$

باقی مانده -1

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{2x^3} - 4x + 2 \\
 \underline{- 2x^3 + 2x^2} \\
 2x^2 - 4x + 2 \\
 \underline{- 2x^2 + 2x} \\
 -2x + 2 \\
 \underline{- 2x + 2} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \textcircled{x - 1} \\
 \hline
 2x^2 + 2x - 2 \\
 \hline
 \text{خارج قسمت}
 \end{array}$$

$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

$$\frac{2x^2}{x} = 2x$$

$$\frac{-2x}{x} = -2$$

باقی مانده \circ

$$\begin{array}{r}
 8x^3 - 125 \\
 \underline{- 8x^3 + 20x^2} \\
 20x^2 - 125 \\
 \underline{- 20x^2 + 50x} \\
 50x - 125 \\
 \underline{- 50x + 125} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 5 - 2x \\
 \hline
 -2x + 5 \\
 \hline
 \text{خارج قسمت}
 \end{array}$$

$$\frac{8x^3}{-2x} = -4x^2$$

$$\frac{20x^2}{-2x} = -10x$$

$$\frac{50x}{-2x} = -25$$

باقی مانده \circ

$$\begin{array}{r}
 9x^3 + 5x - 4 \\
 \underline{- 9x^3 + 6x^2} \\
 -6x^2 + 5x - 4 \\
 \underline{- 6x^2 + 4x} \\
 9x - 4 \\
 \underline{- 9x + 6} \\
 -10
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3x + 2 \\
 \hline
 3x^2 - 2x + 3 \\
 \hline
 \text{خارج قسمت}
 \end{array}$$

$$\frac{9x^3}{3x} = 3x^2$$

$$\frac{-6x^2}{3x} = -2x$$

$$\frac{9x}{3x} = 3$$

باقی مانده -10

نکته: اگر تقسیمی درست انجام شده باشد باید رابطه های زیر برای آن تقسیم درست باشند:

$$\begin{cases} (1) & \text{درجهٔ مقسوم علیه} < \text{درجهٔ باقی مانده} \\ (2) & \text{مقسوم} = \text{باقی مانده} + \text{مقسوم علیه} \times \text{خارج قسمت} \end{cases}$$

تمرین ۲۶) خارج قسمت تقسیمی $-3x + 2$ ، مقسوم علیه آن $x + 1$ و باقی ماندهٔ آن -5 شده است. مقسوم را به دست آورید.

پاسخ: $\text{مقسوم} = \text{باقی مانده} + \text{مقسوم علیه} \times \text{خارج قسمت}$

$$(-3x + 2) \times (x + 1) + (-5) = -3x^2 - 3x + 2x + 2 - 5 = -3x^2 - x - 3$$

تمرین ۲۶) اگر چند جمله ای $a - x^2 - 2x^3$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد، مقدار a را به دست آورید.

پاسخ: چون مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است بنابراین باقی مانده صفر می شود.

پس کافی است تقسیم را انجام داده و باقی ماندهٔ آن را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\begin{array}{r} \cancel{2x^3} - x^2 - a \quad | \quad x - 2 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ 3x^2 - a \\ \underline{3x^2 - 6x} \\ 6x - a \\ \underline{6x - 12} \\ +12 - a \end{array}$$

خارج قسمت

باقی مانده

$$\text{باقی مانده} = 0 \Rightarrow 12 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 12}$$

تمرین ۲۷) مقدار m را طوری تعیین کنید که عبارت $m + 4 - 7x + x^2$ بر $x - 3$ بخش پذیر باشد.

پاسخ: چون مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است بنابراین باقی مانده

صفر می شود. پس کافی است تقسیم را انجام داده و باقی ماندهٔ آن را

مساوی صفر قرار دهیم.

$$\begin{array}{r} \cancel{x^2} - 7x + 4 + m \quad | \quad x - 3 \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -4x + 4 + m \\ \underline{-4x + 12} \\ -8 + m \end{array}$$

باقی مانده

$$\text{باقی مانده} = 0 \Rightarrow -8 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = +8}$$

تمرین ۲۸) مقدار a را طوری تعیین کنید که باقی مانده تقسیم

$3x^2 - 6x + a$ بر $x + 5$ برابر ۳ باشد.

پاسخ: کافی است تقسیم را انجام داده و باقی مانده آن را

مساوی ۳ قرار دهیم.

$$\begin{array}{r} \cancel{3x^2} - 6x + a \quad | \quad \cancel{x} + 5 \\ \underline{\cancel{3x^2} + 15x} \\ -21x + a \\ \underline{-21x - 105} \\ +105 + a \end{array}$$

باقی مانده $+105 + a$

$$3 = \text{باقی مانده} \Rightarrow +105 + a = 3 \Rightarrow a = +3 - 105 = -102 \Rightarrow \boxed{a = -102}$$

موسسه تخصصی زبان

فصل ۸

«حجم و مساحت»

یادآوری

قرارداد:

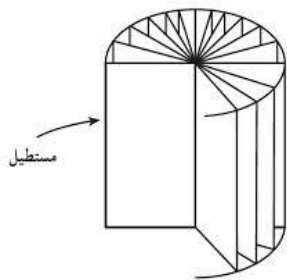
$P \Rightarrow$ محیط	$S \Rightarrow$ مساحت	$V \Rightarrow$ حجم	$R \Rightarrow$ شعاع	$h \Rightarrow$ ارتفاع
$\pi \Rightarrow$ عدد پی	$m^2 \Rightarrow$ متر مربع	$cm^2 \Rightarrow$ سانتیمتر مربع	$m^3 \Rightarrow$ متر مکعب	$cm^3 \Rightarrow$ سانتیمتر مکعب

مساحت و محیط دایره به شعاع R :

\Rightarrow مساحت دایره $S = \pi R^2$ = مساحت دایره = شعاع \times شعاع \times عدد پی

\Rightarrow محیط دایره $P = 2\pi R$ = محیط دایره = قطر \times عدد پی

حجم استوانه



حجم استوانه ای به شعاع قاعده R و ارتفاع h ، از رابطه زیر به دست می آید:

\Rightarrow ارتفاع \times مساحت قاعده = حجم استوانه $V = (R \times R \times \pi) \times h = \pi R^2 h$

حجم استوانه $V = \pi R^2 h$

نکته: از دوران مستطیل حول یکی از اضلاعش، استوانه به وجود می آید.

مثال: شعاع قاعده یک استوانه ۳ سانتی متر و ارتفاع آن ۸ سانتی متر است. حجم این استوانه را به دست آورید.

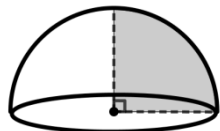
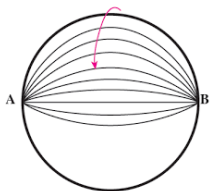
پاسخ: $V = \pi R^2 h = \pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi \text{ cm}^3$ استوانه

تعریف کره: کره به مجموعه نقاطی از فضا گفته می شود که همه آن نقطه ها از یک نقطه

ثابت به نام مرکز کره، به یک فاصله ثابت باشند. به این فاصله ثابت، شعاع کره می گوئیم.

نکته: از دوران دایره (یا نیم دایره) حول قطرش، کره به وجود می آید.

نکته: از دوران ربع دایره حول شعاعش، نیم کره به وجود می آید.



تمرین ۱) منظور از این که کره ای درون استوانه محاط شده است چیست؟

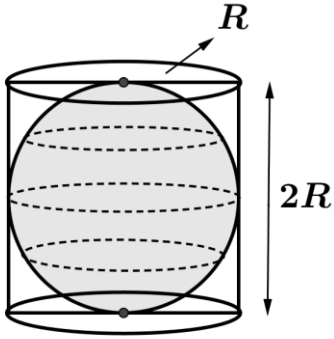
پاسخ: یعنی نقطه های بالایی، پایینی و اطراف کره بر استوانه مماس هستند.

نکته: اگر کره ای درون استوانه ای محاط شود آن گاه ارتفاع استوانه، دو برابر شعاع کره می باشد.

نکته: اگر کره ای درون استوانه ای محاط شود آن گاه حجم کره، $\frac{2}{3}$ حجم استوانه می باشد و یا حجم استوانه، $\frac{3}{2}$ حجم

کره است.

طریقه پیدا کردن دستور حجم کره



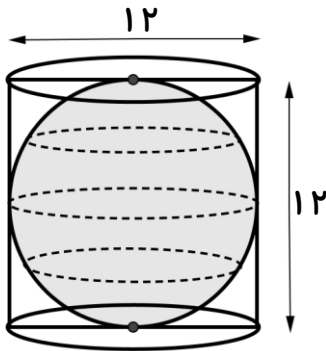
اگر مانند شکل مقابل، کره ای به شعاع R ، داخل استوانه ای به شعاع قاعده R و ارتفاع $2R$ محاط شود در این صورت می توانیم دستور حجم کره را به دست آوریم.

$$\text{حجم کره} = \frac{2}{3} \times \text{حجم استوانه} \Rightarrow V = \frac{2}{3} \times \pi R^2 h = \frac{2}{3} \pi R^2 \times (2R) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

بنابر این حجم کره ای به شعاع R برابر است با:

$$\text{حجم کره } V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

تمرین ۲) کره ای در استوانه ای به قطر قاعده و ارتفاع ۱۲ سانتی متر، محاط شده است:



الف * حجم کره را به دست آورید.

$$\text{شعاع کره } R = 12 \div 2 = 6$$

$$\text{حجم کره } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = \frac{4 \times \pi \times 6 \times 6 \times 6}{3} = 288\pi$$

پاسخ:

ب * حجم استوانه را به دست آورید.

$$\text{ارتفاع استوانه } h = 12$$

$$\text{شعاع قاعده استوانه } R = 12 \div 2 = 6$$

پاسخ:

$$\text{حجم استوانه } V = \pi R^2 h = \pi \times 6^2 \times 12 = \pi \times 36 \times 12 = 432\pi$$

پ * حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید.

$$\text{حجم فضای بین کره و استوانه} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم کره} = 432\pi - 288\pi = 144\pi$$

پاسخ:

حجم نیم کره

حجم نیم کره ای به شعاع R برابر است با:

$$\text{حجم نیم کره } V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

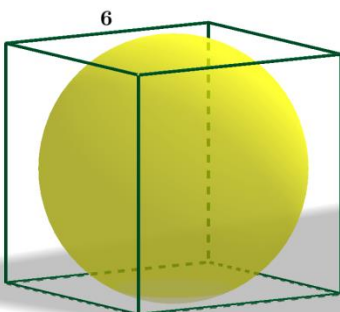
تمرین ۳) حجم نیم کره ای به قطر ۱۰ سانتی متر را به دست آورید.

$$\text{شعاع نیم کره } R = 10 \div 2 = 5$$

$$\text{حجم نیم کره } V = \frac{2}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{2 \times \pi \times 5 \times 5 \times 5}{3} = \frac{250 \cdot \pi}{3}$$

پاسخ:

تمرین ۴) کره ای در مکعبی به ضلع ۶ سانتی متر محاط شده است. حجم فضای بین کره و مکعب را به دست آورید. ($\pi \approx 3$)



$$\text{شعاع کره } R = 6 \div 2 = 3$$

پاسخ:

$$\text{حجم کره } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3 \times 3^3 = \frac{4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3} = 108$$

$$\text{حجم مکعب } V = 6 \times 6 \times 6 = 216$$

$$\text{حجم فضای بین کره و مکعب} = \text{حجم مکعب} - \text{حجم کره} = 216 - 108 = 108$$

تمرین ۵) حجم کره ای 36π است. شعاع کره را به دست آورید؟

پاسخ:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{4 \times \pi \times R^3}{3} = 36\pi \Rightarrow \frac{4 \times \pi \times R^3}{3} = \frac{36\pi}{1} \Rightarrow \frac{4R^3}{3} = \frac{36}{1} \Rightarrow 4R^3 = 3 \times 36 \Rightarrow 4R^3 = 108 \Rightarrow R^3 = \frac{108}{4} = 27 \Rightarrow R = \sqrt[3]{27} = 3 \Rightarrow \boxed{R = 3}$$

تمرین ۶) حجم کره ای 288π است. شعاع کره را به دست آورید.

پاسخ:

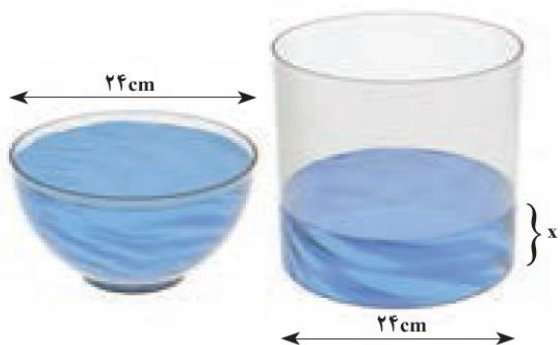
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \frac{4 \times \pi \times R^3}{3} = 288\pi \Rightarrow \frac{4 \times \pi \times R^3}{3} = \frac{288\pi}{1} \Rightarrow \frac{4R^3}{3} = \frac{288}{1} \Rightarrow 4R^3 = 3 \times 288 \Rightarrow 4R^3 = 864 \Rightarrow R^3 = \frac{864}{4} = 216 \Rightarrow R = \sqrt[3]{216} = 6 \Rightarrow \boxed{R = 6}$$

تمرین ۷) پیمانه ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۴ سانتی متر را از آب پر و آب

آن را در لیوانی استوانه ای شکل با همان قطر خالی می کنیم؛ آب در لیوان تا چه

ارتفاعی بالا می آید؟

پاسخ:



$$R_{\text{نیمکره}} = 24 \div 2 = 12$$

$$R_{\text{استوانه}} = 24 \div 2 = 12$$

$$\text{حجم آب درون نیم کره} = \text{حجم آب درون استوانه}$$

$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h$$

$$h = \frac{2}{3} \times R =$$

$$h = \frac{2}{3} \times 12 = 8 \Rightarrow \boxed{h = 8}$$

نکته: اگر شعاع کره ای را n برابر کنیم حجم آن n^3 برابر می شود.

تمرین ۷) الف) اگر شعاع کره ای را دو برابر کنیم حجم آن چند برابر می شود؟

$$2^3 = 8 \quad \text{پاسخ: ۸ برابر}$$

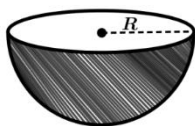
ب) اگر شعاع کره ای را ۵ برابر کنیم حجم آن چند برابر می شود؟

$$5^3 = 125 \quad \text{پاسخ: ۱۲۵ برابر}$$

مساحت کره و نیم کره

نکته: مساحت کره ای به شعاع R برابر است با:

$$S = 4\pi R^2 \quad \text{مساحت کره}$$



$$S = 2\pi R^2 \quad \text{مساحت نیم کره}$$

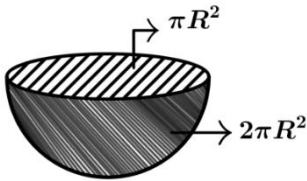
نکته: مساحت رویه نیم کره ای به شعاع R برابر است با:

تمرین ۸) مساحت یک کلاه (عرق چین) به شکل رویه نیم کره به شعاع 10 cm را به دست آورید.

