

درس ۴: تابع درجه دوم



اگر تابع درجه ۲ نبود هیچ پلی ساخته نمی شد.

معادله تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت


$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

است که در آن ضریب x^2 (یعنی a) مخالف صفر است. $a \neq 0$.

~~تابع درجه اول~~ $\Rightarrow f(x) = bx + c \Rightarrow f(x) = 0x^2 + bx + c$ اگر $a = 0$

مؤدار این تابع به یکی از دو صورت یا  یا  است که به آن سهمی می گویند.

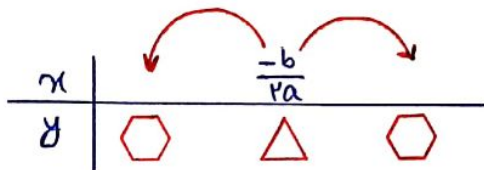
نقطه ای به طول $x_0 = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است.

- اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، قیافه سهمی بصورت  خواهد بود. یعنی دهانه سهمی رو به بالاست و در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار (مینیمم) است.

- اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، قیافه سهمی بصورت  خواهد بود. یعنی دهانه سهمی رو به پایین است و در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار (ماکسیمم) است.

▲ رسم تابع درجه دوم: [روش ۳ نقطه]

ابتدا مقدار $x_0 = -\frac{b}{2a}$ را یافته و درون تابع قرار می دهیم تا نقطه (x_0, y_0) به دست آید (یعنی همان رأس سهمی). حال دو نقطه کلهی در طرفین x_0 در نظر گرفته و با جایگذاری در تابع مقدار y آنرا می یابیم. سپس این ۳ نقطه را در دستگاه مختصات بصورت منظم به یکدیگر وصل می کنیم.



مثال ۱ نمودار سهمی $y = f(x) = x^2 + 4x - 2$ را رسم کنید.

در این سهمی $a = 1 > 0$ پس دهانه سهمی رو به بالا و \min دارد.

$a = 1$ $b = 4$ $c = -2$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(1)} = -\frac{4}{2} = -2$$

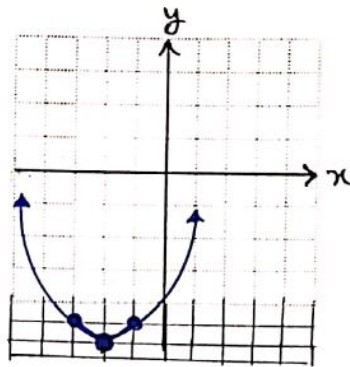
$\xrightarrow{\text{بگذاریم } x_0 = -2}$ $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 2 = 4 - 8 - 2 = -4$

\Rightarrow نقطه $(-2, -4)$ است.

x	-3	-2	-1
y	-5	-4	-5

$f(-3) = (-3)^2 + 4(-3) - 2 = -5$

$f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) - 2 = -5$



مثال ۲ سهمی به معادله $y = x^2 - 2x$ مفروضه ۱.

- رأس سهمی را بیابید. - مقدار مینیمم را بیابید. - نمودار سهمی را رسم کنید.

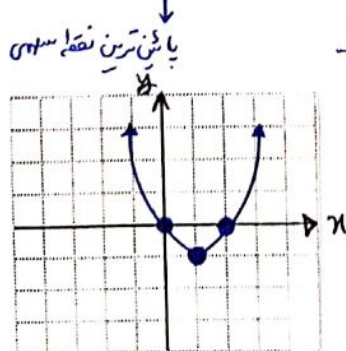
$a = 1$ $b = -2$ $c = 0$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(1)} = +\frac{2}{2} = 1$$

$\xrightarrow{\text{بگذاریم } x_0 = 1}$ $y = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$ \Rightarrow رأس $(1, -1)$

چون $a = 1 > 0$ پس دهانه سهمی رو به بالا و نقطه $(1, -1)$ نقطه مینیمم است و

مقدار مینیمم $= -1$



x	0	1	2
y	0	-1	0
	\downarrow		\downarrow
	$(0)^2 - 2(0)$		$(2)^2 - 2(2)$

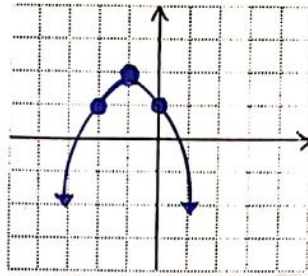
مثال • نمودار سهم $y = -x^2 - 2x + 1$ را رسم کنید.

