

به نام خدا

ریاضی
دهم

هنرستان
شهید کلانتری
کرمانشاه

پودمان سوم
درس اول

مفهوم معادله
درجه دوم

درجه معادله

بعد از ساده کردن، بیشترین توان مجهول (متغیر) را در یک معادله، **درجه معادله** گویند.

مثال ۱

کدام یک از معادله‌های زیر، معادله درجه دوم هستند؟

$$\text{الف) } (3x - 1)(x + 2) = 6$$

$$3x^2 + 6x - x - 2 - 6 = 0$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

درجه دوم

$$\text{ب) } (2x + 1)(x - 1) = 2x^2 + 3$$

$$\cancel{2x^2} - 2x + x - 1 = \cancel{2x^2} + 3$$

$$-x - 4 = 0$$

درجه اول

مثال : در معادله درجه اول زیر عددی حدس بزنید اگر به جای مجهول معادله قرار دهیم تساوی برقرار باشد .

$$2x - 8 = 0$$

$$x = 4$$

یک جواب دارد

$$2(4) - 8 = 8 - 8 = 0$$

مثال : در معادله های درجه دوم زیر عدد یا عدد هایی حدس بزنید اگر به جای مجهول معادله قرار دهیم تساوی برقرار باشد .

$$x^2 - 9 = 0$$

دو جواب دارد

$$\begin{aligned} (3)^2 - 9 &= 9 - 9 = 0 \\ (-3)^2 - 9 &= 9 - 9 = 0 \end{aligned}$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

یک جواب دارد

$$\begin{aligned} (2 - 2)^2 &= 0 \\ (0)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + 1 = 0$$

جواب ندارد

مقدارهایی برای x که به ازای آنها تساوی برقرار می شود، جواب های معادله نامیده می شوند.

حل معادله درجه دوم

یک معادله درجه دوم را به روش های مختلفی می توان حل کرد.

در این درس حل معادله درجه دوم را به روش هندسی شرح می دهیم.

ابتدا رابطه خطی و معادله خط را یاد آوری می کنیم .

نمودار $y = x^2$ را با استفاده از چند نقطه رسم می کنیم خواهیم دید که یک نمودار غیر خطی است.

مثال: با به دست آوردن چند نقطه از خط $y = 2x + 3$ نمودار آن را رسم کنید.

x	-1	0	1	2	3
y	1	3	5	7	9

\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow
 $+2$ $+2$ $+2$ $+2$

$$y = 2 \times 0 + 3 = 3$$

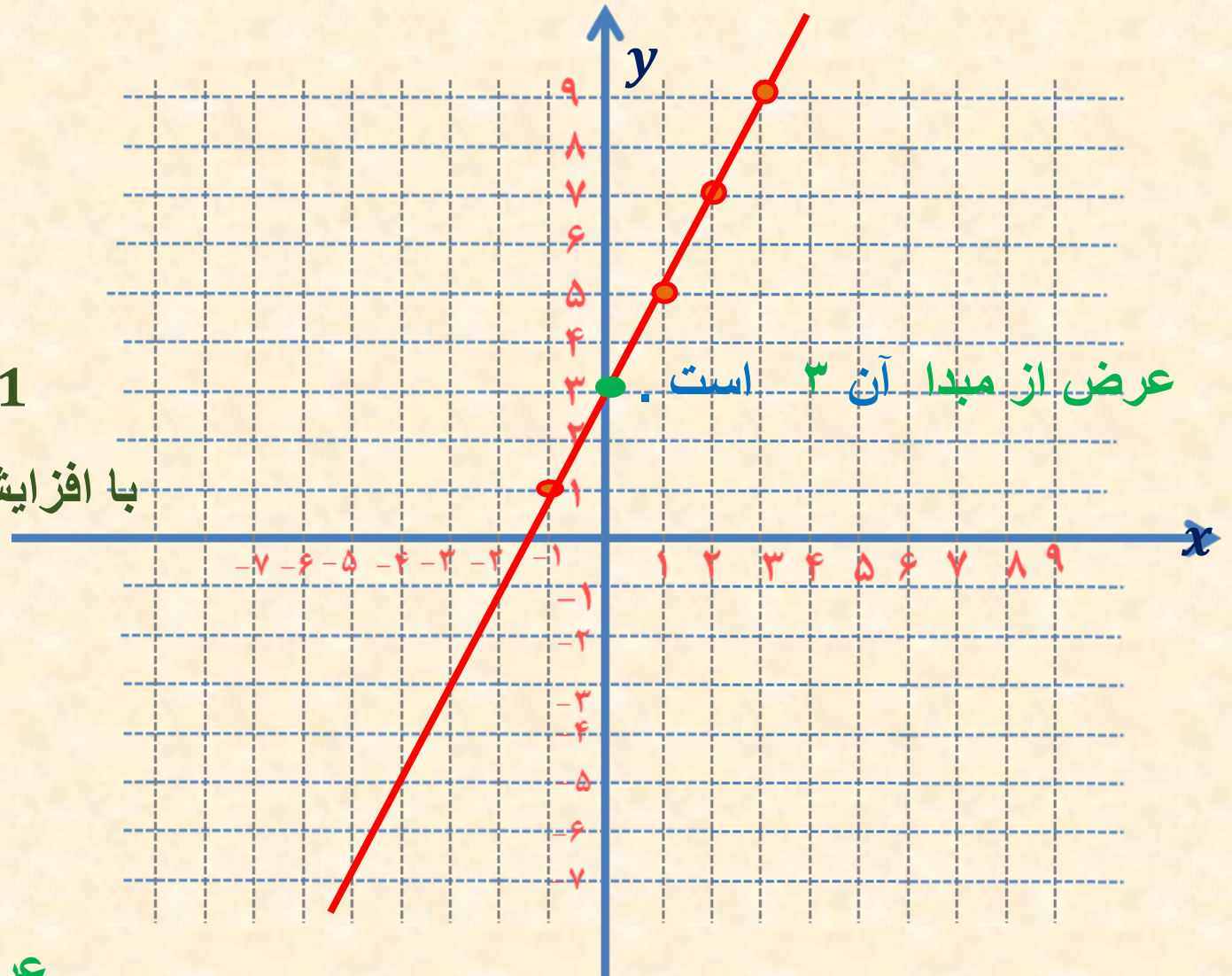
$$y = 2 \times (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

با افزایش هر واحد x مقدار y ، دو واحد افزایش می یابد.

نمودار خطی با شیب $+2$ است .

$$y = 2x + 3$$

عرض از مبدا.



مثال: با به دست آوردن چند نقطه از خط $y = -2x + 1$ نمودار آن را رسم کنید.

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۳	۱	-۱	-۳	-۵

$$y = -2 \times (0) + 1 = 1$$

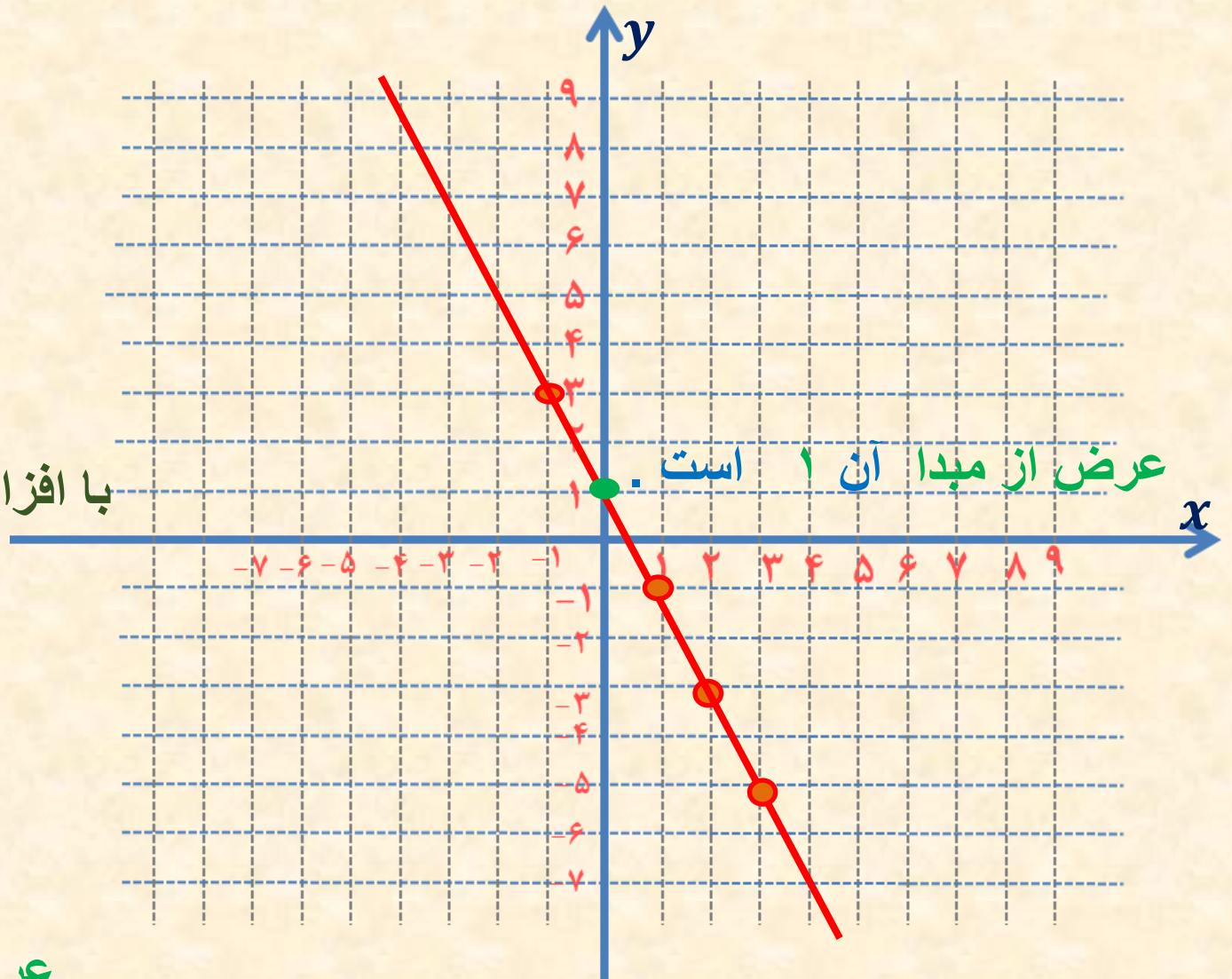