پاسخ: $S = 2\pi R^2 = 2 \times \pi \times 10^2 = 2 \times \pi \times 10 \times 10 = 200\pi$ مساحت نیم کره

تمرین ۹) مساحت کره ای به شعاع $0/2$ متر را به دست آورید.

پاسخ: $S = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 0/2^2 = 4 \times \pi \times 0/2 \times 0/2 = 0/16\pi$ مساحت کره



نکته: مساحت کل نیم کره توپر از رابطه زیر به دست می آید:

$S = 3\pi R^2$ مساحت نیم کره توپر

تمرین ۱۰) می خواهیم یک نیم کره چوبی توپر به شعاع 10 cm را رنگ کنیم. مساحت کل قسمت رنگ شده را پیدا کنید.

پاسخ: $S = 3\pi R^2 = 3 \times \pi \times 10^2 = 3 \times \pi \times 10 \times 10 = 300\pi$ مساحت نیم کره توپر

تمرین ۱۱) حجم و مساحت کره ای به شعاع 3 cm را به دست آورید.

پاسخ: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \frac{4 \times \pi \times 3 \times 3 \times 3}{3} = 36\pi$ حجم کره

مساحت کره $S = 4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 3^2 = 4 \times \pi \times 3 \times 3 = 36\pi$

نتیجه: اگر شعاع کره برابر ۳ باشد در این صورت حاصل حجم و مساحت کره، عدد مشترک 36π می شود.

تمرین ۱۲) مساحت کره ای 144π است. حجم کره را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا به کمک مساحت کره، اندازه شعاع کره را به دست می آوریم سپس حجم کره را محاسبه می کنیم.

مساحت کره $S = 4\pi R^2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 144\pi \Rightarrow 4R^2 = 144 \Rightarrow R^2 = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow R = \sqrt{36} = 6$

حجم کره $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = \frac{4 \times \pi \times 6 \times 6 \times 6}{3} = 288\pi$

تمرین ۱۳) مساحت کره ای 100π است. حجم کره را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا به کمک مساحت کره، اندازه شعاع کره را به دست می آوریم سپس حجم کره را محاسبه می کنیم.

مساحت کره $S = 4\pi R^2 \Rightarrow 4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow 4R^2 = 100 \Rightarrow R^2 = \frac{100}{4} = 25 \Rightarrow R = \sqrt{25} = 5$

حجم کره $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{4 \times \pi \times 5 \times 5 \times 5}{3} = \frac{500\pi}{3}$

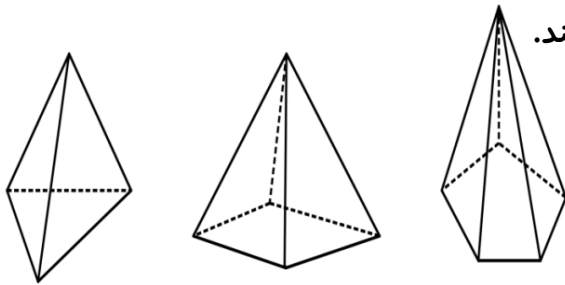
تمرین ۱۴) در کره ای به شعاع R ، نسبت حجم به سطح کل یعنی $\frac{V}{S}$ را حساب کنید.

$\frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{\frac{4}{3}R}{4} = \frac{1}{3}R$

پاسخ:

حجم هرم

هرم یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده می باشد. قاعدهٔ هرم به شکل چند ضلعی است.



وجه های جانبی هرم، به شکل **مثلث** هستند که همگی در رأس مشترکند.

به فاصلهٔ رأس هرم تا قاعده، ارتفاع هرم گفته می شود.

معمولا " برای نام گذاری هرم از رأس آن شروع می کنند.

هرم منتظم: اگر چند ضلعی قاعدهٔ هرم، یک چند ضلعی منتظم (مانند مثلث متساوی الاضلاع یا مربع) باشد و وجه های

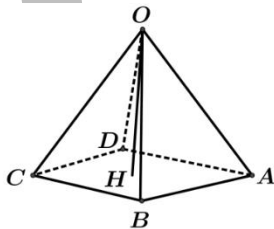
جانبی آن مثلث های همنهشت باشند، آن گاه هرم را **منتظم** می گویند.

نکته: حجم هرم از دستور زیر به دست می آید:

$$\text{حجم هرم} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3} \quad \text{یا} \quad \text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$\text{حجم هرم } V = \frac{S \times h}{3} \quad \text{یا} \quad \text{حجم هرم } V = \frac{1}{3} \times S \times h$$

نکته: اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های آنها با هم برابر است.



تمرین ۱۵) شکل مقابل یک هرم منتظم است. جاهای خالی را با توجه به شکل، کامل کنید.

