تابع خطی «درجه اول» : تابع های با ضابطه ی «قانون» $f(x) = ax+b$ یا «$y = ax+b$» که در آن a و b دو عدد هستند را تابع های خطی می نامند.

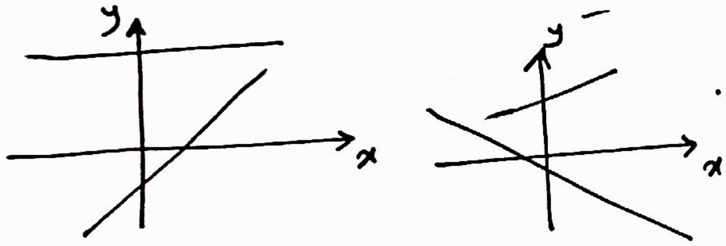
نکات تابع های خطی :

۱- بزرگترین درجه ی «توان» متغیر تابع «x» برابر ۱ می باشد. $y = ax^{1}+b$

۲- اگر ضابطه تابع خطی به فرم استاندارد «$y = ax+b$» باشد، در این صورت a را شیب خط تابع و b را عرض از مبدأ می نامند.

۳- دامنه این تابع می تواند $\mathbb{R}$ «تمام اعداد حقیقی» و یا هر زیر مجموعه ای از $\mathbb{R}$ «محدود شده» باشد.

۴- نمودار تابع به صورت خط راست می باشد.



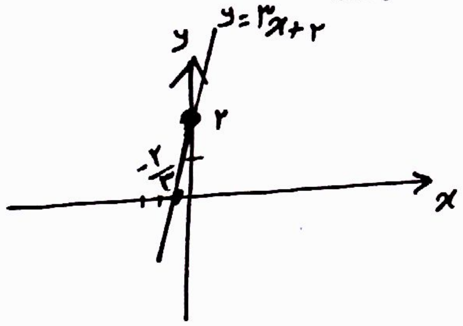
مثال ۱ : خط های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 3x + 2$ ؛ حل: $a = +3$ شیب خط ، $b = +2$ عرض از مبدا

x	y
۰	۲
$-\frac{2}{3}$	۰

$y = 3x+2 \xrightarrow{x=0} y = 3(0)+2 = 0+2 = \boxed{2}$

$y = 3x+2 \xrightarrow{y=0} 0 = 3x+2 \longrightarrow -3x = 2 \longrightarrow \boxed{x = \frac{-2}{3}}$

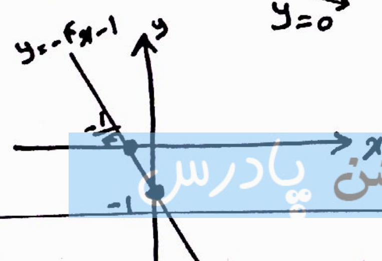


ب) $y = -4x - 1$ ؛ $a = -4$ ، $b = -1$

x	y
۰	-1
$-\frac{1}{4}$	۰

$y = -4x-1 \xrightarrow{x=0} \boxed{y = -4(0)-1 = 0-1 = -1}$

$y = -4x-1 \xrightarrow{y=0} 0 = -4x-1 \longrightarrow 4x = -1 \longrightarrow \boxed{x = \frac{-1}{4}}$

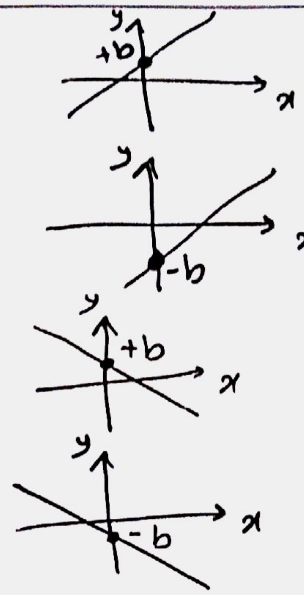


$y = ax + b$

فرم استاندارد تابع خطی

شیب خط مثبت $a > 0$: $b > 0$ ، $b < 0$

شیب خط منفی $a < 0$: $b > 0$ ، $b < 0$



تمرین ۱: شیب خط و عرض از مبدأ $y - \frac{1}{2}x + 3 = 0$ را بدست آورید و سپس خط را رسم کنید.

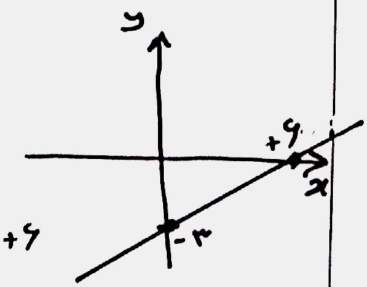
حل:

$y - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{فرم استاندارد}} y = \overset{a}{\frac{1}{2}}x \overset{b}{-3}$

x	y
0	-3
$+6$	0

$x = 0 \longrightarrow y = \frac{1}{2}(0) - 3 = -3$

$y = 0 \longrightarrow 0 = \frac{1}{2}x - 3 \longrightarrow -\frac{1}{2}x = -3 \longrightarrow x = \frac{-3}{-\frac{1}{2}} = +6$



تمرین منزل ۲: الف) دو خط $y = 2x - 1$ و $y = \frac{1}{2}x - 1$ را رسم کنید.

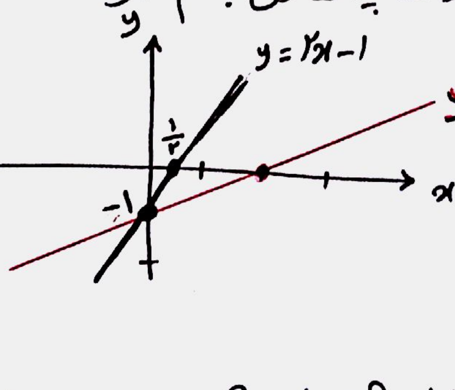
ب) این دو خط چه تفاوتی با هم دارند.

$y = \overset{a_1}{2}x \overset{b_1}{-1}$

x	y
0	-1
$\frac{1}{2}$	0

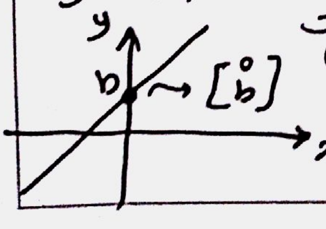
$y = \overset{a_2}{\frac{1}{2}}x \overset{b_2}{-1}$

x	y
0	-1
2	0



هر چقدر شیب خط بیشتر باشد ($a_1 > a_2$) خط مورد نظر به محور yها نزدیکتر است (ایستاتر است)

عرض از مبدأ (b): عرض از مبدأ نقطه‌ای به مختصات $\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}$ یا (0 و b) روی خط $y = ax + b$ می‌باشد که b فاصله این خط از محل برخورد با محور عرض‌ها تا مبدا مختصات می‌باشد.



تمرین منزل ۳: خط $y=2x-1$ را رسم کنید سپس با استفاده انتقال خط های $y=2x$ و $y=2x+1$ و $y=2x-4$ را رسم کنید.

حل: $y=2x-1$ → $a=2$ ، $\boxed{b=-1}$

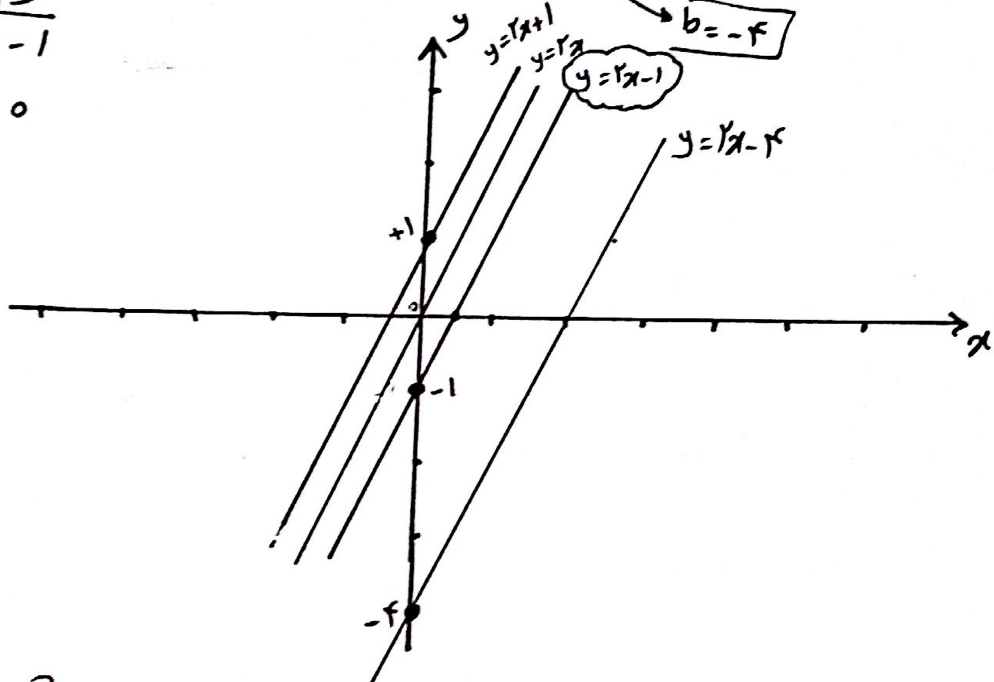
x	y
0	-1
$\frac{1}{2}$	0

$y=2x$ → $a=2$ ، $\boxed{b=0}$

$y=2x+1$ → $a=2$ ، $\boxed{b=1}$

$y=2x-4$ → $a=2$ ، $\boxed{b=-4}$

شیب هر ۴ خط برابر باشد تفاوت در عرض از مبدا می باشد.



ابتدا خط $y=2x-1$ را با استفاده از نقطه یابی بدست می آوریم، چون تمامی خط ها شیب شان برابری باشد ($a=2$) خط های دیگر را به موازات خط $y=2x-1$ را رسم می کنیم با این تفاوت که عرض از مبدأ ها را روی محور yها را پیدا کرده سپس با استفاده از درس انتقال جا به جا می کنیم و خط های مورد نظر را رسم می کنیم.

((توجه داشته باشید که باید اندازه ها دقیق باشد و خط ها باهم موازی باشند))

باید دقت شود که در ضابطه ی تابع $f(x)=ax+b$ « $y=ax+b$ » ، x را متغیر تابع و $f(x)$ یا y را مقدار تابع می نامند.

مثال ۲: در ضابطه های (قانون های) زیر متغیر تابع و مقدار تابع را مشخص کنید.

الف) $f(t)=2t+1$ ⟵ حل: مقدار تابع $f(t)$ و متغیر تابع t

ب) $g(z)=-5z-1$ ⟵ حل: مقدار تابع $g(z)$ و متغیر تابع z

تمرین عملی ۴ : در تابع های خطی $y = 4 - 2x$ و $y = 3x + 1$ شیب خط را با استفاده از جدول بیابید و سپس مفهوم آن را توضیح دهید.

حل:

$y = 4 - 2x \longrightarrow y = -2x + 4 \longrightarrow \boxed{a = -2}\,,\ b = +4$ شیب خط از روی ضابطه تابع

x متغیر تابع	0	1	2	3	4
y مقدار تابع	4	2	0	-2	-4

$x: \ 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4$

$y: \ (-2)\ (-2)\ (-2)\ (-2) \Longrightarrow \boxed{a = -2}$

یعنی به ازای هر یک واحد افزایش متغیر تابع «x» مقدار تابع «y» به اندازه ۲ واحد کاهش می یابد

$y = 3x + 1 \longrightarrow \boxed{a = 3}\,,\ b = +1$ شیب خط از روی ضابطه تابع

x	0	1	2	3	4
y	1	4	7	10	13

$x: \ 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4$

$y: \ (+3)\ (+3)\ (+3)\ (+3) \Longrightarrow \boxed{a = +3}$

یعنی به ازای هر یک واحد افزایش متغیر تابع «x» مقدار تابع «y» به اندازه ۳ واحد افزایش می یابد

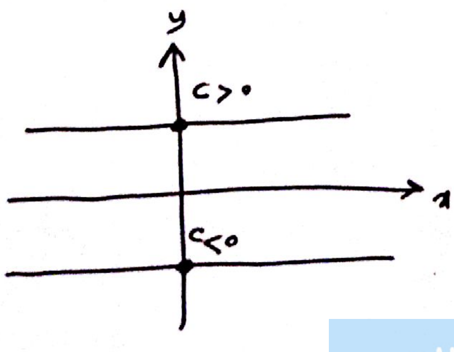
✓ چون تابع خطی است، لذا مقدار تابع (y یا $f(x)$) افزایش یا کاهش می یابد و یک عدد ثابت (a) است

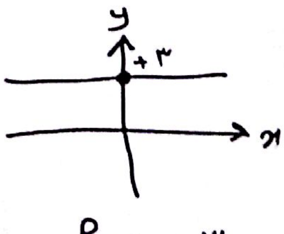
تابع ثابت : تابعی را که به ازای تمام مقادیر متغیر (تغییر x) مقدار تابع ثابت است را تابع ثابت می نامند.

$f(x) = ax + b \xrightarrow{\boxed{a=0}} f(x) = 0(x) + b = b \Longrightarrow \boxed{f(x) = c} \rightarrow$ عدد ثابت

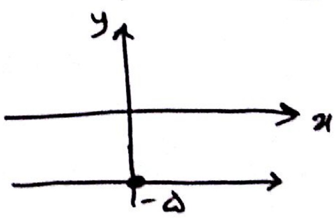
فرم استاندارد خطی

✓ دامنه تابع ثابت برابر $\mathbb{R}$ می باشد.





$f(x) = +3$



$y = -5$

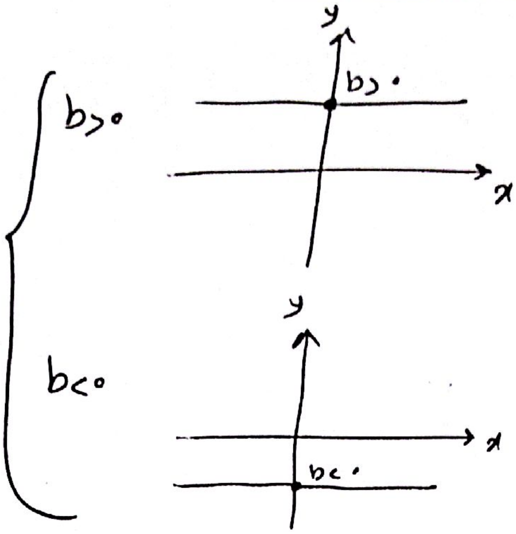
$y = ax + b$

$a > 0$ لغو شد

$a < 0$ لغو شد

$\boxed{a = 0} \Rightarrow$

شیب خط برابر صفر در تابع ثابت.



b و c یک مفهوم هستند و فرقی نمی کنند در کتاب های ریاضی تابع ثابت را با $\boxed{f(x) = c}$ نشان می دهند، لذا تفاوتی بین b و c وجود ندارد.

★تمرین ۵: (الف) قانون یک تابع خطی f را بنویسید که از مبدا مختصات و نقطه $(۲ , ۳)$ می گذرد.

ب) سپس مقدار $f(۵)$ را محاسبه کنید.

مثال ۳: (الف) تابع خطی $f(x) = -۲x + ۱$ را با دامنه $[-۱ , ۳]$ را در نظر بگیرید و آن را رسم کنید.

ب) مقدار $f(۴)$ را روی نمودار بدست آورید.

تابع های درجه دوم: توابعی که قانون آن ها به فرم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشد که در آن a و b و c اعداد حقیقی اند و $\boxed{a\neq 0}$ باشد، تابع درجه دوم می نامند.

نکات:

۱- بزرگترین توان x باید ۲ باشد.

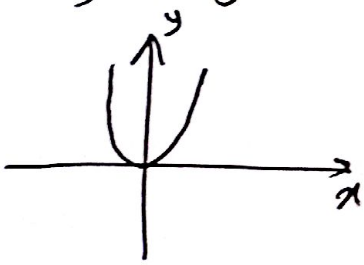
$y=-x^2-3x+2$ ← $b=-3$ ، $a=-1$ ، $c=+2$

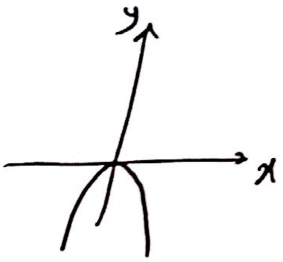
$y=5x^2-1$ ← $b=0$ ، $a=5$ ، $c=-1$

$y=\frac{1}{3}x^2+2x+4$ ← $b=2$ ، $a=\frac{1}{3}$ ، $c=4$

۲- دامنه ی توابع درجه دوم $\mathbb{R}$ یا هر زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}$ می باشد.

۳- تابع های درجه دوم به صورت منحنی و متقارن می باشند و اصطلاحاً به آن ها سهمی می گویند.





مثال ۴: کدام گزینه بیانگر یک تابع درجه دوم است؟ چرا؟

الف) $y=\sqrt{x^4}$　　ب) $y=x$　　پ) $y=x^3$　　ت) $y=\frac{1}{3}x^2$

حل:

مثال ۵: آیا $y=x^2$ و $y=-x^2$ درجه دوم می باشند؟ a و b و c را مشخص کنید؟

★ ⑥ تمرین عمومی : تابع های درجه دوم $y=x^2$ و $y=-x^2$ را رسم کنید.

حل:

$a=+1$
$b=0$
$c=0$

$y=x^2$

x	y
0	0
1	1
2	4
-1	+1
-2	+4

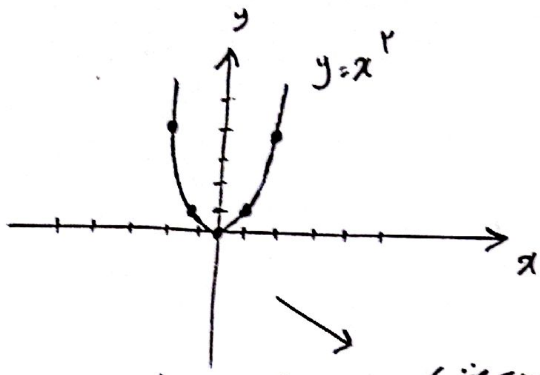
$x=0 \rightarrow y=(0)^2=0$

$x=1 \rightarrow y=(1)^2=1$

$x=2 \rightarrow y=(2)^2=4$

$x=-1 \rightarrow y=(-1)^2=+1$

$x=-2 \rightarrow y=(-2)^2=+4$



نمودار به صورت منحنی - سهمی می باشد و متقارن نیز است - دهانه ی سهمی به سمت بالا می باشد «∪».

$a=-1$
$b=0$
$c=0$

$y=-x^2$

x	y
0	0
+1	-1
+2	-4
-1	-1
-2	-4

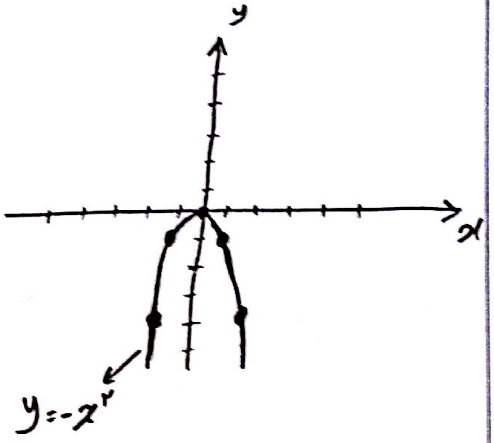
$x=0 \rightarrow y=-(0)^2=0$

$x=1 \rightarrow y=-(1)^2=-1$

$x=2 \rightarrow y=-(2)^2=-4$

$x=-1 \rightarrow y=-(-1)^2=-(+1)=-1$

$x=-2 \rightarrow y=-(-2)^2=-(+4)=-4$



نمودار به صورت سهمی می باشد و متقارن است - دهانه سهمی به سمت پایین می باشد «∩»

★ ✓ در تابع درجه دوم «$y=ax^2+bx+c$» ضریب x^2 یعنی a اگر مثبت باشد $(a>0)$ ← دهانه به سمت بالا می باشد ∪
منفی باشد $(a<0)$ ← دهانه به سمت پایین ∩