$$y = -2 \times (1) + 1 = -1$$

با افزایش هر واحد x مقدار y ، دو واحد کاهش می یابد.

نمودار خطی با شیب -2 است.

$$y = -2x + 1$$

عرض از مبدا.

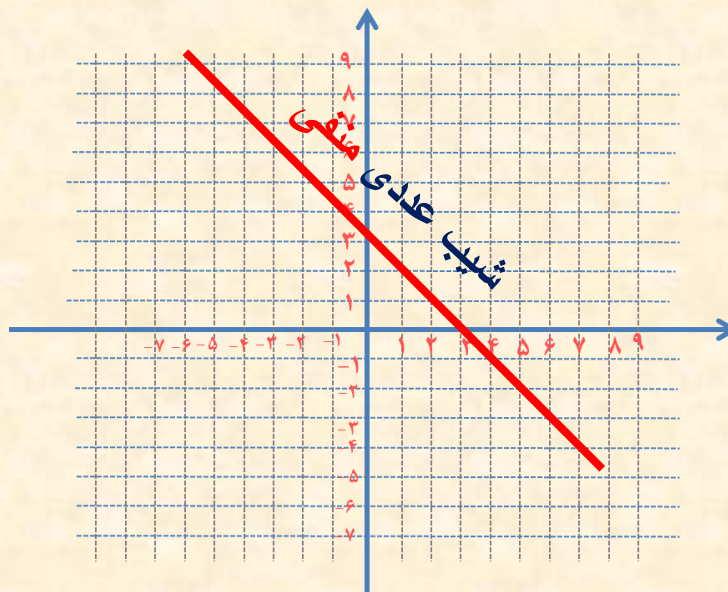
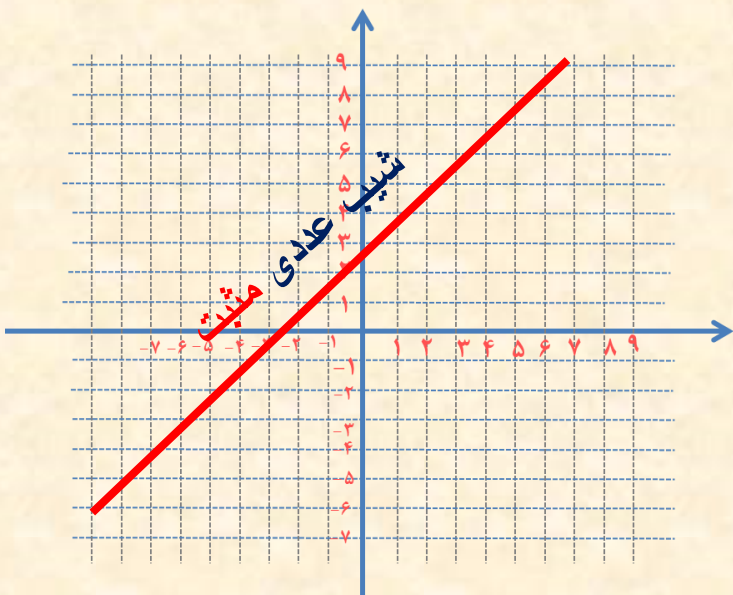


نمودار رابطه درجه اول

در حالت کلی نمودار رابطه با معادله $y = ax + b$ خطی است با:

شیب

عرض از مبدا



مثال : با به دست آوردن چند نقطه از رابطه $y = x^2$ نمودار آن را رسم کنید.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$$y = x^2$$

$$y = 0^2 = 0$$

$$y = 1^2 = 1$$

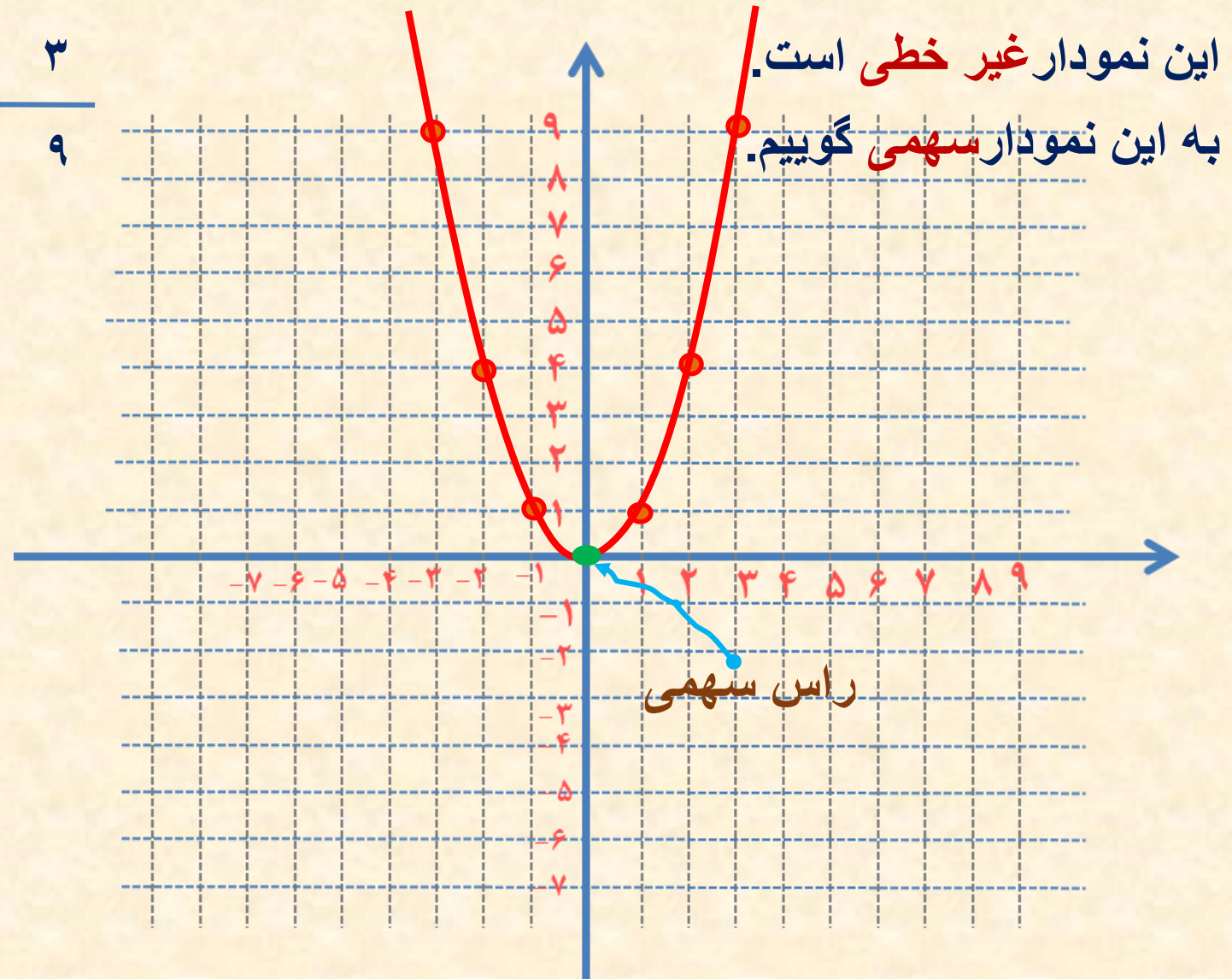
$$y = (-1)^2 = 1$$

$$y = 2^2 = 4$$

$$y = (-2)^2 = 4$$

$$y = 3^2 = 9$$

$$y = (-3)^2 = 9$$



مثال ۳، معادله درجه دوم $x^2 - x - 2 = 0$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^2 = x + 2$ می نویسیم و نمودارهای معادله های $y_1 = x^2$ و $y_2 = x + 2$ را رسم می کنیم.