نام رأس: **O** نام ارتفاع: **OH** نام هرم: **OABCD**

شکل قاعده: **مربع (چون هرم منتظم است)** شکل وجه های جانبی: **مثلث**

تعداد وجه های جانبی: **۴** تعداد وجه ها: **۵**

تمرین ۱۶) قاعدهٔ هرمی به شکل مربع و به ضلع ۶ سانتی متر است. اگر ارتفاع این هرم ۵ سانتی متر باشد، حجم آن را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا مساحت قاعدهٔ هرم (مربع) را به دست می آوریم:

$$\text{سانتی متر مربع} \quad S = 6 \times 6 = 36 \quad \text{مربع} \Rightarrow \text{خودش} \times \text{اندازهٔ یک ضلع} = \text{مساحت مربع}$$

$$\text{حجم هرم} \quad V = \frac{S \times h}{3} = \frac{36 \times 5}{3} = 60 \quad \text{سانتی متر مکعب}$$

تمرین ۱۷) قاعدهٔ هرمی به شکل مستطیل و به ابعاد ۳ و ۴ متر است. اگر ارتفاع این هرم ۷ متر باشد، حجم آن را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا مساحت قاعدهٔ هرم (مستطیل) را به دست می آوریم:

$$\text{متر مربع} \quad S = 4 \times 3 = 12 \quad \text{مستطیل} \Rightarrow \text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت مستطیل}$$

$$\text{حجم هرم} \quad V = \frac{S \times h}{3} = \frac{12 \times 7}{3} = 28 \quad \text{متر مکعب}$$

تمرین ۱۸) قاعدهٔ هرمی به شکل لوزی و به قطرهای ۶ و ۸ سانتی متر است. اگر ارتفاع این هرم ۱۰ سانتی متر باشد، حجم آن را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا مساحت قاعدهٔ هرم (لوزی) را به دست می آوریم:

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{(\text{قطر کوچک} \times \text{قطر بزرگ})}{2} \Rightarrow S = \frac{(8 \times 6)}{2} = 24 \text{ سانتی متر مربع}$$

$$\text{حجم هرم} \quad V = \frac{S \times h}{3} = \frac{24 \times 10}{3} = 80 \text{ سانتی متر مکعب}$$

تمرین ۱۹) قاعدهٔ هرمی به شکل مثلث قائم الزاویه و به اضلاع قائم ۶ و ۱۰ سانتی متر است. اگر ارتفاع این هرم ۵ سانتی متر باشد، حجم آن را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا مساحت قاعدهٔ هرم (مثلث) را به دست می آوریم:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{(\text{ارتفاع} \times \text{قاعده})}{2} \Rightarrow S = \frac{(10 \times 6)}{2} = 30 \text{ سانتی متر مربع}$$

$$\text{حجم هرم} \quad V = \frac{S \times h}{3} = \frac{30 \times 5}{3} = 50 \text{ سانتی متر مکعب}$$

تمرین ۲۰) قاعدهٔ هرمی به شکل مستطیل و به ابعاد ۱۲ و ۱۵ سانتی متر است. اگر حجم هرم ۵۴۰ سانتی متر مکعب باشد، اندازهٔ ارتفاع هرم را به دست آورید.

پاسخ: $S = 15 \times 12 = 180$ مساحت قاعده (مستطیل)

$$\text{حجم هرم} \quad V = \frac{S \times h}{3} \Rightarrow \frac{180 \times h}{3} = 540 \Rightarrow 60 \cdot h = 540 \Rightarrow h = \frac{540}{60} = 9 \Rightarrow \boxed{h = 9}$$

تمرین ۲۱) قاعدهٔ هرمی به شکل مربع است. اگر حجم هرم ۱۳۵ سانتی متر مکعب و ارتفاع آن ۵ سانتی متر باشد، محیط قاعدهٔ هرم را به دست آورید.

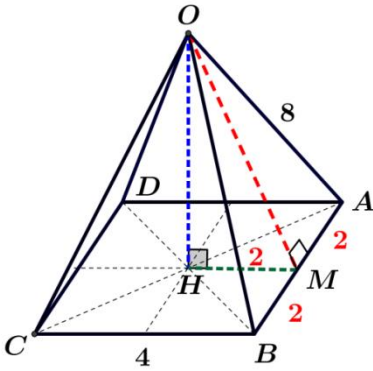
پاسخ: ابتدا باید به کمک حجم هرم، مساحت مربع را به دست آورده و سپس با استفاده از مساحت مربع، اندازهٔ ضلع مربع را حساب کنیم:

$$\text{حجم هرم} \quad V = \frac{S \times h}{3} \Rightarrow \frac{S \times 5}{3} = 135 \Rightarrow \frac{S \times 5}{3} \times \frac{135}{1} \xrightarrow{\text{طرفین و وسطین}} 5S = 405 \Rightarrow S = \frac{405}{5} = 81$$

$$\text{اندازهٔ ضلع مربع} = \sqrt{81} = 9$$

$$\text{محیط مربع} \quad P = 4 \times \text{اندازهٔ ضلع} \Rightarrow P = 4 \times 9 = 36 \text{ سانتی متر}$$

تمرین ۲۲) حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴cm و وجه های جانبی آن مثلث های متساوی الساقینی به ساق های ۸cm باشد.



