جزوه مجموعه ها	بسمه تعالی	پایه :نهم

مجموعه

دسته ای از اشیای مشخص(عضویت این اشیا در مجموعه کاملا معین باشد) و متمایز(غیر تکراری) را مجموعه می گویند.مجموعه با حروف بزرگ A یا B یا C یا... نام گذاری می شود. مانند $A = \{۴,۶,۷\}$ به هریک از عدد های ۴،۶ و۷ یک عضو مجموعه A می گوییم و می نویسیم $۴ \in A$ (۴ عضو A است). و $(۵ \notin A$ یعنی ۵ عضو A نیست.

در نمایش مجموعه ها ، ترتیب نوشتن عضوهای یک مجموعه مهم نیست. و با جابجایی عضوهای یک مجموعه،مجموعه جدیدی ساخته نمی شود.همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه،مجموعه جدیدی ساخته نمی شود بنابراین به جای{۳ و۲و۳و۱} می نویسیم. {۳ و۲و۱} چون تعداد عضوهای A برابر است با ۳. می نویسیم $n(A) = ۳$

معرفی مجموعه های اعداد

اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می دهند. $\mathbb{N} = \{۱ و ۲ و ۳ و ٤ و ... \}$

کوچکترین عدد طبیعی =۱ بزرگترین عدد طبیعی وجود ندارد

اعداد حسابی را با W نمایش می دهند. $W = \{۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ٤ و ... \}$

کوچکترین عدد حسابی=۰ بزرگترین عدد حسابی وجود ندارد.

اعداد صحیح را با $\mathbb{Z}$ نمایش می دهند. $\mathbb{Z} = \{... و -۲ و -۱ و ۰ و +۱ و +۲ و ... \}$

کوچک ترین و بزرگترین عدد صحیح وجود ندارند.

بزرگترین عدد صحیح منفی=۱- کوچکترین عدد صحیح مثبت=+۱

اعداد زوج طبیعی را با E نمایش می دهند. $E = \{۲, ٤, ٦, ... \}$

اعداد فرد طبیعی را با O نمایش می دهند. $O = \{۱,۳,۵,۷, ... \}$

اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نمایش می دهند. $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\}$

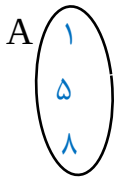
(اعدادی را که بتوان به صورت کسر نوشت به طوری که صورت و مخرج عددی صحیح باشند و مخرج صفر نباشد.)

اعداد گنگ را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نمایش می دهند. هر عددی که گویا نباشد گنگ است.

اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می دهند.

انواع نمایش مجموعه:

۱- نوشتن اعضای مجموعه داخل{ } (اکلاد) مثال: A= {۱,۵,۸}



۲- رسم نمودار ون (منحنی ها یا خط های شکسته بسته)

۳- نمایش ریاضی مجموعه: مثال: مجموعه اعداد طبیعی بین ۳+ و ۶+ $\{x \mid x \in \mathbb{N}, +۳ < x < +۶\}$

۴- نوشتن مجموعه به صورت توصیفی: مجموعه اعداد صحیح بین ۲+ و ۲-

اگر در مجموعه ای عضوی وجود نداشته باشد، آن را مجموعه تهی می نامیم و با نماد $\emptyset$ یا { } نمایش می دهیم.

توجه شود که این مجموعه با مجموعه $\{\emptyset\}$ یا $\{۰\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند،یکی نیست. $n(\emptyset) = ۰$

عضوهای دو مجموعه یکسان باشند یعنی هر عضو A عضوی از B ، و هر عضو B،عضوی از A است در این صورت دو مجموعه A و B برابرند و می نویسیم A=B مانند: $\{۵ و ۳ و ۲\} = \{۳ و ۲ و \sqrt{۲۵}\}$

اگر همه عضوهای یک مجموعه مانند$A = \{a, b\}$ در مجموعه ای مانند $B = \{a, b, ۴\}$ باشند یعنی هر عضو A ، عضوی از B باشد، در این صورت مجموعه A زیرمجموعه B است.و می نویسیم $A \subseteq B$

چون همه عضوهای B عضو مجموعه A نیستند (عدد ۴ عضو B هست ولی عضو A نیست) می نویسیم $B \nsubseteq A$ (مجموعه B

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

زیر مجموعه A نیست).