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$y = x^2$	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹

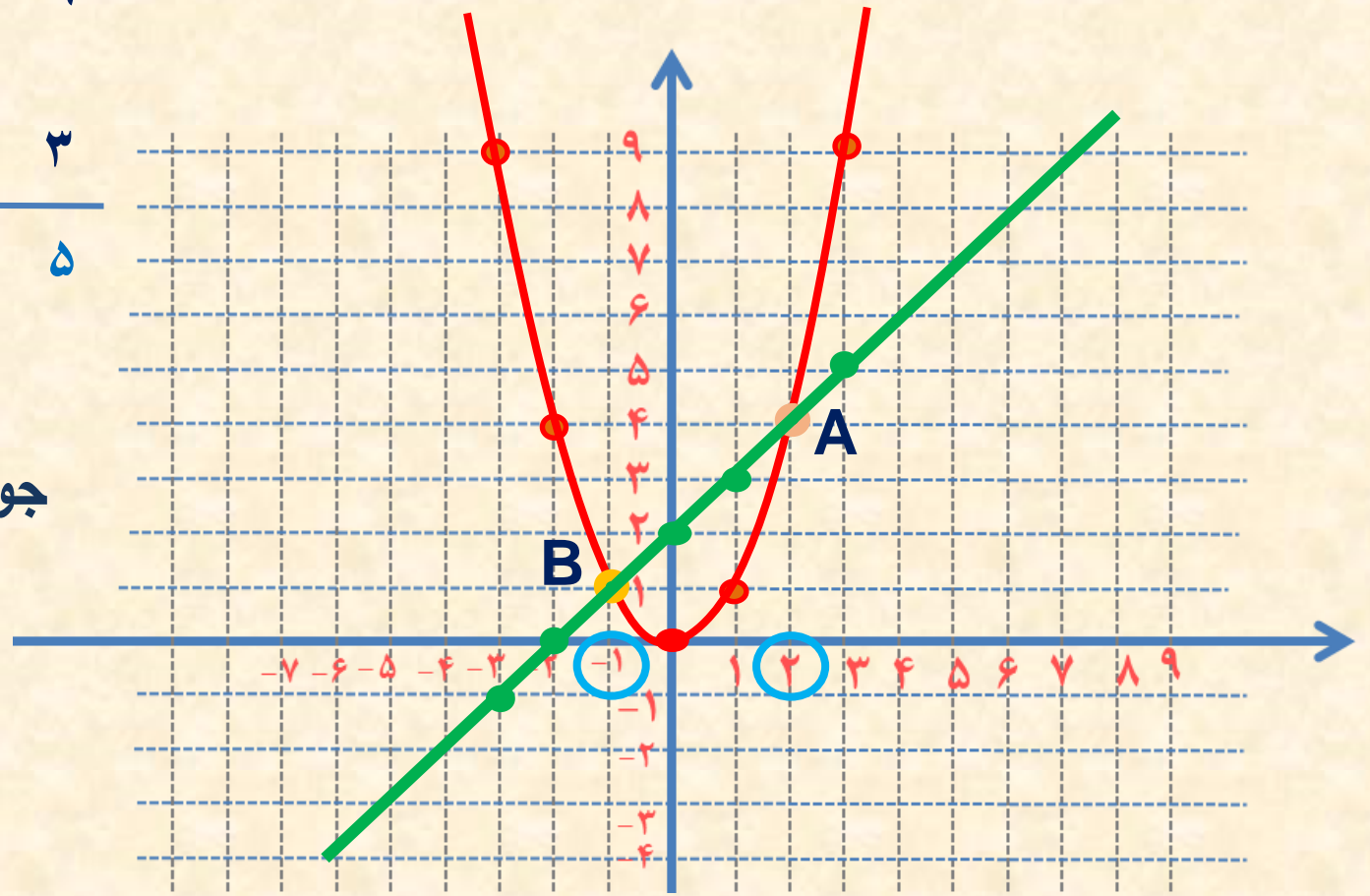
x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$y = x + 2$	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵

جواب ها را در معادله امتحان می کنیم.

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$(2)^2 - (2) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$$



مثال ۴ - معادله درجه دوم $3x^2 - x + 6 = 0$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^2 = \frac{1}{3}x - 2$ می نویسیم. نمودارهای معادله های $y_1 = x^2$ و $y_2 = \frac{1}{3}x - 2$ را رسم می کنیم.

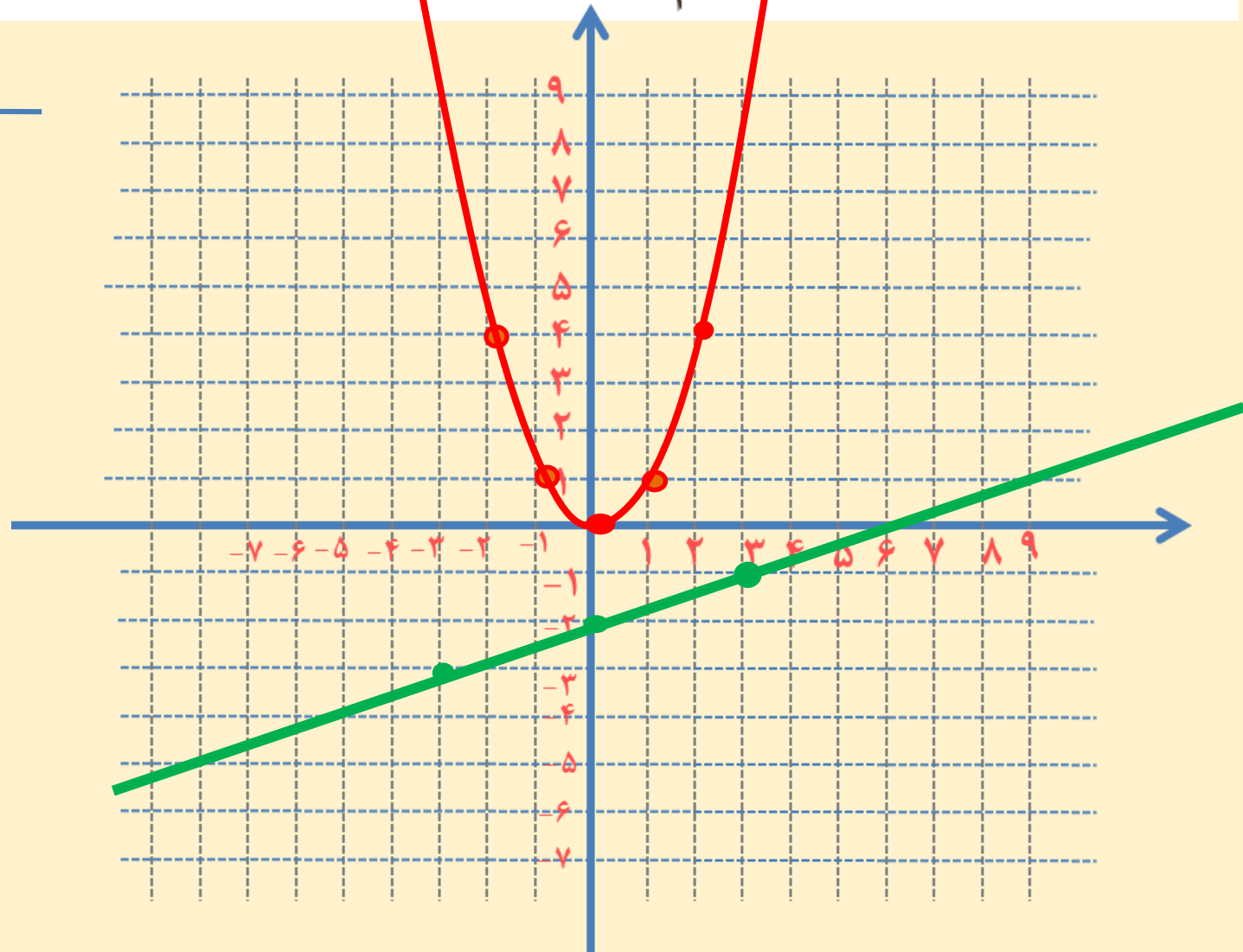
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = x^2$	۴	۱	۰	۱	۴

x	-۳	۰	۳
$y = \frac{1}{3}x - 2$	-۳	-۲	-۱

$$y = \frac{1}{3} \times 0 - 2 = -2$$

$$y = \frac{1}{3} \times 3 - 2 = -1$$

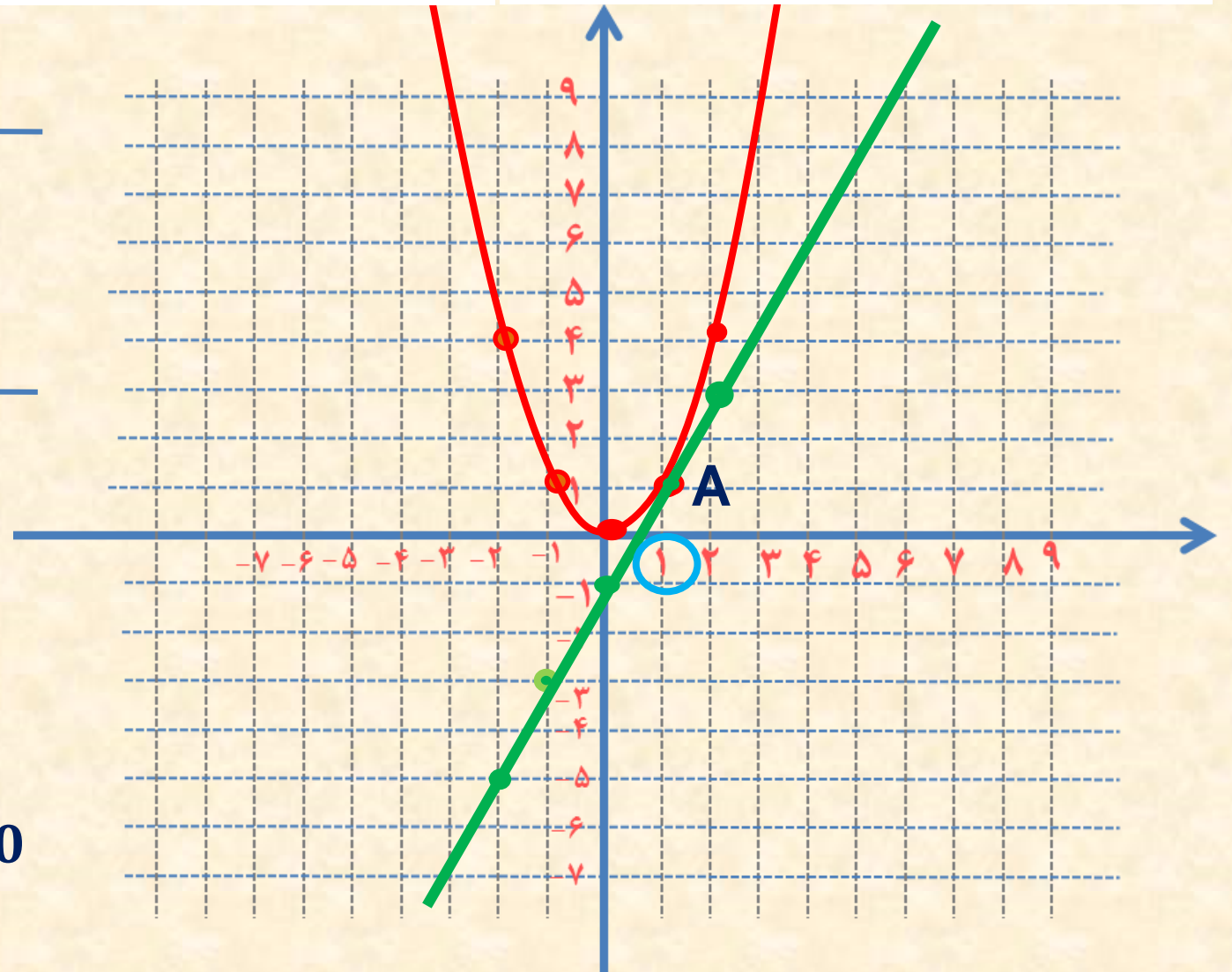
$$y = \frac{1}{3} \times (-3) - 2 = -1 - 2 = -3$$



مثال ۵ - معادله درجه دوم $x^2 - 2x + 1 = 0$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^2 = 2x - 1$ و نمودارهای معادله‌های $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x - 1$ را رسم می‌کنیم.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = x^2$	۴	۱	۰	۱	۴
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = 2x - 1$	-۵	-۳	-۱	۱	۳



جواب را در معادله امتحان می‌کنیم.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(1)^2 - 2 \times (1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

روش هندسی

مشاهده شد در این روش می توان جمله درجه دوم را یک طرف ، و جملات دیگر را در طرف دیگر معادله نوشت . نمودار عبارت درجه دوم **غیر خطی (سهمی)** است و نمودار طرف دیگر **خطی** است .

۱- اگر سهمی و خط ، همدیگر را در **دو نقطه** قطع کنند معادله **دو جواب** دارد .

۲- اگر سهمی و خط ، همدیگر را در **یک نقطه** قطع کنند معادله **یک جواب** دارد .

۳- اگر سهمی و خط ، همدیگر را در **قطع نکنند** معادله **جواب ندارد** .

پودمان سوم
درس دوم

حل معادله
درجه دوم
به روش دلتا

معادله زیر درجه چند است آیا می توانید جواب های آن را حدس بزنید؟

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن a و b و c اعداد حقیقی مشخصی هستند و $a \neq 0$ ، معادله درجه دوم نامیده می شود.

به دست آوردن روش کلی برای حل معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ابتدا معادله درجه دوم را به شکل مقابل می نویسیم و دلتا را از رابطه ی زیر به دست می آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

جواب های معادله درجه دوم را از رابطه ی زیر محاسبه می کنیم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

برای مقدار **دلتا** یکی از سه حالت زیر داریم :

معادله دوجواب متمایز دارد.

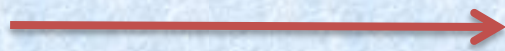
حالت اول : اگر دلتا عددی مثبت باشد.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حالت دوم : اگر دلتا صفر باشد.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$



$$x = \frac{-b}{2a}$$

در این حالت جواب ها باهم یکی می شوند و از رابطه فوق بدست می آید . (ریشه مضاعف)

حالت سوم : اگر دلتا منفی باشد.

