بسمه تعالی

دبیرستان پسرانه غیردولتی سیدالشهدا (علیه السلام)

(دوره دوم) منطقه ۸ تهران

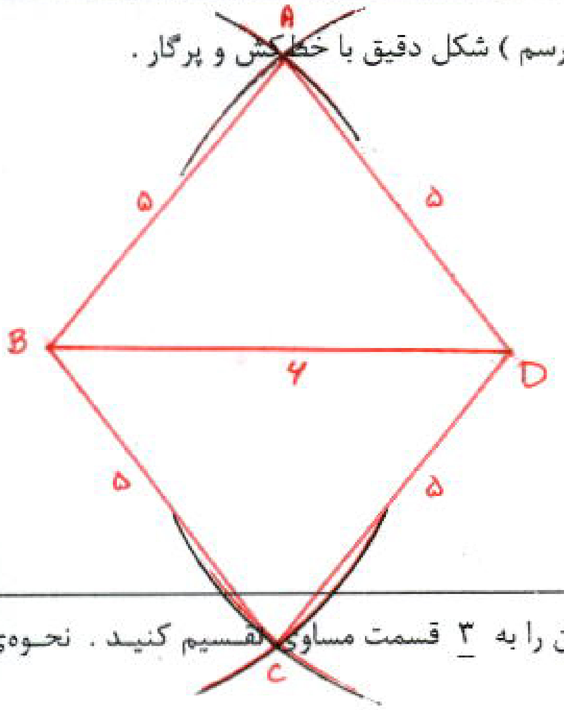
سال تحصیلی ۹۷ - ۹۶

« امتحانات پایانی نوبت اول »

تاریخ :	۹۶/۱۰/۱۶
سوالات درس / کد :	هندسه
پایه :	دهم ریاضی
طراح آقای :	پورحسن
مدت :	۱۱۰ دقیقه

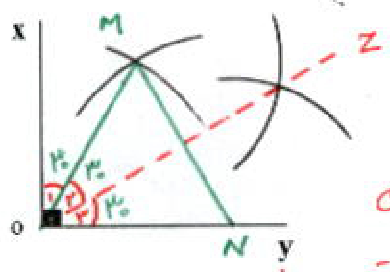
نام و نام خانوادگی   شماره کارت :   کلاس :

۱ یک لوزی به طول ضلع ۵ و قطر ۶ رسم کنید . (نحوه‌ی رسم) شکل دقیق با خط‌کش و پرگار . ۱



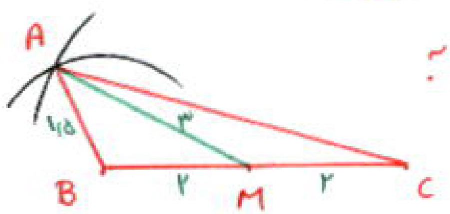
- در لوزی ، چهار ضلع ، برابرند . پس ابتدا قطر BD
- را به طول ۶ سانتی متر رسم می‌کنیم و سپس به
- مراکز B و D و شعاع 5cm کمانهایی می‌زنیم
- تا نقاط A و C پیدا شوند .
- از A و C به B و D وصل می‌کنیم .
-

۲ زاویه‌ی $x\hat{o}y$ قائمه است . به وسیله‌ی خط‌کش و پرگار ، آن را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنید . نحوه‌ی انجام کار بطور کامل شرح داده شود . ۱



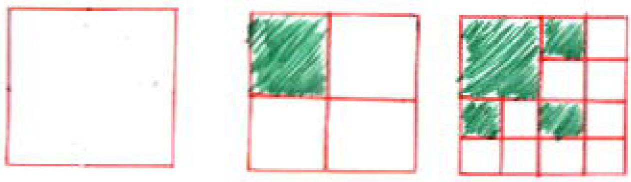
- ابتدا اندازه‌ی دلخواه ON را روی یکی از اضلاع زاویه ، مثلاً OY
- جدا کرده و به روشی که می‌دانیم روی آن مثلث متساوی‌الاضلاع $\overset{\triangle}{OMN}$
- را می‌سازیم . به این ترتیب ، زاویه‌ی قائمه به دو زاویه‌ی ۶۰° و ۳۰° تقسیم می‌شود
- حالا به روشی که می‌دانیم نیمساز زاویه‌ی ۶۰° را رسم می‌کنیم .
-