$a = -1$ $b = -2$ $c = 1$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(-1)} = -1$ $\xrightarrow{\text{مقادیر}}$ $y = -(-1)^2 - 2(-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$

نقطه $(-1, 2)$

x	-2	-1	0
y	1	2	1
	\downarrow		\downarrow
	$-(-2)^2 - 2(-2) + 1$		$-(-0)^2 - 2(0) + 1$



مثال • در تابع $y = x^2 + x + 1$ مینیم (کمترین مقدار) تابع چه دردی است؟

$a = 1$ $b = 1$ $c = 1$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(1)} = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow y = (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - 2 + 4}{4} = \frac{3}{4}$

$\min = \frac{3}{4}$

مثال • مقدار ماکسیم را در تابع $y = 4 - x^2$ بیابید.

ابتدا شکل استاندارد تابع درجه دوم یعنی $y = ax^2 + bx + c$ را بنویسیم

$y = -x^2 + 4$

$a = -1$ $b = 0$ $c = 4$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(-1)} = \frac{0}{2} = 0$ $\rightarrow y = 4 - (0)^2 = 4 \Rightarrow \max = 4$

تذکره • در مسائل اقتصادی قرار تابع در آمد و سود ماکسیم شوند و تابع هزینه مینیمم. این توابع در اینجا از درجه ۲ خواهند بود که با

مطابق x_0 و y_0 در تابع در تابع مقدار \max یا \min خواهد شد به دست می آید.

مثال در یک تولیدکننده آئر تاج درآمدها به صورت $y = -18x^2 + 14x$ و تابع هزینه $y = 50x - 40$ باشد

ماکسیم مقدار سود را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{سود} &= \text{درآمد} - \text{هزینه} \Rightarrow P(x) = (-18x^2 + 14x) - (50x - 40) \\ &= -18x^2 + 14x - 50x + 40 \\ &= -18x^2 - 36x + 40 \quad a = -18 \quad b = -36 \quad c = 40 \end{aligned}$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-36}{2(-18)} = \frac{36}{-36} = -1$$

$$\text{پاسخ} \Rightarrow P(-1) = -18(-1)^2 - 36(-1) + 40 = -18 + 36 + 40 = 58$$

مثال یک کالا به قیمت ۳۰۰ تومان به فروش میرسد. آئر تاج هزینه آن به صورت $y = x^2 + 50x + 200$ باشد و چند کالا تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد.

$$\text{درآمد} = \text{تعداد} \times \text{قیمت} = 300x$$

$$\begin{aligned} \text{سود} &= \text{درآمد} - \text{هزینه} = 300x - (x^2 + 50x + 200) = 300x - x^2 - 50x - 200 \\ &= -x^2 + 250x - 200 \end{aligned}$$

$$a = -1 \quad b = 250 \quad c = -200$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{250}{2(-1)} = \frac{250}{2} = 125$$

باید ۱۲۵ کالا تولید کند تا بیشترین سود را حاصل کند.

مثال نمودار $y = 2x^2 - 8x + 1$ را رسم کنید.
 باغبان کمین

مثال آئر تاج درآمدها $R(x)$ و تابع هزینه $C(x)$ به صورت زیر باشند. ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.

$$y = R(x) = -x^2 + 30x$$

$$y = C(x) = 18x + 45$$

باغبان کمین