یا اگر بتوانیم عضوی در B بیابیم که در A نباشد، می گوییم B زیرمجموعه A نیست: $B \not\subseteq A$

نکات مهم: هر مجموعه ای زیر مجموعه خودش است. $A \subseteq A$

مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای دلخواه مانند A هست. $\emptyset \subseteq A$ یا $\{\ \} \subseteq A$

تعداد زیر مجموعه ها از این فرمول به دست می آید. تعداد زیرمجموعه ها $= ۲^n$

سئوال: مجموعه $A = \{a, b, c, a\}$ را داریم :

الف) تعداد عضوهای A را بنویسید. چون عضو a تکراری هست یک بار به حساب می آوریم. پس $A = \{a, b, c\}$

$n(A) = ۳$

ب) تعداد زیرمجموعه های A را به دست آورید. $۲^۳ = ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$ تعداد زیر مجموعه ها $= ۲^n$

ج) تمام زیر مجموعه های A را بنویسید.

زیر مجموعه های ۳ عضوی $\{a, b, c\}$ زیر مجموعه های دو عضوی $\{a, b\}\ \{a, c\}\ \{b, c\}$

زیر مجموعه های یک عضوی $\{a\}\ \{b\}\ \{c\}$ زیر مجموعه صفر عضوی $\{\ \}$

نمایش ریاضی چند مجموعه:

مجموعه اعداد زوج طبیعی $\{۲,۴,۶, \dots\} = \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\}$

مجموعه عددهای طبیعی فرد $\{۱,۳,۵, \dots\} = \{۲k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$

مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۳ $\{۳,۶,۹, \dots\} = \{۳k \mid k \in \mathbb{N}\}$

مجموعه عدد های حسابی $W = \{۰,۱,۲,۳, \dots\} = \{k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$

نکته: رابطه کلی بین زیر مجموعه های اعداد به صورت زیر است.

$\mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

سئوال:درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ درست

$\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ درست

$\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}$ درست

$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q}$ نادرست

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{N}$ نادرست

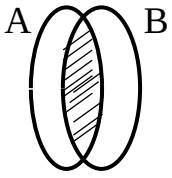
$W \not\subseteq W$ نادرست

اجتماع و اشتراک و تفاضل دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B ، مجموعه ای شامل همه عضوهایی است که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B است.(اعضای مشترک هر دو مجموعه) اشتراک را نماد $A \cap B$ نشان می دهند.

$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$

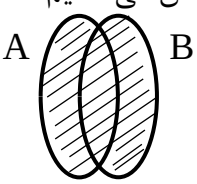
نمودار ون اشتراک:



اجتماع دو مجموعه A, B :شامل همه عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند. (همه عضو های A و B را می نویسیم اما عضوهای تکراری را یک بار باید نوشت.) اجتماع را با نماد $A \cup B$ نشان می دهیم.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$

نمودار ون اجتماع دو مجموعه:

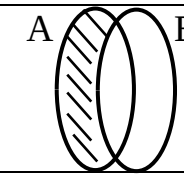


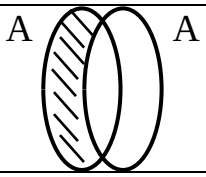
تفاضل دو مجموعه: مجموعه A-B (A منهای B) مجموعه ای است شامل همه عضوهایی که عضو مجموعه A هستند، ولی عضو مجموعه B نیستند.

$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

جزوه مجموعه ها	بسمه تعالی	پایه :نهم

نمودار ون $A-B$: 

نمودار ون $B-A$: 

سئوال: مجموعه های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۱۰,۱۱\}$ را داریم: هر یک از مجموعه های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

$A\cap B=\{۹\}$ و $A\cup B=\{۲,۴,۶,۸,۹,۱,۵,۷,۳\}$

$C-B=\{۱۰,۱۱\}$ $(A\cup B)-C=\{۲,۴,۶,۸,۹,۱,۵,۷,۳\}-\{۱,۷,۱۰,۱۱\}=\{۲,۴,۶,۸,۹,۵,۳\}$

سئوال: طرف دوم تساوی های زیر را کامل کنید.(با کمک رابطه $\mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}$, $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ داریم)

$\mathbb{R}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}^{c}=\emptyset$, $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$, $\emptyset\cup\mathbb{W}=\mathbb{W}$, $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{۰\}$, $\mathbb{N}-\mathbb{Z}=\emptyset$

مجموعه ها و احتمال

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$, احتمال رخ دادن یک پیشامد = $\frac{\text{تعداد حالتهای مطلوب}}{\text{تعداد همه حالتهای ممکن}}$

سئوال: اگر تاسی را بیاندازیم ، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به دست آورید.