۳ مثلث ABC با اضلاع $AB = ۱/۵$ و $BC = ۴$ و میانه‌ی $AM = ۳$ را رسم کنید . (نحوه‌ی رسم) ۱



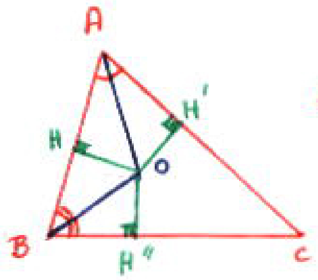
- ابتدا پاره خط BC به طول ۴ سانتی متر را رسم می‌کنیم و پس وسط آن را پیدا کرده و
- M می‌نامیم . به مرکز M و به شعاع ۳ و همچنین به مرکز B و به
- شعاع ۱/۵ کمانهایی ترسیم می‌کنیم تا یکدیگر را در A
- قطع کنند . از A به B و C وصل می‌کنیم .
-

شماره		بارم
۴	مربعی با ضلع دلخواه مفروض است (مرحله‌ی صفر) وسط‌های اضلاع آن‌ها را به هم وصل کرده و یکی از مربع‌های حاصل را با رنگ کردن حذف می‌کنیم (مرحله‌ی یک) اگر این کار را برای مربع‌های رنگ نشده ادامه دهیم ، در مرحله‌ی n اُم چند مربع جدید همنهشت ، رنگ نشده هستند ؟ برای تک‌تک مراحل شکل جداگانه رسم کنید .	۱/۵



مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعداد مربع باقی	$1=3^0$	$3=3^1$	$9=3^2$	...	3^n

۵	ثابت کنید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث ، همرسند .	۲



با برهان خلف ثابت کرده‌ایم که نیمسازهای ۲ زاویه A و B ، حتماً در نقطه‌ای مثل O متقاطع‌اند و همچنین می‌دانیم هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه باشد ، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است :

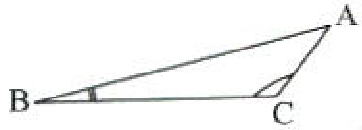
$\hat{A}$ روی نیمساز O $\Rightarrow OH=OH'$
$\hat{B}$ روی نیمساز O $\Rightarrow OH=OH''$
$\Rightarrow OH'=OH''$

یعنی O از دو ضلع زاویه C به یک فاصله است .

پس O روی نیمساز $\hat{C}$ نیز قرار دارد.

یعنی ۳ نیمساز همرسند .

۶	اگر در مثلثی ، یک زاویه از زاویه‌ی دیگر بزرگتر باشد ، ثابت کنید ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگتر ، بزرگتر است از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچکتر . (عکس قضیه‌ی قیاس) (به روش برهان خلف)	۱/۵



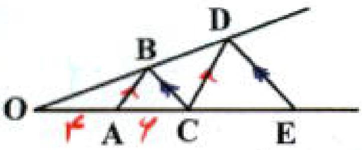
ف | $\hat{C} > \hat{B}$
ح | $AB > AC$

برهان خلف $\Rightarrow AB \not> AC \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \xrightarrow{\text{مثلث متساوی الساقین}} \hat{B}=\hat{C} & \text{خلاف فرض} \\ AB < AC \xrightarrow[\text{قیاس}]{\text{قضیه}} \hat{C} < \hat{B} & \text{خلاف فرض} \end{cases}$

پس حکم مسئله صحیح بوده و $AB > AC$ است .

شماره		بارم

۱۰ در شکل مقابل $AB \| CD$ و $BC \| DE$ و $OA = ۴$ و $AC = ۶$ اندازه‌ی CE را بدست آورید. — بارم: ۱

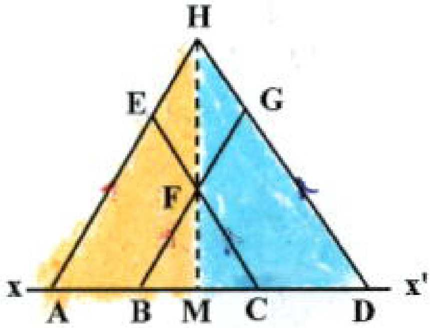


$\overset{\triangle}{ODC} : AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس جزء به جزء}} \frac{OB}{BD} = \frac{OA}{AC}$

$\overset{\triangle}{ODE} : BC \parallel DE \xrightarrow{\text{تالس جزء به جزء}} \frac{OB}{BD} = \frac{OC}{CE}$

$\Rightarrow \frac{\overset{4}{OA}}{\underset{6}{AC}} = \frac{\overset{10}{OC}}{CE} \Rightarrow \boxed{CE = 15}$

۱۱ نقاط A و B و C و D روی خط xx' قرار دارند. دو خط موازی از A و B و همچنین ۲ خط موازی نیز از C و D عبور دهید تا از تقاطع آنها چهار ضلعی $EFGH$ حاصل شود. امتداد FH خط xx' را در M قطع می‌کند. ثابت کنید: $MA . MC = MB . MD$ — بارم: ۱/۵



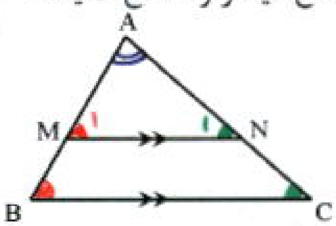
$\overset{\triangle}{MAH} : BF \parallel HA \xrightarrow[\text{جزء به}]{\text{تالس}} \frac{MF}{MH} = \frac{MB}{MA}$

$\overset{\triangle}{MDH} : CF \parallel DH \xrightarrow{\text{کل}} \frac{MF}{MH} = \frac{MC}{MD}$

$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MC}{MD}$

$\xrightarrow[\text{و}]{\text{ط}} MA \cdot MC = MB \cdot MD$

۱۲ ثابت کنید اگر در مثلثی، خطی موازی یکی از ضلع‌ها به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر را قطع نماید، مثلثی تشکیل می‌شود که با مثلث اصلی متشابه است. — بارم: ۱/۵



$MN \parallel BC , AB \xrightarrow{\text{مورب}} \hat{M}_1 = \hat{B}$

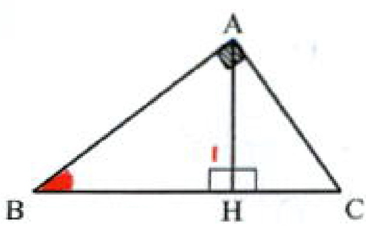
$MN \parallel BC , AC \xrightarrow{\text{مورب}} \hat{N}_1 = \hat{C}$

مشترک $\hat{A} = \hat{A}$

$MN \parallel BC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{تعمیم}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

$\xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{تعریف}} \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

۱۳ مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ قائم‌الزاویه است. ثابت کنید: $AB^{2} = BH \times BC$ — بارم: ۱/۵



مشترک $\hat{B} = \hat{B}$

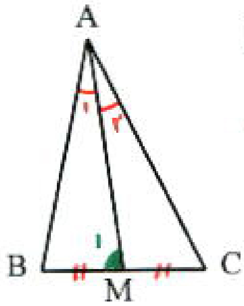
$\hat{H}_1 = \hat{A} = 90^\circ$

$\xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{CBA} \xrightarrow[\text{اضلاع}]{\text{تناسب}} \frac{AB}{CB} = \frac{AH}{CA} = \frac{BH}{BA}$

نمی‌خواهیم

$\xrightarrow[\text{و}]{\text{ط}} AB^{2} = BH \cdot BC$

شماره		بارم
۷	در مثلث $A\hat{B}C$ ، AM میانه بوده و $AM > \frac{BC}{2}$ است . ثابت کنید : $\hat{A} < 90^\circ$	۱/۵