پاسخ: برای محاسبه حجم هرم باید اندازه ارتفاع هرم یعنی OH را به دست آوریم. بنابراین قبل از اینکه ارتفاع هرم را محاسبه کنیم باید اندازه ارتفاع وجه جانبی هرم یعنی OM را به کمک رابطه فیثاغورس به دست آوریم:

در مثلث OAM :

$$8^2 = 2^2 + OM^2 \Rightarrow 64 = 4 + OM^2 \Rightarrow OM^2 = 64 - 4 = 60 \Rightarrow OM = \sqrt{60}$$

در مثلث OHM :

$$OM^2 = HM^2 + OH^2 \Rightarrow \sqrt{60}^2 = 2^2 + OH^2 \Rightarrow 60 = 4 + OH^2 \Rightarrow OH^2 = 60 - 4 = 56$$

$$OH = \sqrt{56}$$

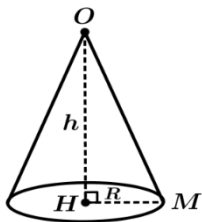
ارتفاع هرم

اکنون حجم هرم را محاسبه می کنیم:

$$S = 4 \times 4 = 16 \text{ مربع} \Rightarrow \text{حجم هرم } V = \frac{S \times h}{3} = \frac{16 \times \sqrt{56}}{3} \text{ سانتی متر مکعب}$$

حجم مخروط

مخروط، شکلی فضایی مانند هرم منتظم است با این تفاوت که قاعده آن به جای چند ضلعی، دایره است. مرکز این دایره، پای ارتفاع مخروط است.



مرکز قاعده: H

شکل قاعده: دایره

نام ارتفاع: OH

نام رأس: O

مولد: OM

شعاع قاعده: R

پای ارتفاع: H

تمرین ۲۳) شکل مقابل یک مخروط است. جاهای خالی را با توجه به شکل، کامل کنید.

نکته: حجم مخروط از دستور زیر به دست می آید:

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \quad \text{یا} \quad \text{حجم مخروط} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده}}{3}$$

$$\text{حجم مخروط } V = \frac{1}{3} \times S_{\text{دایره}} \times h = \frac{1}{3} \times (\pi R^2) \times h$$

$$\text{حجم مخروط } V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

تمرین ۲۳) حجم مخروطی را حساب کنید که شعاع قاعده اش ۵ و ارتفاعش ۶ سانتی متر باشد.

$$\text{حجم مخروط } V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 6}{3} = \frac{\pi \times 5 \times 5 \times 6}{3} = 50\pi \text{ سانتی متر مکعب}$$

پاسخ:

تمرین ۲۴) حجم مخروطی را حساب کنید که قطر قاعده آن ۸ و ارتفاعش ۹ سانتی متر باشد.

پاسخ:

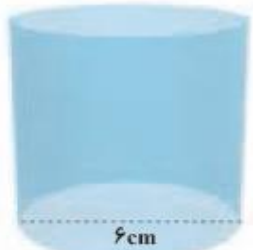
$$R = 8 \div 2 = 4$$
 شعاع قاعده مخروط

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \times 4^2 \times 9}{3} = \frac{\pi \times 4 \times 4 \times 9}{3} = 48\pi$$
 سانتی متر مکعب

تمرین ۲۵) حجم مخروطی ۳۱۴ متر مکعب و ارتفاع آن ۱۲ متر است. شعاع قاعده مخروط را به دست آورید. ($\pi \approx 3/14$)

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} \Rightarrow 314 = \frac{3/14 \times R^2 \times 12}{3} \Rightarrow 314 = 3/14 \times 4 \times R^2 \Rightarrow 314 = 12/56 \times R^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{314}{12/56} = 25 \Rightarrow R = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \boxed{R = 5}$$



تمرین ۲۶) ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴ cm و به ارتفاع ۱۲ cm را از آب پر می کنیم و در لیوانی استوانه ای شکل که شعاع قاعده آن ۶ cm است خالی می کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می آید؟

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \times 4^2 \times 12}{3} = \frac{\pi \times 4 \times 4 \times 12}{3} = 64\pi$$

پاسخ:

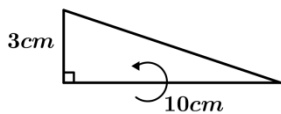
$$V = \pi R^2 h = \pi \times 6^2 \times h = 36\pi h$$

$$\Rightarrow 36\pi h = 64\pi \Rightarrow h = \frac{64}{36} \approx 1.78$$

ارتفاع آب درون استوانه (لیوان)

تمرین ۲۷) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمش چه شکلی پدید می آید؟

پاسخ: مخروط



تمرین ۲۸) مثلث قائم الزاویه مقابل را حول ضلع ۱۰ سانتی متری دوران داده ایم؛

الف) شکل حاصل چه نام دارد؟ مخروط

ب) ارتفاع شکل حاصل کدام است؟ ضلع ۱۰ سانتی متری

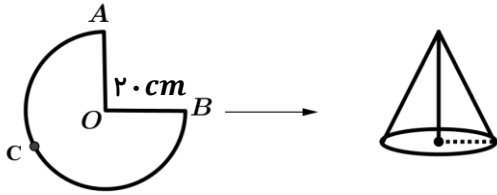
پ) شعاع قاعده شکل حاصل کدام است؟ ضلع ۳ سانتی متری

ت) حجم شکل حاصل را به دست آورید؟

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \times 3^2 \times 10}{3} = \frac{\pi \times 3 \times 3 \times 10}{3} = 30\pi$$

توجه: مثلث قائم الزاویه را حول هر ضلعی که دوران دهیم آن ضلع، ارتفاع مخروط می شود.