الف) عدد رو شده مضرب ۳ باشد. $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$, $n(S)=۶$ $A=\{۳,۶\},n(A)=۲$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

ب) عدد رو شده اول باشد. $B=\{۲,۳,۵\}$, $n(B)=۳$ $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ج) عدد رو شده از ۶ بزرگ تر باشد. $P(C)=\frac{۰}{۶}=۰$ $C=\{\},n(C)=۰$

د) عدد رو شده از ۷ کمتر باشد. $P(D)=\frac{۶}{۶}=۱$ $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$, $n(D)=۶$

اعداد گویا

هر عددی را که بتوان به صورت کسر نوشت که صورت و مخرج عددی صحیح باشند و مخرج صفر نباشد عددی گویاست.

مثال: $۲/۵=۲\frac{۵}{۱۰}$ $\sqrt{۴}=۲=\frac{۲}{۱}$ $۳=\frac{۳}{۱}$

نکته: اعداد اعشاری مختوم (پایان پذیر) همه گویا هستند. مانند: ۴/۲۳۵ ۲۵/۳

اعداد اعشاری که دوره گردش (دوره تناوب) دارند همه گویا هستند. (دوره گردش: اعدادی که به طور منظم بعد از ممیز تکرار می شوند.) مانند: ۴/۳۳۳ ... ۴/۲۳۲۳۲۳ ... ۷/۲۶۶۶ ...

اعداد گنگ: هر عددی که گویا نباشد گنگ (اصم) نام دارد.(عددهایی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۱۰}$ و ۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱ ... و π که تعداد ارقام آنها بی شمار و دارای دوره تناوب نیستند، عدد گنگ(اصم) می گوییم.($\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^{c}$)

انواع عدد گنگ: ۱- عدد پی $\pi\simeq 3/14$

۲- جذر(رادیکال) غیر کامل مانند: $\sqrt{۱۲}$ و $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۵}$

۳-اعداد اعشاری که دو شرط همزمان داشته باشند عدد گنگ هستند. ۱- پایان ناپذیر(بدون پایان) ۲- بدون دوره گردش به عبارتی اخرین اعداد بعد از ممیز به طور دقیق مشخص نیستند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

جزوه مجموعه ها	بسمه تعالی	پایه :نهم

مانند: ۳/۴۶۳۷۸ ... ۶/۰۷۰۰۷۰۰۰۷ ...

رادیکال(جذرهای) کامل همگی گویا هستند. مانند $\sqrt{۰/۰۹}=۰/۳$ و $\sqrt{۹}=۳$ و $\sqrt{۴}=۲$

اعداد حقیقی

اجتماع اعداد گویا و گنگ اعداد حقیقی هستند. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ (همه اعدادی که تا حالا خواندیم همه اعداد حقیقی هستند) کسرهایی مثل $\frac{۷}{۰}$ یا $\frac{۸}{۰}$ تعریف نشده هستند.(عدد حقیقی نیستند)

و زیر رادیکال عدد منفی نمی تواند باشد مانند $\sqrt{-۴}$ یا $\sqrt{-۷}$ (این اعداد حقیقی نیستند بلکه عدد مختلط هستند.

علامت های مقایسه ای(نامساوی):

$x > ۳$ (می خوانیم اعداد بزرگتر از سه) $x < ۴$ (می خوانیم اعداد کوچکتر از چهار)

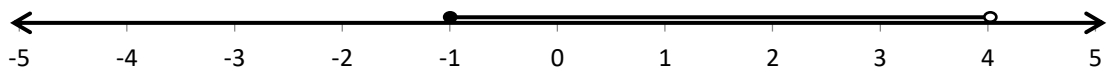
$x \geq ۲$ (اعداد بزرگتر یا مساوی دو) $x \leq -۱$ (اعداد کوچکتر یا مساوی منفی یک)

$۲ < x < ۴$ (اعداد بین ۲و۳ که شامل ۲ و ۳ نمی شود)

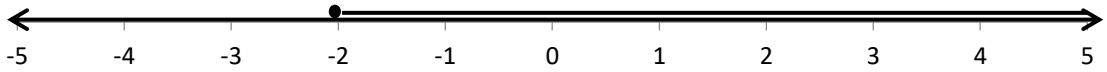
$۴ \leq x \leq ۶$ (اعداد بین ۴ و ۶ که شامل ۴ و۶ هم می شود)

معمولا مجموعه اعداد حقیقی را روی محور نمایش می دهیم

مثال: مجموعه مقابل را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -۱ \leq x < +۴\}$



مثال: مجموعه مقابل را روی محور نمایش دهید. $\{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \leq x\}$



چگونه بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۵}$ سه کسر پیدا کنیم:

۱- روش اول: کسر ها را هم مخرج می کنیم(مخرج مشترک) $\frac{۲}{۵}=\frac{۸}{۲۰}<\frac{۹}{۲۰}<\frac{۱۰}{۲۰}<\frac{۱۱}{۲۰}<\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۳}{۴}$