$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} AM > \frac{BC}{2} \Rightarrow AM > BM \xrightarrow[\text{قضیه قیاس}]{\triangle ABM} \hat{B} > \hat{A}_1$

$AM > MC \xrightarrow{\triangle ACM} \hat{C} > \hat{A}_2$ +

$\underbrace{\hat{B}+\hat{C}}_{180-\hat{A}} > \underbrace{\hat{A}_1+\hat{A}_2}_{\hat{A}}$

$180-\hat{A} > \hat{A}$

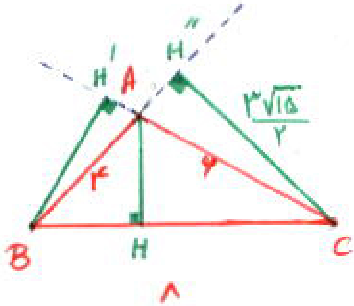
$180^\circ > 2\hat{A}$

$\xrightarrow{\div 2} \boxed{90 > \hat{A}}$

شماره		بارم
۸	طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ سانتی‌متر است . طول‌های ۲ ارتفاع دیگر مثلث را بدست آورید .	۱/۵

نکته: همیشه بلندترین ارتفاع بر کوچکترین ضلع فرود می‌آید

حالا مساحت مثلث را به سه روش محاسبه می‌کنیم:

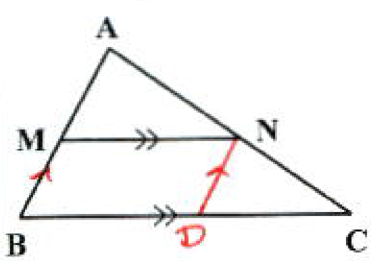


$S_{A\overset{\triangle}{B}C} = \frac{AH \times \overset{8}{BC}}{2} = \frac{BH' \times \overset{6}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frac{3\sqrt{15}}{2}}{CH''} \times \overset{4}{AB}}{2}$

پس از محاسبه $\Rightarrow \boxed{AH = \frac{3\sqrt{15}}{4}}$, $\boxed{BH' = \sqrt{15}}$

شماره		بارم
۹	اگر در مثلثی ، خطی موازی یکی از اضلاع مثلث ، طوری رسم شود که دو ضلع دیگر را قطع نماید ، مثلث کوچکی پدید می‌آید . ثابت کنید اضلاع این مثلث با اضلاع مثلث اصلی ، نظیر به نظیر متناسبند : (تعمیم تالس)	۱/۵

$\left(MN \,||\, BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}\right)$



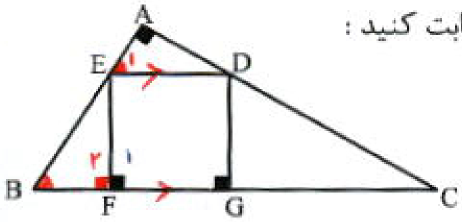
$MN \,||\, BC \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (1)

از N خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا BC را در D قطع کند.

$ND \,||\, AB \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{BD}{BC} = \frac{AN}{AC}$ (2)

$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{BD}{BC} \rightarrow MN \rightarrow$ زیرا MNDB متوازی الاضلاع است و اضلاع مقابل برابرند

شماره		بارم
۱۴	در شکل مقابل $AB \perp AC$ و چهار ضلعی $DEFG$ مربع است . ثابت کنید :	۲
	الف) $BF . AD = AE . EF$	



در مربع، اضلاع مقابل، موازیند :

$ED \parallel BC$, $\overset{\text{مورب}}{AB} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}$

$\hat{F}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{F}_2 = \hat{A} = 90^\circ$

$\xRightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{AED} \sim \overset{\triangle}{FBE} \xrightarrow[\text{اضلاع}]{\text{تناسب}} \frac{AE}{FB} = \frac{AD}{FE} = \frac{ED}{BE}$

نمی‌خواهیم

$\xrightarrow[\text{و}]{\text{ط}} AE \cdot EF = BF \cdot AD$

موفق باشید