

فصل سوم: توان های گویا و عبارت های جبری

این فصل به چهار درس زیر تقسیم می شود:

- ۱- ریشه و توان ۲- ریشه n ام ۳- توان های گویا ۴- عبارت های جبری

درس اول: ریشه و توان

الف) یادآوری:

* هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه ی دوم است. یعنی:

- اگر $a^2 = b$ باشد ($b > 0$) آنگاه $+ \sqrt{b}$ و $- \sqrt{b}$ ریشه های دوم عدد b هستند.

- مثلاً ریشه های دوم ۹، اعداد $+ \sqrt{9} = 3$ و $- \sqrt{9} = -3$ هستند. (استباه کنی بنویسی $\sqrt{9} = \pm 3$)

* اعداد منفی ریشه ی دوم ندارند. (جز اعداد منفی تعریف نشده است ، تعریف شده $\sqrt{-4}$)

* عدد حقیقی صفر فقط یک ریشه ی دوم دارد که همان صفر است.

* اگر $\sqrt{a} = b$ باشد آنگاه a, b هر دو مثبت هستند و $b^2 = a$.

* اگر a, b دو عدد حقیقی باشند و $a^3 = b$ ، آنگاه a ، ریشه ی سوم عدد b می نامیم و آن را با

$\sqrt[3]{b}$ نمایش می دهیم. (ملاحظه کنیم ← رادیکال b به فرم $\sqrt[3]{b}$)

- تمام اعداد حقیقی (مثبت، منفی، صفر) ریشه سوم دارند.

- هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد که هم علامت با خودش است. ($\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$)

تمرین پای تخته:

منفی از رادیکال بازمی آید $\sqrt[3]{-8}$ میاد بیرون

برای هر a و b توانی یک a و b را در یک a و b برعکس بنویسد.

الف) $7^2 = 49 \Leftrightarrow$

ب) $(-4)^3 = -64 \Leftrightarrow$

ج) $\sqrt{100} = 10 \Leftrightarrow$

د) $\sqrt[4]{125} = 5 \Leftrightarrow$

ه) $\sqrt{-27} = -3 \Leftrightarrow$

و) $x^3 = 8 \Leftrightarrow$

ز) $(0/3)^3 = 0/008 \Leftrightarrow$

ح) $\sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow$

ط) $\sqrt{0/16} = 0/4 \Leftrightarrow$

ی) $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow$

ث) $\sqrt{\frac{49}{4}} = 7/2 \Leftrightarrow$

ل) $\sqrt{\frac{8}{100}} = \frac{2}{10}\sqrt{2} \Leftrightarrow$



Subject :

Date:

section:

* اعداد زیر را مربع کامل می نامیم:

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2$
 $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$

* اعداد زیر را مکعب کامل می نامیم:

$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3$
 $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, \dots$

* می دانیم اعدادی مانند $4, 16, 25, 36, \dots$ (اعدادی که جز مربع کامل نیستند) $\sqrt{4}, \sqrt{16}, \sqrt{25}, \dots$

(اعدادی که جز مکعب کامل نیستند) مقدار دقیق آن‌ها بصورت اعشاری قابل نمایش نیست و آن‌ها را اعداد نهایه نامیده ایم.

- برای نمایش مقدار دقیق $\sqrt{5}$ یا $\sqrt{14}$ از خود این نمادها استفاده می کنیم ولی می توانیم در کاربرددهی دنیای واقعی از مقادیر تقریبی آن‌ها استفاده کنیم.

- برای یادگیری محاسبه مقدار تقریبی ریشه دوم و سوم اعداد و پاسخ بهترین پای نسخه زیر را ببینید.

تقریب پای نسخه ۲

ابتدا هر یک از اعداد نگز زیر را روی محور بطور تقریبی نشان دهید و سپس مقادیر تقریبی آن‌ها را تا یک رقم اعشار بدست آورید. (تقریب کمتر از ۰.۱)

- الف) $\sqrt{20}$
- ب) $\sqrt{52}$
- ج) $\sqrt[3]{25}$
- د) $\sqrt{-80}$



ب) ریشه های چهارم و پنجم یک عدد

* ریشه چهارم برای اعداد نامنفی تعریف می شود. (همانند ریشه دوم)

* عدد b را ریشه چهارم عدد a می نامیم هرگاه $b^4 = a$ ($b = +\sqrt[4]{a}$ و $b = -\sqrt[4]{a}$)

- مثلاً $\sqrt[4]{81} = 3$ ریشه چهارم مثبت تعریف می کنیم (همانند ریشه دوم)، یعنی $\sqrt[4]{81} = 3$

- عدد 4 در $\sqrt[4]{16}$ را از چیزی رادیکال می نامیم.

* تمام اعداد حقیقی ریشه ی پنجم دارند. (همانند ریشه سوم)

* عدد b را ریشه ی پنجم عدد a می نامیم هرگاه $b^5 = a$ ($b = \sqrt[5]{a}$)

- مثلاً $\sqrt[5]{243} = 3$ چهارم $3^5 = 243$



تمرین پای تقیه ۳:

برای هر عدد رادیکالی زیر اثر حاصل یک عدد صحیح است جواب آن را بنویسید و در غیر این صورت دو عدد متوالی بنویسید که عدد رادیکالی داده شده بین آن ها باشد.

- | | | |
|---------------------|---------------------|--------------------------|
| الف) $\sqrt{21}$ | ب) $-\sqrt{42}$ | ج) $-\sqrt{0.09}$ |
| د) $\sqrt{-125}$ | ه) $\sqrt{20/4}$ | و) $\sqrt{-90}$ |
| ز) $-\sqrt[3]{100}$ | ح) $-\sqrt[3]{120}$ | ط) $\sqrt[5]{1}$ |
| ی) $\sqrt[5]{-32}$ | ک) $\sqrt[5]{500}$ | ل) $\sqrt{\frac{5}{16}}$ |



تمرین پای تقیه ۴:

ابتدا هر یک از اعداد لنگ زیر را روی محور بطور تقریبی نشان دهید و سپس مقادیر تقریبی آن ها را تا یک رقم اعشار بدست آورید. (تقریب کمتر از ۰.۱)

- الف) $\sqrt{28}$ ب) $\sqrt[3]{45}$



تمرین پای تقیه ۵:

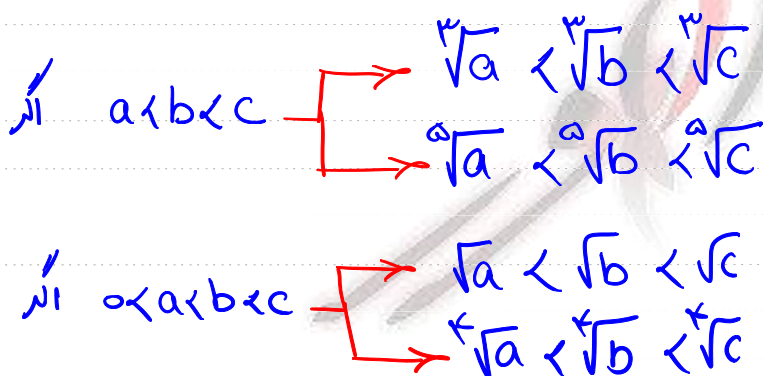
حاصل هر یک از عبارات های زیر را بدست آورید.

- الف) $\sqrt{2 + \sqrt{36}} =$ ب) $10\sqrt{0.27} - 4\sqrt[3]{81} =$
- ج) $\sqrt[5]{-32} - \sqrt[3]{625} =$ د) $\sqrt{3\sqrt{8} + 3\sqrt{1}} =$



ج) مقایسه بین ریشه ها:

۱) مقایسه ریشه های یکسان اعداد



نتیجه ریشه های (دوم، سوم، چهارم و ...) علامت کوچکتري را تغییر نمی دهند. (یادمان باشد که ریشه زوج ها فقط برای اعداد نامنفی تعریف می شوند.)

$$2 < 3 < 4 \Rightarrow \sqrt[4]{2} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[4]{4}$$

$$-5 < -4 < -3 \Rightarrow \sqrt[3]{-5} < \sqrt[3]{-4} < \sqrt[3]{-3}$$

مثال:

Subject :

Date:

section:

(۲) مقایسه ریشه های مختلف یک عدد:

الف) if $a > 1 \Rightarrow a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots$

ب) if $0 < a < 1 \Rightarrow a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots$

ج) if $-1 < a < 0 \Rightarrow a > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots$

(فقط ریشه های فرد)

د) if $a < -1 \Rightarrow a < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots$

(فقط ریشه های فرد)

تمرین پای تخمه ۴:

در جای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $\sqrt{50} \square \sqrt{70}$

ب) $\sqrt[3]{103} \square \sqrt[3]{301}$

ج) $\sqrt{0.3} \square \sqrt{0.5}$

د) $\sqrt{-0.2} \square \sqrt{-0.7}$

ه) $\sqrt{-51} \square \sqrt{-28}$

و) $(0.1)^5 \square (0.1)^7$



درس دوم: ریشه ی nام

مثابه تعریف هاین که برای ریشه دوم تا پنجم داشتیم می توانیم ریشه nام را نیز تعریف کنیم:

* عدد b را ریشه ی nام عدد a می نامیم هرگاه: $b^n = a$

اعداد ۲، ۲-، ریشه ی ۲ام عدد ۴ هستند $\Rightarrow 2^2 = 4$ و $(-2)^2 = 4$

* اگر n فرد باشد \Leftarrow ریشه nام همه ی اعداد (+ یا -) وجود دارد.

* اگر n زوج و a منفی باشد \Leftarrow ریشه nام عدد a وجود ندارد.

* وقتی که n زوج و a مثبت باشد $\sqrt[n]{a}$ را ریشه nام مثبت a می گوئیم. $(\sqrt[4]{4} = 2 \quad \sqrt[4]{4} \neq -2)$

* وقتی که n زوج و a مثبت باشد، عدد nام ریشه ی nام به صورت $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ دارد.

* وقتی که n فرد باشد، عدد فقط یک ریشه ی nام به صورت $\sqrt[n]{a}$ دارد.

* عدد منفی از رادیکال با فرجه ی فرد میاد بیرون. $(\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \Leftarrow n \text{ فرد})$

* اگر n زوج باشد: $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ (جواب رادیکال با فرجه ی زوج همواره نامنفی است)

* اگر n فرد باشد: $\sqrt[n]{x^n} = x$ (عدد زیر رادیکال و همچنین حاصل رادیکال می توانند منفی باشند)

* در ضرب (x) و تقسیم (\div) رادیکال ها با فرجه ی یکسان می توانیم آن ها را زیر یک رادیکال ببریم.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad , \quad \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

(اگر n زوج باشد $\Leftarrow a, b \geq 0$ هستند.)

* یادمان باشد که نشانه ی بالا برای جمع (+) و تفریق (-) برقرار نیست.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

مثال $\rightarrow \sqrt{14} + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$
 $\sqrt{14+4} = \sqrt{18} \neq 6$

* $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

* اگر یک عدد در رادیکال ضرب شده باشد می تواند به توان فرجه برسد و به داخل رادیکال برود.

مثال $\rightarrow 2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4 \times 2^3} = \sqrt[3]{32}$

Subject :

Date:

section:



تمرین پای تخته ۷:

تا حد امکان ساده کنید. (عبارت ها تعریف شده اند)

الف) $\sqrt{20}$

ب) $\sqrt{18a^2}$

ج) $\sqrt[3]{a^6 b^3 c^9}$

د) $\sqrt{(5-3\sqrt{3})^2}$

ه) $\sqrt{48} \times \sqrt{12}$

و) $\sqrt[3]{90} \times \sqrt[3]{200}$

ز) $\sqrt[5]{-27} \times \sqrt[5]{-243}$

ح) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} + \sqrt[5]{(2-\sqrt{2})^5}$

ب) $\sqrt[9]{\left(\frac{27}{a^4}\right)^3}$

ی) $\sqrt[5]{\frac{32}{a^4}} \div \sqrt[5]{\frac{4}{a}}$



تمرین پای تخته ۸:

در هر قسمت علامت اعداد غیر صفر a, b, c را مشخص کنید.

الف) $\sqrt[4]{ba^10c^1} = -ac^4 \sqrt[4]{ba^2}$

ب) $\sqrt[4]{\frac{-b^{13}c^4}{a^4}} = \frac{b^2c}{a} \sqrt[4]{-\frac{b}{a}}$

درس سوم: توان های گویا

* برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

مثال: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}$

* فرض کنیم a یک عدد مثبت و اعداد n و m طبیعی باشند به طوری که $\frac{m}{n}$ عددی غیر صحیح شود:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

مثال: $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{25^2}$

تذکره! هرگاه a عددی منفی باشد:

الف) اگر $\frac{m}{n}$ عددی غیر صحیح شود $\leftarrow a^{\frac{m}{n}}$ تعریف نشده

ب) اگر $\frac{m}{n}$ عددی صحیح شود $\leftarrow a^{\frac{m}{n}}$ تعریف شده

مثال: $(-3)^{\frac{4}{5}}$ تعریف نشده \rightarrow , $(-3)^{\frac{4}{2}} = (-3)^2 = 9$

Subject :

Date:

section:

* توان های منفی گویا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

مثال:

$$3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

* قوانینی که برای توان های صحیح داشتیم برای توان های گویا نیز داریم:

۱) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

۲) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

۳) $(a^m)^n = a^{mn}$

۴) $(ab)^m = a^m \times b^m$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

مثال:

$$\sqrt[5]{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{2}$$

$$2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{2^2} = \sqrt[6]{2}$$

* اگر $a > 0$ باشد می توانیم توان و فرجه را در یک عدد طبیعی مثل k ضرب کنیم:

$$\sqrt[n]{a^m} = k^n \sqrt[kn]{a^{km}}$$

مثال:

$$\sqrt{5} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[12]{5^6}, \quad \sqrt{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[18]{5^6}$$



تمرین پای تخته ۹:

عبارت های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{\frac{14}{5}}$

ب) $11^{-\frac{1}{2}}$

ج) $100^{-\frac{3}{4}}$

د) $\sqrt[4]{\sqrt{2} \sqrt{3}}$

ه) $\sqrt[5]{3} \sqrt{2}$

و) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{8}$

ز) $\sqrt[5]{25} \times 125^{-\frac{2}{5}}$

ح) $\sqrt{\sqrt{11}}$

ط) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt[4]{7-\sqrt{3}}$



تمرین پای تخته ۱۰:

معادله ی زیر را حل کنید. (۶۰×)

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{3}$$

درس چهارم: عبارات های جبری

این بخش را به دو قسمت اتحادها و تجزیه - عبارات های گویا تقسیم می کنیم.

الف) اتحادها و تجزیه:

۱) اتحاد مربع دو جمله ای

مجموع	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
تفاضل	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

۲) اتحاد مربع سه جمله ای $\rightarrow (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

۳) اتحاد مزدوج $\rightarrow (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

۴) اتحاد جمله ی مشترک $\rightarrow (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

۵) اتحاد ملتبع دو جمله ای

مجموع	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
تفاضل	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

۶) اتحاد چاق و لاغر

	$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
	$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$



تمرین پای نقشه ۱۱:

حاصل عبارات های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف) $(2x+3)^2$

ب) $(x^2 - 2y^3)^2$

ج) $(2\sqrt{2} - \sqrt{5})^2$

د) $(x - 2y + 1)^2$

ه) $(x - 2y)(x + 2y)$

و) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

ز) $(x-3)(x+5)$

ح) $(a^2 + b)(a^2 - 3b)$

ط) $(x-3)(x+3)(x^2+3)$

ث) $(x^2 - 1)^3$

ی) $(2x+3)^3$

ک) $(x-1)(x^2+x+1)$

ل) $(x+2y)(x^2+x+1)$

م) $(x^2-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

تجزیه:

به عمل تبدیل یک چند جمله‌ای به حاصل ضرب دو یا چند جمله‌ای تجزیه می‌گویند.

تجزیه عبارت‌های جبری می‌تواند به روش فاکتورگیری یا استفاده از اتحادها و یا رسم بندی مناسب انجام شود.



تمرین پای تخته ۱۲:

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $3x^2 + 12x$

ب) $x^2 - 9$

ج) $4x^2 - 11y^2$

د) $x^2 - 4x + 4$

ه) $x^2 - 5x - 4$

و) $x^2 + 4xy + 4y^2$

ی) $x^2 + 7x + 4$

ح) $x^2 - 5x^2 + 4$

ب) $x^3 - 4x^2y + 12xy^2 - 1y^3$

ط) $x^2 + 1$

ک) $18a^3 - 27$

ل) $2x^2 + 7x + 3$

م) $27x^3 - xy^3$

ن) $5x^2 - 7x + 2$

س) $x^3 + x^2 + x + 1$

ع) $3x^2 + x - 2$



تمرین پای تخته ۱۳:

به کمک اتحادها حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) 101^2

ب) $4^3 \times 2^7$



تمرین پای تخته ۱۴:

اگر $x + y = 6$ و $xy = 3$ باشند. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $x^2 + y^2$

ب) $x^3 + y^3$

ج) $x^4 + y^4$

د) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

ه) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$



تمرین پای تخته ۱۵:

اگر $x + \frac{1}{x} = 2$ باشد حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

ب) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

ب) عبارت های گویا:

به هر کسری که صورت و مخرج آن یک چند جمله ای باشد عبارت گویا می گوئیم.

یادآوری: در چند جمله ای توان متغیر فقط می تواند اعداد جابجی (۰، ۱، ۲، ۳، ...) باشد.

مثال: عبارت $\frac{3x-5}{x^2+2x-5}$ یک عبارت گویا است ولی عبارت $\frac{2x}{\sqrt{x}+3}$ عبارت گویا نیست.

← \sqrt{x} چند جمله ای نیست

* یک عبارت گویا برای مقادیری که مخرج آن صفر می شود تعریف نشده است.



تمرین پای تخمه ۱۶:

هر عبارت گویا به ازای چه مقادیری از x تعریف نمی شود؟

الف) $\frac{x+1}{2x-12}$

ب) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2x-1}$

ساده کردن عبارت های گویا:

ابتدا صورت و مخرج کسرها را تجزیه می کنیم و با حذف عامل های مشترک در صورت و مخرج کسرها ساده می کنیم.



تمرین پای تخمه ۱۷:

عبارت های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^3+1}{x^2+4x+5}$

ب) $\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$

ضرب و تقسیم عبارت های گویا:

ابتدا هر یک از عبارت های گویا را ساده می کنیم و سپس از قوانین ضرب و تقسیم کسرها استفاده می کنیم:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$(b, d \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$(b, c, d \neq 0)$$



تمرین پای تخمه ۱۸:

حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{x^2+x}{x-1} \div \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

جمع و تفریق عبارت های گویا:

ابتدا مخرج مشترک گرفته و سپس ساده می کنیم. برای این کار ابتدا مخرج ها را تجزیه کرده و عبارتی که از نظر درجه و ضرب عامل ها کوچکتر است و مضرب همه کس مخرج ها می باشد را به عنوان مخرج مشترک در نظر میگیریم.

Subject :

Date:

section:



تمرین پای تخته ۱۹:

حاصل عبارت زیر را بیابید.

الف) $\frac{1}{x+3} + \frac{4}{x^2-9}$ ب) $\frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2+3x-10}$

گویا کردن مخرج کرها:

هدف از گویا کردن مخرج کرها این است که در مخرج کسر عبارت های اعدادی نداشته باشیم.

با ضرب کردن صورت و مخرج کسر در عبارت های مناسب اعدادی های مخرج را از بین می بریم.



تمرین پای تخته ۲۰:

مخرج کرها را بیابید.

الف) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ ب) $\frac{x}{\sqrt{\sqrt{x}}}$

ج) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ د) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$



تمرین پای تخته ۲۱:

حاصل عبارت زیر را بیابید.

$A = \frac{\sqrt{4}}{5-2\sqrt{4}} - \sqrt{50}$



تمرین پای تخته ۲۲:

اگر $x = 3 + \sqrt{2}$ باشد، حاصل عبارت x^2 را بیابید.