۲- روش دوم: صورت ها با هم جمع شوند و مخرج ها نیز با هم(جمع صورت و مخرج) $\frac{۲}{۵}<\frac{۷}{۱۴}<\frac{۵}{۹}<\frac{۸}{۱۳}<\frac{۳}{۴}$

۳- روش سوم: $\frac{\text{جمع دو عدد کسری}}{۲}$ (میانگین) $\frac{۲}{۵}<\frac{۳۹}{۸۰}<\frac{۲۳}{۴۰}<\frac{۵۳}{۸۰}<\frac{۳}{۴}$ توضیح: $\frac{\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۴}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{\frac{۲۳}{۲۰}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{۲۳}{۴۰}$

سئوال۱: بین دو عدد $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۵}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید. $\sqrt{۵}<\sqrt{۶}<\sqrt{۷}<\sqrt{۸}<\sqrt{۹/۵}<\sqrt{۱۰}$

سئوال۲: بین دو عدد ۲ و ۳ ، چهار عدد گنگ بنویسید. $۲=\sqrt{۴}<\sqrt{۵}<\sqrt{۶}<\sqrt{۷}<\sqrt{۸}<\sqrt{۹}=۳$

قدر مطلق

قدر مطلق همان فاصله تا مبدا هست که نمی تواند عددی منفی باشد. فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدا ، قدر مطلق a می نامیم و با علامت $|a|$ نمایش می دهیم. بنابراین $|-۲|=|۲|=۲$ و $|۰|=۰$

قدرمطلق عدد های مثبت برابر خود آن عدد است و قدر مطلق هر عدد منفی ، قرینه آن عدد است.

$$a=۰ \Rightarrow |a|=۰ \quad , \quad a>۰ \Rightarrow |a|=a \quad , \quad a<۰ \Rightarrow |a|=-a$$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

جزوه مجموعه ها	بسمه تعالی	پایه :نهم

a, b هردومثبت $a > ۰ , b > ۰$ a, b هردو منفی $a < ۰ , b < ۰$

a نامنفی $a \geq ۰$ a نامثبت $a \leq ۰$

حاصل قدر مطلق های زیر را به دست آورید.

$|۳ - \sqrt{۵}| = ۳ - \sqrt{۵}$ (چون حاصل عبارت $\sqrt{۹} - \sqrt{۵}$ عددی مثبت هست در نتیجه خودش بیرون می آید.)

$|۲ - \sqrt{۷}| = -۲ + \sqrt{۷}$ (چون حاصل $\sqrt{۴} - \sqrt{۷}$ منفی است قرینه عبارت بیرون می آید.

$|-\sqrt{۷} - \sqrt{۶}| = \sqrt{۷} + \sqrt{۶}$ چون حاصل $-\sqrt{۷} - \sqrt{۶}$ منفی است قرینه آن بیرون می آید.

مثال: $\sqrt{(۱ - \sqrt{۳})^۲} = |۱ - \sqrt{۳}| = \sqrt{۳} - ۱$ توان ۲ و رادیکال با هم خط می خورد عبارت زیر رادیکال داخل قدر مطلق می رود و چون حاصل عبارت $\sqrt{۳} - ۱$ منفی است قرینه اش بیرون می آید.

اگر $a = ۲ , b = -۳ , c = -۵$ آنگاه حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$|b - a| - |c|$ $|-۳ - ۲| - |-۵| = |-۵| - ۵ = ۵ - ۵ = ۰$

اگر a و b هر دو مثبت باشند آنگاه هم حاصل ضرب و هم مجموع a وb هر دو مثبت هستند.

$a > ۰ , b > ۰ \Rightarrow ab > ۰ , a + b > ۰$

اگر a و b هر دو منفی باشند آنگاه حاصل ضرب دو عدد مثبت و مجموع a وb منفی می شود.

$a < ۰ , b < ۰ \Rightarrow ab > ۰ , a + b < ۰$

اگر یکی از a و b منفی و دیگری مثبت باشد حاصل ضرب عددی منفی می شود. راجع به جمع به طور کلی نمی توان اظهار نظر کرد. $a < ۰ , b > ۰ \Rightarrow ab < ۰$

جدول زیر را کامل کنید.

مجموعه ها	E	O	$\mathbb{N}$	W	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$	$\mathbb{R}$
-۲	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✓
۰	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✗	✓
۲/۵	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✓
$\frac{۴}{۲}$	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✓
$\sqrt{۴}$	✓	✗	✓	✓	✓	✓	✗	✓
$\sqrt{۷}$	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓
π	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓
۶/۰۳۰۰۳ ...	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓
۸/۹۹۹۹ ...	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✓
۳/۸۵۶۴۹ ...	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓

تهیه کننده: پورشمس

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس