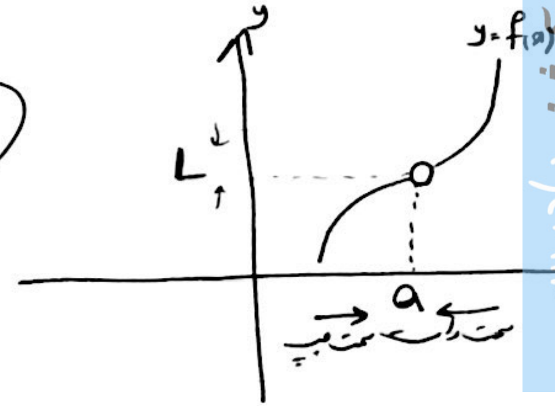
تعریف حد تابع :

حد تابع f وقتی متغیر x به عدد a میل می‌کند، برابر عدد L است درصورتی که بتوانیم $f(x)$ را هرچه بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آنکه x را به قدر کافی به عدد a نزدیک کرده باشیم

این مطلب را با نماد ریاضی به صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$



نکات مهم در تعریف حد :

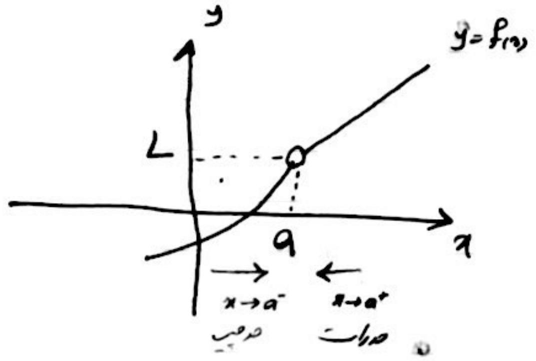
① تابع در $x=a$ درصورتی حد دارد که، حد راست و حد چپ تابع در $x=a$ موجود و برابر باشند.

حد راست $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

حد چپ $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

حد چپ = حد راست

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$



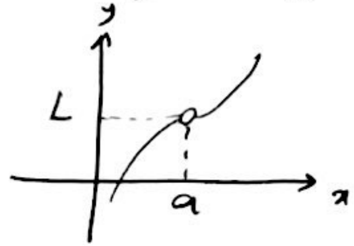
★

② وجود حد تابع f وقتی $x \to a$، به معین بودن یا نبودن تابع

در نقطه $x=a$ بستگی ندارد، لذا حالت های زیر قابل مشاهده است:

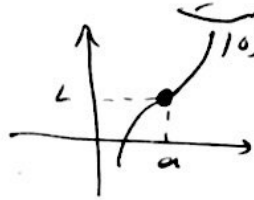
توریات: در نقطه یا توخالی فرقی در بودن نبودن حد ندارد

الف) تابع f، وقتی $x \to a$، حد دارد ولی f در a تعریف نشده است.



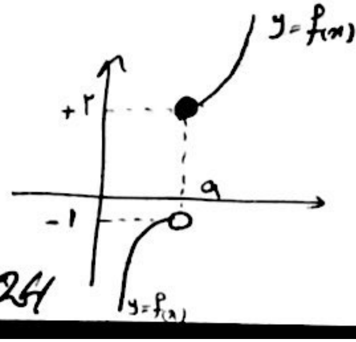
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ حد = حد راست = حد چپ

ب) تابع f، وقتی $x \to a$ حد دارد و f در a تعریف شده است.



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

پ) تابع f، وقتی $x \to a$ حد ندارد



$\lim\limits_{x \to a} f(x) =$ حد ندارد $\longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = 1 \end{cases}$ حد راست ≠ حد چپ

★

مثال: آیا حد تابع $f(x) = \begin{cases} x-3 & x<2 \\ 5 & x=2 \\ x+1 & x>2 \end{cases}$ در $x \to 2$ موجود است؟

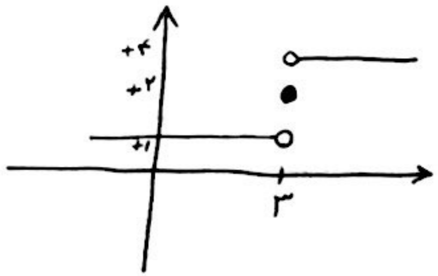
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x+1 = 2+1 = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x-3 = 2-3 = -1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

تابع در $x=2$ حد ندارد

مثال: آیا تابع $f(x)$ در $x \to +3$ حد دارد؟



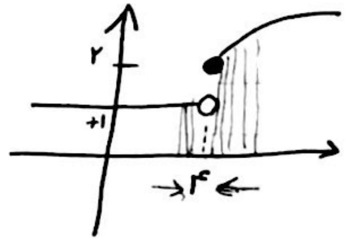
$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1$

حد چپ ≠ حد راست

تابع در $x=3$ حد ندارد

★ مثال: آیا تابع $f(x)$ ، $x \to +4$ حد دارد؟



$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +1$

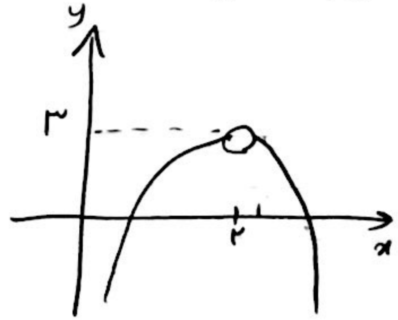
$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$

تابع در $x=4$ حد ندارد

یعنی

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$ حد ندارد

مثال: حد تابع $f(x)$ در $x=2$ را بدست آورید.



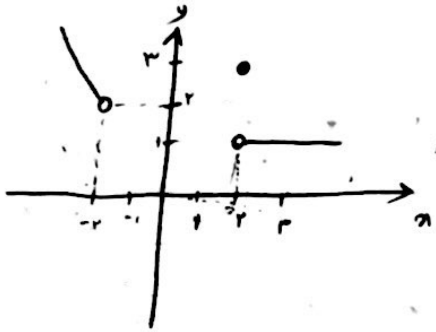
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$

حد چپ = حد راست

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

★ مثال (یعنی ①): با توجه به نمودار تابع f حاصل $A = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) + \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) - 4 f(2)$ را بدست آورید.

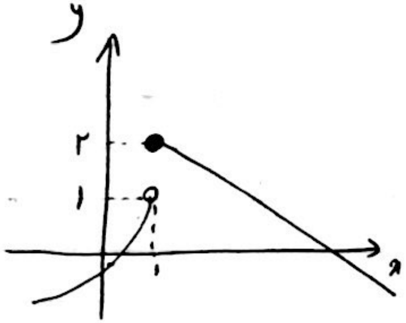


$A = +1 + 2 - 4(3)$

$A = 1 + 2 - 12$

$A = 3 - 12 = \boxed{-9}$

★ تمرین ②: با توجه به نمودار تابع f در شکل، حدهای زیر را بدست آورید.



الف) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

ب) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$

ج) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ حد ندارد

نهایی
تمرین ۳: تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & ; x>3 \\ mx+2 & ; x<3 \end{cases}$ تعریف شده است.
مقدار m را طوری بیابید که تابع در نقطه‌ی $x=3$ دارای حد باشد.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} x^2-2x = 3^2-2(3) = 9-6 = \boxed{3}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} mx+2 = m(3)+2 = 3m+2$$

حد چپ = حد راست

باید برابر باشند

$3m+2=3$

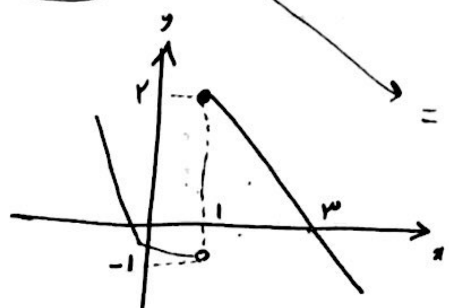
$3m=3-2$

$3m=1$

$\boxed{m=\frac{1}{3}}$

نهایی
تمرین ۴: با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim_{x\to 1^-} f(x) + \lim_{x\to 1^+} f(x) + f(3)$ را تعیین کنید.

$= -1+2+0 = \boxed{+1}$



۶۵

نهایی
تمرین ۵: نمودار تابع
(الف) $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x\le 1 \\ -2x+1 & ; x>1 \end{cases}$ را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار، وجود حد تابع f را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

پ) با استفاده از ضابطه هم بگویید در $x\to 1$ حد دارد یا نه؟

(پ) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -2x+1 = -2(1)+1 = -2+1 = \boxed{-1}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = \boxed{1}$

$1\neq -1$
حد چپ $\neq$ حد راست $\Rightarrow$ تابع در $x=1$ حد ندارد

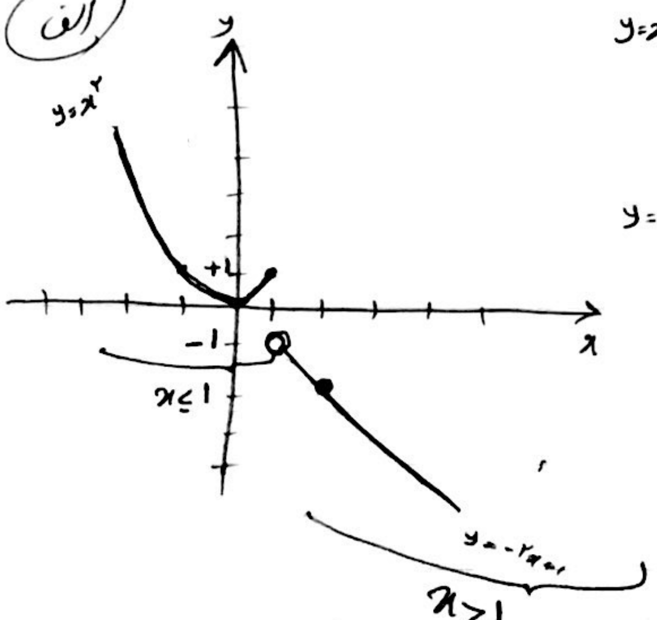
$y=x^2 \longrightarrow$

x	y
0	0
1	1
-1	+1

$y=-2x+1$

x	y
1	-1
2	-3

(الف)



$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +1$

حد چپ $\neq$ حد راست
حد ندارد

تمرین ۴: تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax+3 & ; x<2 \\ 4 & ; x=2 \\ 7-ax & ; x>2 \end{cases}$ داده شده است

$a=?$

مقدار a را چنان بیابید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) - f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} ax+3 = a(2)+3 = \boxed{2a+3}$$

$$f(2) = \boxed{4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 7-ax = 7-a(2) = \boxed{7-2a}$$

$$2a+\cancel{3-4}^{-1} = 7-2a$$

$$2a+2a = 7+1$$

$$4a = 8$$

$$a = \frac{8}{4} = \boxed{2}$$

تمرین ۷: آیا تابع $f(x)=\begin{cases} 5+x-x^2 & ; x\le 2 \\ x-3 & ; x>2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ حد دارد؟ چرا؟

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x-3 = 2-3 = -1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 5+x-x^2 = 5+2-2^2 = 5+2-4 = 7-4 = 3$$

حد چپ ≠ حد راست

$\lim_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۹۲ ۸: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} a-x^2 & ; x>1 \\ x^2+3 & ; x<1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ دارای حد باشد مقدار a را بدست آورید.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} a-x^2 = a-1^2 = \boxed{a-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2+3 = 1^2+3 = 1+3 = \boxed{4}$$

حد دارد

حد راست = حد چپ

$$a-1=4$$

$$a=4+1$$

$$\boxed{a=5}$$

تمرین ۹: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x-2 & x\le 1 \\ \sqrt{-1+x^2} & x>1 \end{cases}$ باشد، مقدار a را در رابطه‌ی زیر بدست آورید:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^-} f(x) = \underbrace{3a\,f(1)}_{3\times a\times f(1)}$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \sqrt{-1+1^2} = \sqrt{0} = 0$

$f(1) = 1-2 = -1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1-2 = -1$

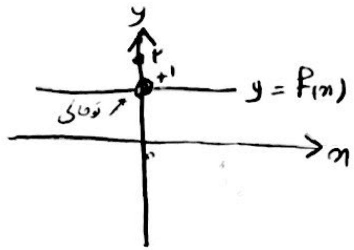
$0 + (-1) = 3a(-1)$

$-1 = -3a$

$1 = 3a$

$\boxed{a = \frac{1}{3}}$

تمرین ۱۰: با توجه به شکل زیر حاصل عبارت $A = \lim_{x\to 0^-} f(x) + 4f(0) + \lim_{x\to 0^+} f(x)$ را بدست آورید.



$A = +1 + 4(2) + 1$

$A = 1 + 8 + 1$

$\boxed{A = 10}$

$\boxed{a^0 = 1 \longrightarrow 2^0 = 1}$

حالت مبهم $(\frac{0}{0})$: اگر بخواهیم $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ را حساب کنیم با $\frac{0}{0}$ مواجه شویم

و به این حالت، حالت مبهم گوییم و باید رفع ابهام کنیم.

$\boxed{\text{عامل رفع ابهام} : x-a}$

روش‌های رفع ابهام $(\frac{0}{0})$:
۱- فاکتورگیری
۲- تجزیه با اتحادها
۳- قضیه هوپیتال

تمرین: حدهای زیر را حساب کنید.

فاکتورگیری

۱) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^3+2x} = \frac{0^2+0}{0^3+2(0)} = \frac{0}{0}$ مبهم

(عامل: $x-0=x$)

$\lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(x^2+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{0+1}{0^2+2} = \frac{1}{2}$

اتحاد مزدوج

۲) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{(x+2)^3} = \frac{(-2)^2-4}{(-2+2)^3} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0}$ مبهم

(عامل ابهام: $x-(-2)=\boxed{x+2}$)

$\lim_{x\to -2} \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{3}}} = \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{(x+2)^2} = \frac{-2-2}{(-2+2)^2} = \frac{-4}{0} = \boxed{-\infty}$

تمرین ۹: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x-2 & x\leq 1 \\ \sqrt{-1+x^2} & x>1 \end{cases}$ باشد، مقدار a را در رابطه‌ی زیر بدست آورید:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3a\, f(1)$$

$3 \times a \times f(1)$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \sqrt{-1+1^2} = \sqrt{0} = 0$

$f(1) = 1-2 = -1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1-2 = -1$

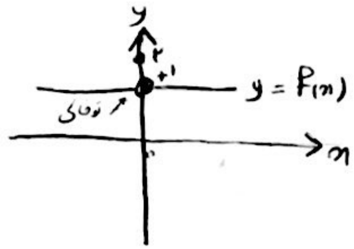
$$0 + (-1) = 3a(-1)$$

$$-1 = -3a$$

$$1 = 3a$$

$$\boxed{a = \frac{1}{3}}$$

تمرین ۱۰: با توجه به شکل زیر حاصل عبارت $A = \lim_{x\to 0^-} f(x) + 4f(0) + \lim_{x\to 0^+} f(x)$ را بدست آورید.



$$A = +1 + 4(2) + 1$$

$$A = 1 + 8 + 1$$

$$\boxed{A = 10}$$

$\boxed{a^0 = 1 \longrightarrow 2^0 = 1}$

حالت مبهم $\left(\frac{0}{0}\right)$: اگر بخواهیم $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ را حساب کنیم با $\frac{0}{0}$ مواجه شویم

$\boxed{x-a : \text{عامل رفع ابهام}}$

و به این حالت، حالت مبهم گوییم و باید رفع ابهام کنیم.

روش های رفع ابهام $\left(\frac{0}{0}\right)$:
۱- فاکتورگیری
۲- تجزیه عبارت ها
۳- قضیه هوپیتال

تمرین: حدهای زیر را حساب کنید.

فاکتورگیری

① $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^3+2x} = \frac{0^2+0}{0^3+2(0)} = \frac{0}{0}$ مبهم

$(x-0 = x : \text{عامل رفع ابهام})$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x^2+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{0+1}{0^2+2} = \frac{1}{2}$$

اتحاد مزدوج

② $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{(x+2)^3} = \frac{(-2)^2-4}{(-2+2)^3} = \frac{4-4}{0^3} = \frac{0}{0}$ مبهم

$x-(-2) = \boxed{x+2} : \text{عامل ابهام}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{3}\,2}} = \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{(x+2)^2} = \frac{-2-2}{(-2+2)^2} = \frac{-4}{0} = \boxed{-\infty}$$

اتحادها:

اتحاد مزدوج

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$x^2 - 4 = x^2 - (2)^2 = (x-2)(x+2)$

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

* $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$

$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$

اتحاد جمله مشترک

$$x^2 + (a+b)x + a \times b = (x+a)(x+b)$$

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

ج: $+3$
ض: $+2$

$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$

ج: -2
ض: -15

$9x^2 - 15x + 6 =$

$(3x)^2 - 5(3x) + 6 = (3x-3)(3x-2)$

ج: -5
ض: $+6$

اتحاد چاق و لاغر

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1^2) = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$x^3 + 1^3$

$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

$y^3 - 27 = y^3 - 3^3 = (y-3)(y^2 + 3y + 9)$

$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

(۷) $\dfrac{\text{عدد منفی}}{0} = -\infty$ $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0} = +\infty$

$\dfrac{-5}{0} = -\infty$ $\dfrac{\frac{1}{2}}{0} = +\infty$ $\dfrac{+8}{0} = +\infty$ $\dfrac{-7}{0} = -\infty$

(۱) حد تابعی $+\infty$ یا $-\infty$ یا 0 شود دیگر مبهم نیست. یکی $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم است.

اتحاد جمله مشترک

(۳) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} = \dfrac{1^2-2(1)+1}{1^2+1-2} = \dfrac{1-2+1}{1+1-2} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

ج -2، ض $+1$ ؛ ج $+1$، ض -2

$\boxed{x-1}$ = عامل ابهام

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{1-1}{1+2} = \dfrac{0}{3} = \boxed{0}$

اتحاد جمله مشترک

(۴) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} = \dfrac{2^2-5(2)+6}{2^2+2(2)-8} = \dfrac{4-10+6}{4+4-8} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

ج -5، ض $+6$ ؛ ج $+2$، ض -8

$\boxed{x-2}$ = عامل ابهام

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+4)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x+4} = \dfrac{2-3}{2+4} = \boxed{\dfrac{-1}{6}}$

(۵) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{x^2-9x+18} = \dfrac{3^2+3-12}{3^2-9(3)+18} = \dfrac{9+3-12}{9-27+18} = \dfrac{12-12}{27-27} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

ج $+1$، ض -12 ؛ ج -9، ض $+18$

$\boxed{x-3}$ = عامل ابهام

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+4)}{\cancel{(x-3)}(x-6)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+4}{x-6} = \dfrac{3+4}{3-6} = \boxed{\dfrac{7}{-3}}$

---

(۶) برای حل تجزیه، اتحادهای که ضریب x^2، یک نباشد از روش A می رویم.

سوال: عبارت $3x^2+5x-2$ را تجزیه کنید.

مرحله اول: فرض می کنم حاصل عبارت را A است.
$A = 3x^2+5x-2$

طرفین را در ضریب x^2 ضرب می کنم (یعنی ۳)
$3A = 9x^2+5(3x)-6$

مرحله دوم: عبارت را به صورت حاصل ضرب دو عبارت می نویسم شامل جمله مشترک $3x$
$3A = (3x \quad)(3x \quad)$

مرحله سوم: ج $+5$، ض -6
$3A = (3x+6)(3x-1)$

مرحله چهارم: طرفین را بر ضریب A تقسیم می کنیم.
$A = \dfrac{\cancel{3}(x+2)(3x-1)}{\cancel{3}}$

$A = (x+2)(3x-1)$

تمرین: تجزیه کنید.

الف) $2x^2-5x+2=0$

$A=2x^2-5x+2$

$2A=4x^2-5(2x)+4$ ج: -5 ض: $+4$

$2A=(2x-4)(2x-1)$

$A=\frac{\cancel{2}(x-2)(2x-1)}{\cancel{2}}=(x-2)(2x-1)$

ب) $2x^2-13x+18=0$

$A=2x^2-13x+18$

$2A=4x^2-13(2x)+36 \rightarrow$ ج: -13 ض: $+36$

$2A=(2x-9)(2x-4)$

$A=\frac{(2x-9)\cancel{2}(x-2)}{\cancel{2}}=(2x-9)(x-2)$

پ) $7x^2-4x-3=0$

$A=7x^2-4x-3$

$7A=49x^2-4(7x)-21$ ج: -4 ض: -21

$7A=(7x-7)(7x+3)$

$A=\frac{\cancel{7}(x-1)(7x+3)}{\cancel{7}}=(x-1)(7x+3)$

یک عامل از هر دو

(۵) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}=\frac{2^2+3(2)-10}{3(2)^2-5(2)-2}=\frac{4+6-10}{12-10-2}=\frac{0}{0}$ ع

(عامل ابهام: $\boxed{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-2})(x+5)}{(\cancel{x-2})(3x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+5}{3x+1}$

$=\frac{2+5}{3(2)+1}=\frac{7}{7}=1$

صورت: $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$ ج: $+3$ ض: -10

مخرج: $3x^2-5x-2=0$

$A=3x^2-5x-2$

$3A=9x^2-5(3x)-6$ ج: -5 ض: -6

$3A=(3x-6)(3x+1)$

$A=\frac{\cancel{3}(x-2)(3x+1)}{\cancel{3}}=(x-2)(3x+1)$

رفع ابهام

(۶) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-3x+1} = \frac{1^2-3(1)+2}{2(1)^2-3(1)+1} = \frac{1-3+2}{2-3+1} = \frac{0}{0}$

(عامل ابهام: $x-1$)

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(2x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{2x-1}$

$= \frac{1-2}{2(1)-1} = \frac{-1}{2-1} = \frac{-1}{1} = \boxed{-1}$

صورت
$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$
ج -3
ص $+2$

مخرج
$2x^2-3x+1=A$
$2A=4x^2-3(2x)+2 \rightarrow$ ج -3 ص $+2$
$2A=(2x-2)(2x-1)$
$A=\frac{\cancel{2}(x-1)(2x-1)}{\cancel{2}}$

(۷) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{7x^2-4x-3}{x^2-1} = \frac{7(1)^2-4(1)-3}{1^2-1} = \frac{7-4-3}{1-1} = \frac{0}{0}$

(عامل ابهام $= x-1$)

مخرج $x^2-1 = (x-1)(x+1)$

صورت $A = 7x^2-4x-3$

$7A =$

8) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2-x-3}{x+1} = \dfrac{2(-1)^2-(-1)-3}{-1+1} = \dfrac{2(1)+1-3}{0} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

(عامل صفرکننده: $x-(-1) = \boxed{x+1}$

$A = 2x^2-x-3$

$2A = 4x^2-1(2x)-6$

$2A = (2x-3)(2x+2)$

$A = \dfrac{(2x-3)\cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(2x-3)}{\cancel{(x+1)}}$

$= 2(-1)-3 = -2-3 = \boxed{-5}$

9) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9} = \dfrac{3^2-2(3)-3}{3^2-9} = \dfrac{9-6-3}{9-9} =$

(عامل صفرکننده: $\boxed{x-3}$

تجزیه $x^2-9 = (x-3)(x+3)$

صورت

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x+3}$

$= \dfrac{3+1}{3+3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

10) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10} = \dfrac{(-2)^2-4}{3(-2)^2+(-2)-10} = \dfrac{4-4}{12-12} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

عامل صفرکننده: $x-(-2) = \boxed{x+2}$

صورت $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

تجزیه $A = 3x^2+x-10$

$3A = 9x^2+1(3x)-30$

$3A = (3x+6)(3x-5)$

$A = \dfrac{\cancel{3}(x+2)(3x-5)}{\cancel{3}}$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(3x-5)}$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-2}{3x-5}$

$= \dfrac{-2-2}{3(-2)-5} = \dfrac{-4}{-6-5} = \dfrac{-4}{-11} = \dfrac{4}{11}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2(1)}{(1-1)^2} = \dfrac{-2}{0} = \boxed{-\infty}$

$(12)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+5x-6}{2x^2+x-3} = \dfrac{1^2+5(1)-6}{2(1)^2+1-3} = \dfrac{1+5-6}{2+1-3} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

عامل صفر: $\boxed{x-1}$

$x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$

$A: 2x^2+x-3$

$2A=4x^2+1(2x)-6$

$2A=(2x+3)(2x-2)$

$A=\dfrac{(2x+3)\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+6)}{(2x+3)\cancel{(x-1)}}$

$= \dfrac{1+6}{2(1)+3} = \boxed{\dfrac{7}{5}}$

$(13)\ \lim\limits_{x\to -2} (x^2+1)\sqrt{6+x} = (-2^2+1)\sqrt{6-2}$

$= (4+1)\sqrt{4} = 5\times 2 = 10$

$(14)\ \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4x} = \dfrac{4^2-5(4)+4}{4^2-4(4)} = \dfrac{16-20+4}{16-16} = \dfrac{0}{0}$

عامل صفر: $\boxed{x-4}$

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\cancel{(x-4)}(x-1)}{x\cancel{(x-4)}} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-1}{x}$

$= \dfrac{4-1}{4} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

$(15)\ \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-13x-10}{x^2-5x} = \dfrac{3(5)^2-13(5)-10}{5^2-5(5)} = \dfrac{3(25)-65-10}{25-25} = \dfrac{0}{0}$

عامل صفر: $\boxed{x-5}$

$A=3x^2-13x-10$

$3A=9x^2-13(3x)-30$ ضرب -30 جمع -13

$3A=(3x+2)(3x-15)$

$A=\dfrac{(3x+2)\cancel{3}(x-5)}{\cancel{3}}$

$\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{(3x+2)\cancel{(x-5)}}{x\cancel{(x-5)}}$

$= \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x+2}{x} = \dfrac{3(5)+2}{5} = \dfrac{15+2}{5}$

$= \boxed{\dfrac{17}{5}}$

(۱۶) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$

(۱۷) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+5x-6}{x^2-1} = \frac{3^2+5(3)-6}{3^2-1} = \frac{9+15-6}{9-1} = \boxed{\frac{9}{4}}$

(۱۸) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6} = \frac{2^2+3(2)-10}{2^2+2-6} = \frac{4+6-10}{4+2-6} = \frac{0}{0}$ مبهم

عامل $x-2$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+5}{x+3} = \frac{2+5}{2+3} = \boxed{\frac{7}{5}}$

(۱۹) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(1)^2-1}{(1)^2-3(1)+2} = \frac{0}{0}$ مبهم ابهام عامل: $\boxed{x-1}$

صورت: $(x+1)(x-1)$ ، مخرج: $(x-1)(x+3)$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+3)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{(x+3)} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} \,\Big|\, \frac{:2}{:2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

(۲۰) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{7x^2-4x-3}{x^2-1} = \frac{7(1)^2-4(1)-3}{(1)^2-1} = \frac{7-7}{1-1} = \frac{0}{0}$ ابهام عامل: $\boxed{x-1}$

صورت: $A = 7x^2-4x-3$

$7A = 49x^2-4(7x)-21$

$7A = (7x+3)(7x-7)$

$A = \frac{\cancel{7}(x-1)(7x+3)}{\cancel{7}} = (x-1)(7x+3)$

مخرج: $(x-1)(x+1)$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(7x+3)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{7x+3}{x+1} = \frac{7(1)+3}{1+1} = \frac{10}{2} = \boxed{5}$

مزدوج و چاق و لاغر

(۲۱) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^2-9} = \frac{(-3)^3+27}{(-3)^2-9} = \frac{-27+27}{9-9} = \frac{0}{0}$ ع

x^3+3^3

(عامل: $\boxed{x+3}$) $x\to -3$

$= \lim\limits_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x^2-3x+9)}{(x-3)\cancel{(x+3)}}$

$\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-3x+9}{x-3} = \frac{(-3)^2-3(-3)+9}{-3-3} = \frac{9+9+9}{-6} = \frac{27}{-6} = \boxed{\frac{-9}{2}}$

هم‌ارزی در حل حد:

① $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

② $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

③ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin mx}{x} = m$

④ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan mx}{x} = m$

اثبات:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{m \times \sin mx}{mx} = \lim\limits_{x \to 0} m \times \overset{1}{\dfrac{\sin mx}{mx}} = m \times 1 = \boxed{m}$

مثال: حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \pi x}{x} \overset{m=\pi}{\underset{③ \text{رابطه}}{=}} \pi$

ب) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{x} \overset{m=\frac{1}{2}}{=} \dfrac{1}{2}$

پ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan \frac{3x}{2}}{x} \overset{m=\frac{3}{2}}{=} \dfrac{3}{2}$

ت) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x \times \sin 5x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{x} \times \dfrac{\sin 5x}{x}$

$= 3 \times 5 = \boxed{15}$

ث) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{\sin x}{x}$

$= \dfrac{1}{3} \times 1 \times 1 = \dfrac{1}{3}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 12x \times \tan x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 12x}{x} \times \dfrac{\tan x}{x}$

$= 12 \times 1 = 12$

چ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\sqrt{2}x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\tan\sqrt{2}x}{x}$

$= \dfrac{1}{3} \times \sqrt{2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$

ح) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x + \sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} + \dfrac{\sin 5x}{x}$

$= 1 + 5 = \boxed{6}$

$\dfrac{x+y}{6} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{6}$

مخرج مشترک

خ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\tan^2 2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 3 \times \dfrac{\tan 2x}{x} \times \dfrac{\tan 2x}{x}$

$= 3 \times 2 \times 2 = 12$

تمرین: حدهای زیر را حل کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{\sin x}{x} = 1 \times 1 = 1$

۲) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\sqrt{5}x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sin\sqrt{5}x}{x} = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{5} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

۳) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x \times \sin 3x}{6x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{6} \times \dfrac{\tan 2x}{x} \times \dfrac{\sin 3x}{x} = \dfrac{1}{6} \times 2 \times 3 = 1$

۴) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x \times \sin 5x}{3x^2} = \lim \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sin 6x}{x} \times \dfrac{\sin 5x}{x} = \dfrac{1}{3} \times 6 \times 5 = 10$

۵) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x \times \sin x}{2x^2} = \lim \dfrac{1}{2} \dfrac{\sin 3x}{x} \times \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 1 = \dfrac{3}{2}$

۶) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2\tan(5-x)}{5x - x^2} = \lim\limits_{x\to 5} 2 \times \dfrac{\tan(5-x)}{x(5-x)} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2}{x} \times \overset{1}{\dfrac{\tan(5-x)}{(5-x)}}$

$= \dfrac{2}{5} \times 1 = \dfrac{2}{5}$

(7) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{5}\sin(3-x)}{3x-x^2} = \lim\limits_{x\to 3} \sqrt{5} \times \dfrac{\sin(3-x)}{x(3-x)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{5}}{x} \times 1 = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x \times \tan 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} \times \dfrac{\tan 3x}{x} = 2\times 3 = 6$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x \times \sin 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} \times \dfrac{\sin 3x}{x} = 1\times 3 = 3$

(10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + \tan 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} + \dfrac{\tan 3x}{x} = 2+3 = 5$

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - \sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} - \dfrac{\sin 5x}{x} = 2-5 = \boxed{-3}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\tan^2 4x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 3\times \dfrac{\tan 4x}{x} \times \dfrac{\tan 4x}{x} = 3\times 4\times 4 = \boxed{48}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x + \sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} + \dfrac{\sin 5x}{x} = 1+5 = \boxed{6}$

(14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 2x)\times(\tan x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} \times \dfrac{\tan x}{x} = 2\times 1 = \boxed{2}$

(15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x \times \tan 3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} \times \dfrac{\tan 3x}{x} = 2\times 3 = \boxed{6}$