تمرین ۲۹) الف* با $\frac{3}{4}$ دایره ای به شعاع ۲۰ سانتی متر را برداشته ایم و با کمک آن یک سطح مخروطی شکل ساخته ایم؛



الف* طول کمان ACB چند سانتی متر است؟

پاسخ: طول کمان ACB، $\frac{3}{4}$ محیط دایره است پس:

$$\Rightarrow \text{طول کمان ACB} = \frac{3}{4} \times 40 \cdot \pi = \frac{3}{4} \times \frac{40 \cdot \pi}{1} = 30 \cdot \pi$$

محیط دایره = قطر $\times \pi = 40 \cdot \pi$

ب* چه رابطه ای بین طول کمان ACB و محیط دایره قاعده مخروط وجود دارد؟

پاسخ: طول کمان ACB با محیط دایره قاعده مخروط برابر است.

پ* شعاع قاعده مخروط را پیدا کنید.

پاسخ: \Rightarrow قطر = ۳۰ \Rightarrow قطر $\times \pi = 30 \cdot \pi \Rightarrow$ محیط دایره قاعده مخروط = $30 \cdot \pi$

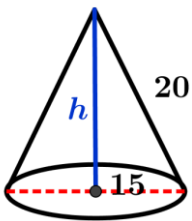
شعاع قاعده مخروط $R = 30 \div 2 = 15$

ت* حجم مخروط را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس، ارتفاع مخروط را به دست می آوریم:

$$20^2 = 15^2 + h^2 \Rightarrow 400 = 225 + h^2 \Rightarrow h^2 = 400 - 225 = 175$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{175}$$



$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \times 15^2 \times \sqrt{175}}{3} = \frac{\pi \times 15 \times 5 \times \sqrt{175}}{3} = 75 \sqrt{175} \pi$$

نکته: اگر با قسمتی از یک دایره بخواهیم مخروطی به شعاع قاعده R بسازیم آن گاه اندازه شعاع قاعده مخروط از

رابطه زیر به دست می آید:

$$\text{شعاع کمان} \times \text{کسر دایره} = R = \text{شعاع قاعده مخروط}$$

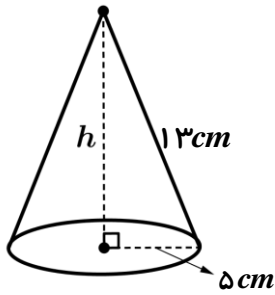
تمرین ۳۰) الف* با $\frac{3}{4}$ دایره ای به شعاع ۲۰ سانتی متر، مخروطی ساخته ایم. شعاع قاعده این مخروط چند سانتی متر است؟

پاسخ: $R = 15$ $\Rightarrow R = \frac{3}{4} \times 20 = \frac{3}{4} \times \frac{40}{1} = 15$ \Rightarrow شعاع قاعده مخروط = شعاع کمان \times کسر دایره $R = 15$

ب* با نیم دایره ای به شعاع ۱۰ سانتی متر، مخروطی ساخته ایم. شعاع قاعده این مخروط چند سانتی متر است؟

پاسخ: $R = 5$ $\Rightarrow R = \frac{1}{2} \times 10 = \frac{1}{2} \times \frac{10}{1} = 5$ \Rightarrow شعاع قاعده مخروط = شعاع کمان \times کسر دایره $R = 5$

تمرین (۳۱) حجم مخروط مقابل را به دست آورید.



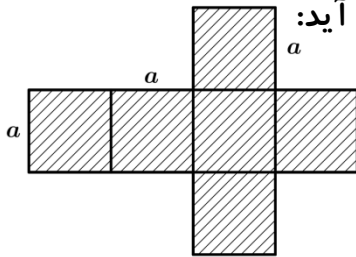
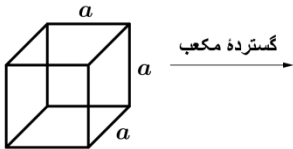
پاسخ: ابتدا با کمک رابطه فیثاغورس، ارتفاع مخروط را به دست می آوریم:

$$13^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow 169 = 25 + h^2 \Rightarrow h^2 = 169 - 25 = 144$$

$$h = \sqrt{144} = 12 \Rightarrow \boxed{h = 12} \quad \text{ارتفاع مخروط}$$

$$\text{حجم مخروط } V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 12}{3} = \frac{\pi \times 5 \times 5 \times 4}{1} = 100\pi$$

نکته: مساحت کل مکعبی به ضلع a از رابطه زیر به دست می آید:



$$S = 6a^2 \quad \text{مساحت کل مکعب}$$

تمرین (۳۲) در مکعبی به ضلع a ، نسبت حجم به سطح کل یعنی $\frac{V}{S}$ را حساب کنید.

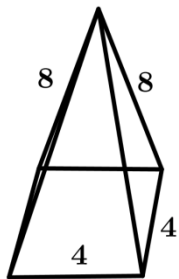
$$\frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

پاسخ:

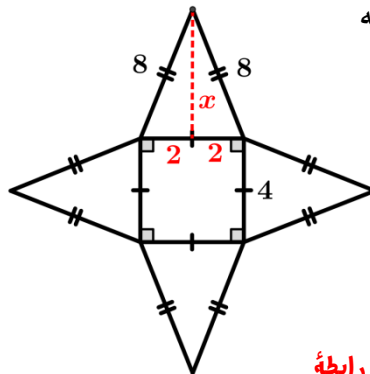
نکته: مساحت کل مکعب مستطیلی که طول آن a ، عرض آن b و ارتفاعش c باشد از رابطه زیر به دست می آید:

$$S = 2 \times (ab + ac + bc) \quad \text{مساحت کل مکعب مستطیل}$$

تمرین (۳۳) مساحت گسترده هرم زیر را با توجه به اندازه های روی آن بنویسید.



شکل گسترده



پاسخ: باید مساحت مربع و چهار مثلث را حساب کرده و با هم جمع کنیم تا مساحت کل شکل به دست آید.

برای محاسبه مساحت مثلث ها ابتدا با کمک رابطه

فیثاغورس، ارتفاع مثلث را به دست می آوریم:

$$8^2 = 2^2 + x^2 \Rightarrow 64 = 4 + x^2 \Rightarrow x^2 = 64 - 4 = 60 \Rightarrow x = \sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = 2\sqrt{15}$$

$$\boxed{x = 2\sqrt{15}} \Rightarrow \text{مساحت هر مثلث } S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{15}}{2} = 4\sqrt{15}$$

$$\text{مساحت جانبی هرم} = 4 \times \text{مساحت هر مثلث} = 4 \times 4\sqrt{15} = 16\sqrt{15}$$

$$\text{مساحت کل هرم } S = 16\sqrt{15} + 16 = \text{مساحت قاعده (مربع)} + \text{مساحت جانبی}$$

تمرین ۳۴) هرم منتظم زیر از چهار مثلث متساوی الاضلاع هم اندازه تشکیل شده است.

به این هرم، چهار وجهی منتظم نیز می گویند.

مساحت کل این هرم را به دست آورید.

پاسخ: مساحت یک مثلث را حساب کرده و در چهار

ضرب می کنیم.

برای محاسبه مساحت مثلث ها ابتدا با کمک رابطه

فیثاغورس، ارتفاع مثلث ها را به دست می آوریم:

$$a^2 = x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{1} - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

ارتفاع هر مثلث

$$a \text{ ضلع } \quad S = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$a \text{ ضلع } \quad S = 4 \times \text{مساحت مثلث} = 4 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

نکته: مساحت کل هرم چهار وجهی منتظم به ضلع a برابر است با:

$$S = a^2\sqrt{3} \quad \text{مساحت هرم چهاروجهی منتظم}$$

نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاعی که اندازه ضلع

آن a باشد برابر است با:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع}$$

تمرین ۳۵) مساحت کل یک چهار وجهی منتظم به ضلع ۵ سانتی متر را به دست آورید.

$$S = a^2\sqrt{3} = 5^2 \times \sqrt{3} = 25\sqrt{3}$$

پاسخ:

نکته: مساحت جانبی و مساحت کل استوانه ای به شعاع قاعده R و ارتفاع h ، از رابطه های زیر به دست می آید:

$$S = 2\pi R \times h = \text{ارتفاع} \times \text{محیط دایره} \quad \text{مساحت جانبی استوانه}$$

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R h = \text{دو دایره} + \text{مساحت جانبی} \quad \text{مساحت کل استوانه}$$

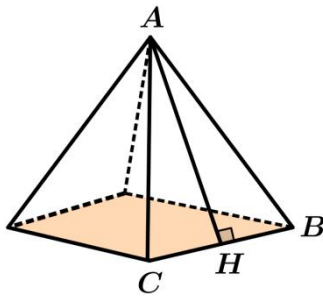
تمرین ۳۶ در استوانه ای به شعاع قاعده a و ارتفاع a ، نسبت حجم به سطح کل یعنی $\frac{V}{S}$ را حساب کنید.

پاسخ: $S = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi a^2 + 2\pi a \times a = 4\pi a^2$ مساحت کل استوانه

حجم استوانه $V = \pi R^2 h = \pi a^2 \times a = \pi a^3$

$$\frac{V}{S} = \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$$

تمرین ۳۷ شکل زیر، یک هرم منتظم می باشد. اگر $\overline{AH} = 5 \text{ cm}$ و $\overline{BC} = 6 \text{ cm}$ باشد، مساحت جانبی این هرم را به دست آورید.



پاسخ:

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$$

\Rightarrow مساحت جانبی هرم = $4 \times 15 = 60$ مساحت هر مثلث $\times 4 =$ مساحت جانبی هرم

تمرین ۳۸ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف* از دوران دایره (یا نیم دایره) حول قطرش **کره** به وجود می آید.

ب* از دوران ربع دایره حول شعاعش **نیم کره** به وجود می آید.

پ* از دوران مستطیل حول طول یا عرضش **استوانه** به وجود می آید.

ت* از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمش **منحروط** به وجود می آید.