✓ در تابع درجه دوم «$y=ax^2+bx+c$» ضریب x^2 یعنی a اگر a بزرگ باشد ← دهانه بسته تر ∪
اگر a کوچک باشد ← دهانه بازتر ∪

$y=2x^2$

$y=\frac{1}{2}x^2$

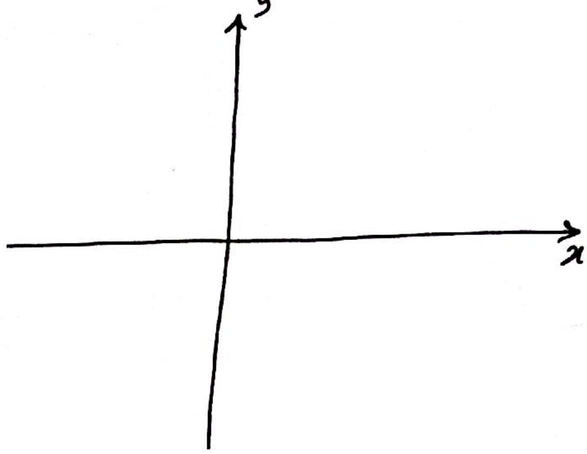
تمرین منزلی ۷ : تابع های درجه دوم $y=x^2+1$ و $y=x^2-2$ را رسم کنید و نتیجه را بیان کنید.

$a=1$
$b=0$
$\boxed{c=+1}$

$y=x^2+1 \longrightarrow$

$x=0$
$x=1$
$x=2$
$x=-1$
$x=-2$

x	y
0	
+1	
+2	
-1	
-2	

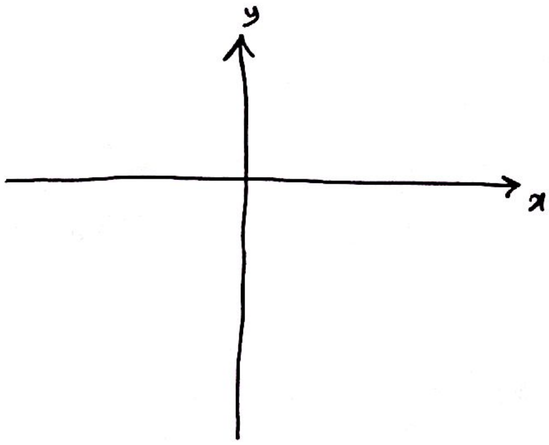


$a=1$
$b=0$
$\boxed{c=-2}$

$y=x^2-2 \longrightarrow$

$x=0$
$x=1$
$x=2$
$x=-1$
$x-2$

x	y
0	
+1	
+2	
-1	
-2	



نکته: در تابع درجه دوم $y=ax^2+c$ اگر عدد ثابت یعنی c ،
- مثبت باشد ($c>0$) ← به اندازه c بالا محور x های ...
- منفی باشد ($c<0$) ← به اندازه c پایین محور x های ...

یادآوری ریاضیات پایه :

اتحاد مربع دوجمله

$$\begin{cases}(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2\\ (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2\end{cases}$$

یعنی تابع های درجه دوم را به دو صورت می توان نوشت $(x+y)^2$ همان $x^2+2xy+y^2$ است و بالعکس.

---

⑤ قانون تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ را می توان به صورت $f(x)=k(x-q)^2+p$ هم نوشت و هیچ تفاوتی باهم نمی کنند.

مثال

$f(x)=(x-2)^2+3$

$f(x)=3(x+4)^2-3$

$f(x)=-4(x-5)^2+1$

$\vdots$

رسم تابع درجه دوم به کمک انتقال : برای رسم نمودار تابع درجه دوم $f(x)=k(x-q)^2+p$ به نکات زیر دقت می کنیم :

① اگر $k>0$ باشد ، دهانه منحنی به سمت بالا $\cup$ و اگر $k<0$ باشد دهانه منحنی به سمت پایین می باشد $\cap$ $k<0$

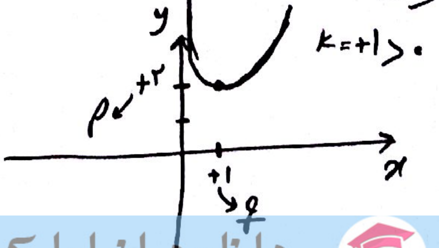
② اگر $p>0$ باشد ، p واحد به سمت بالا و اگر $p<0$ باشد ، p واحد به سمت پایین محور y ها انتقال می دهیم.

③ اگر $q>0$ باشد ، q واحد به سمت راست و اگر $q<0$ باشد ، q واحد به سمت چپ انتقال می دهیم.

مثال ⑥ : نمودارهای زیر را با استفاده از روش انتقال رسم کنید.

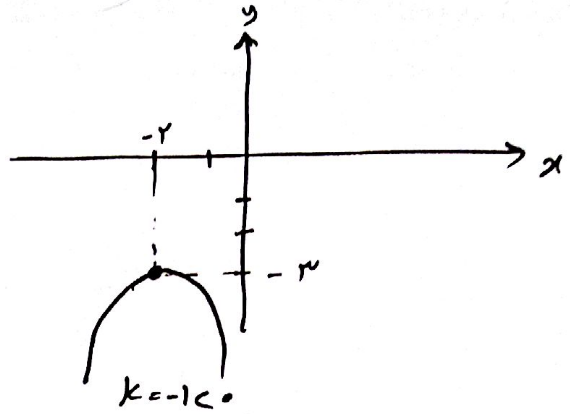
الف) $y=(x-1)^2+2$

حل : $\begin{cases}k=+1\\ q=+1\\ p=+2\end{cases}$



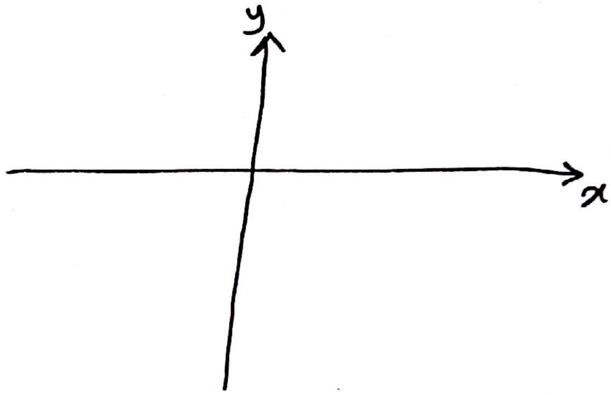
ب) $y = -(x+2)^2 - 3$

حل:
$$\begin{cases} k = -1 \\ q = -2 \\ p = -3 \end{cases}$$



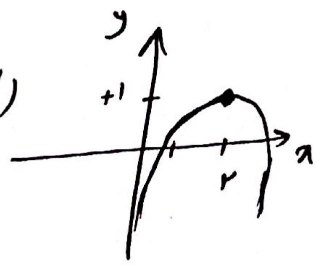
پ) $y = -(x-4)^2 + 1$

$$\begin{cases} k = \\ q = \\ p = \end{cases}$$

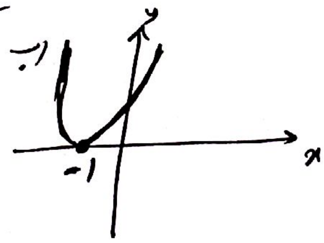


مثال ۲) نمودار تابع به صورت $y = k(x-q)^2 + p$ در حالت های مختلف به صورت زیر باشد. در هر حالت علامت k او مقادیر q و p را بیابید.

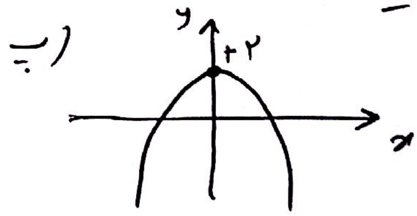
الف)



ب)



پ)



جمع بندی:

$$y = \pm k(x - q) \pm p$$

دهانه نمودار به سمت بالا

دهانه نمودار به سمت پایین

$q > 0$ نمودار به سمت راست می رود

$q < 0$ نمودار به سمت چپ می رود

p واحد بالا می رود

p واحد پایین می رود

یا

$$y = \pm a(x - b) \pm c$$

این فرمول هم ...