چون اعداد منفی جذر ندارند:

در این حالت ، معادله درجه دوم جواب ندارد .

مثال : جواب های معادله زیر را بدست آورید .

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$a = 3$$

$$b = -4$$

$$c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4(3)(1) = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

حل : جواب ها را از روش دلتا به دست می آوریم.

دلتا **مثبت** است ، معادله دو جواب متمایز دارد

مثال : جواب های معادله زیر را بدست آورید .

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$$

حل :

چون دلتا **صفر** است جواب معادله درجه دوم از رابطه زیر بدست می آید.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

مثال: معادله د رجه دوم زیرچند جواب دارد؟

$$2x^2 + 3x + 7 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(7) = 9 - 56 = -47$$

چون دلتا **منفی** است این معادله جواب **ندارد** .

در این جا دو اتحاد از سال های گذشته یادآوری می کنیم:

اتحاد مزدوج

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

مثال: با استفاده از اتحاد مزدوج حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(x + 3)(x - 3) = \underset{=}{a^2 - b^2} x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

مثال: با استفاده از اتحاد مزدوج عبارات زیر را تجزیه کنید.

طرف اول اتحاد تجزیه شده طرف دوم است.

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

$$9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2)$$

اتحاد جمله مشترک

$$(x + a)(x + b) = x^2 + \overset{\text{جمع}}{(a + b)}x + \overset{\text{ضرب}}{ab}$$

مثال: با استفاده از اتحاد جمله مشترک حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(x + 3)(x + 5) = x^2 + (3 + 5)x + 3 \times 5 = x^2 + 8x + 15$$

$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال: با استفاده از اتحاد جمله مشترک عبارات زیر را تجزیه کنید.

طرف اول اتحاد تجزیه شده طرف دوم است.

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

$$x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$$

روش های دیگر حل معادله درجه دوم

یک معادله درجه دوم را به روش های مختلفی می توان حل کرد.

روش هندسی در درس گذشته و روش کلی دلتا در این درس تشریح شد..

گاهی ساده تر است معادله درجه دوم را با تجزیه به دو معادله درجه اول تجزیه کنیم.

در موارد خاصی نیز جواب ها با ریشه گیری به راحتی به دست می آید.

کاردرکلاسی ۷

جواب های معادله های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \longrightarrow x = 3$$

$$x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \pm\sqrt{6}$$



مسائل

صفحة ٨٧

معادله درجه دوم

(۱) جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$\text{ت) } x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$$

دلتا منفی است ، معادله جواب ندارد

$$\text{ث) } (2x - 1)^2 = 5$$

$$2x - 1 = \pm\sqrt{5}$$

$$2x = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

(۲) اگر یکی از جواب‌های معادله $5x^2 + 13x + c = 0$ برابر (-3) باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

$$5x^2 + 13x + c = 0$$

$$5(-3)^2 + 13(-3) + c = 0 \longrightarrow 45 - 39 + c = 0 \longrightarrow c = -6$$

$$5x^2 + 13x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4(5)(-6) = 169 + 120 = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-13 \pm 17}{10}$$

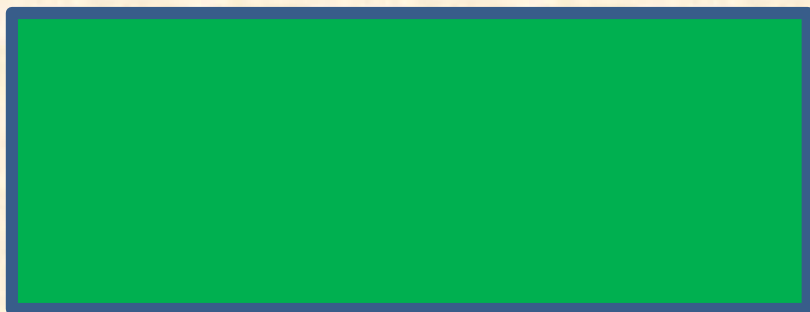
$$x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{-30}{10} = -3$$

مسئله‌ها

۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۳۰۰ مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

$3x$



x

$$3x \times x = 300$$

$$3x^2 = 300$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm 10$$

$$\text{عرض} = 10$$

$$\text{طول} = 30$$

(۵) حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی، ۱۳۲ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

$$x(x + 1) = 132$$

$$x^2 + x - 132 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-132) = 529$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 23}{2}$$

۱۱ و ۱۲ : دو عدد صحیح متوالی

-۱۱ و -۱۲ : دو عدد صحیح متوالی

$$x = \frac{22}{2} = 11$$

$$x = \frac{-24}{2} = -12$$



تهیه کننده:
محمد مراد اکبری