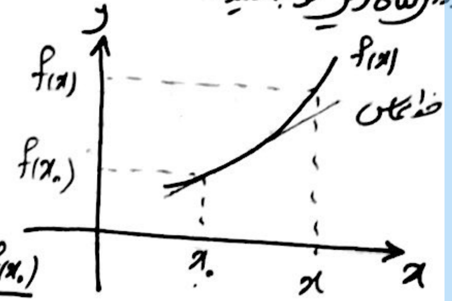
مشتق + کاربرد مشتق
۲/۵ نمره ۲/۵ نمره

مشتق:

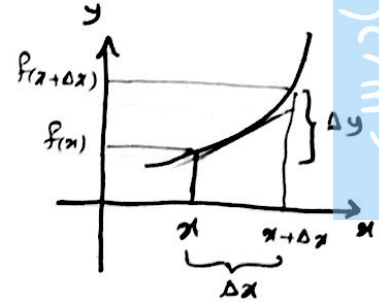
از سال های گذشته آموخته ایم که شیب خط مماس را چگونه بدست می آوردیم
شیب خط مماس همان مشتق می باشد. مشتق تابع $f(x)$ را با $f'(x)$ نشان می دهیم. (تابع y را با y' نشان میدیم.)

به نمودارهای زیر توجه کنید.



قدیم
$m_{\text{شیب خط}} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

شیب خط مماس: $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x+\Delta x - x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

تعریف مشتق:

برای محاسبه مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ از تعریف زیر استفاده می کنیم.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال ①: مشتق تابع $f(x) = x$ ($y=x$) را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

منظور از $f(x+\Delta x)$ این است که در تابع $f(x)$ هرجا x دیدیم به جایش $x+\Delta x$ قرار دهیم.

$f(x) = x$
$f(x+\Delta x) = x+\Delta x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x}+\Delta x-\cancel{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = \boxed{1}$$

مثال ۲: مشتق تابع $f(x)=4x+3$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$\begin{cases} f(x)=4x+3 \\ f(x+\Delta x)=\underbrace{4(x+\Delta x)}+3=4x+4\Delta x+3 \end{cases}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{4x}+4\Delta x+\cancel{3}-\cancel{4x}-\cancel{3}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}4=\boxed{4}$$

٪۱۰۰ حفظ شود

مثال ۳: مشتق تابع $f(x)=5-2x$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$\begin{cases} f(x)=5-2x \\ f(x+\Delta x)=5-\underbrace{2(x+\Delta x)}=5-2x-2\Delta x \end{cases}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5-2x-2\Delta x-(5-2x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{5}-\cancel{2x}-2\Delta x-\cancel{5}+\cancel{2x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}-2=-2$$

مثال ۴: مشتق $f(x)=7-3x$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$f(x)=7-3x$$

$$f(x+\Delta x)=7-\underbrace{3(x+\Delta x)}=7-3x-3\Delta x$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7-3x-3\Delta x-(7-3x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{7}-\cancel{3x}-3\Delta x-\cancel{7}+\cancel{3x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=-3$$

مثال ۵) مشتق تابع $f(x)=x^2$ را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$\begin{cases} f(x)=x^2 \\ f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2 = x^2+2x\Delta x+\Delta x^2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2x\Delta x+\Delta x^2-\cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

(حذف Δx)

$$=\lim_{\Delta x\to 0} 2x+\Delta x = 2x+0=\boxed{2x}$$

$\frac{\cancel{a}\times b}{\cancel{a}}=b$ اجازه داری ✓

$\frac{a+b}{a}\neq b$ اجازه نداری ✗

$\frac{a-b}{a}\neq b$ اجازه نداری ✗

مثال ۶) مشتق تابع $f(x)=3x^2+1$ را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+1 \\ f(x+\Delta x)=3(x+\Delta x)^2+1=3(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)+1 \\ f(x+\Delta x)=3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2+1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2+6x\Delta x+3\Delta x^2+1-(3x^2+1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{3x^2}+6x\Delta x+3\Delta x^2+\cancel{1}-\cancel{3x^2}-\cancel{1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6x\Delta x+3\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(6x+3\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}6x+3\Delta x=6x+3(0)=\boxed{6x}$$

مثال ۷: مشتق تابع $f(x)=5$ را بدست آورید.

$y=5$

$$\begin{cases} f(x)=5 \\ f(x+\Delta x)=5 \end{cases}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5-5}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=\boxed{0}$$

تمرین: مشتق توابع زیر را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

الف) $f(x)=-4x-5$

$$f(x+\Delta x)=-4(x+\Delta x)-5=-4x-4\Delta x-5$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4x-4\Delta x-5-(-4x-5)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{-4x}-4\Delta x\cancel{-5}\cancel{+4x}\cancel{+5}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=-4$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}-4=\boxed{-4}$$

ب) $f(x)=5x-1$

$$f(x+\Delta x)=5(x+\Delta x)-1=5x+5\Delta x-1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5x+5\Delta x-1-(5x-1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{5x}+5\Delta x\cancel{-1}\cancel{-5x}\cancel{+1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=5$$

پ) $f(x)=5x^2+3$

$$f(x+\Delta x)=5(x+\Delta x)^2+3=5(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)+3$$
$$=5x^2+10x\Delta x+5\Delta x^2+3$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{5x^2}+10x\Delta x+5\Delta x^2\cancel{+3}\cancel{-5x^2}\cancel{-3}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10x\Delta x+5\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(10x+5\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$=10x+5\Delta x=10x+5(0)$$
$$=\boxed{10x}$$

ت) $y = ۳x - ۷$

$f(x) = ۳x - ۷$

$f(x+\Delta x) = ۳(x+\Delta x) - ۷ = ۳x + ۳\Delta x - ۷$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\cancel{۳x} + ۳\Delta x \cancel{- ۷} \cancel{- ۳x} \cancel{+ ۷}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۳\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = ۳$$

ث) $f(x) = ۷x - ۱۰$

$f(x) = ۷x - ۱۰$

$f(x+\Delta x) = ۷(x+\Delta x) - ۱۰ = ۷x + ۷\Delta x - ۱۰$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\cancel{۷x} + ۷\Delta x \cancel{- ۱۰} \cancel{- ۷x} \cancel{+ ۱۰}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۷\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to ۰} ۷ = \boxed{۷}$$

ج) $f(x) = ۱ - ۲x$

$f(x+\Delta x) = ۱ - ۲(x+\Delta x) = ۱ - ۲x - ۲\Delta x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\cancel{۱} \cancel{- ۲x} - ۲\Delta x \cancel{- ۱} \cancel{+ ۲x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{-۲\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = -۲$$

چ) $y = x^۲$

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^۲ = x^۲ + ۲x\Delta x + \Delta x^۲$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\cancel{x^۲} + ۲x\Delta x + \Delta x^۲ \cancel{- x^۲}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{۲x\Delta x + \Delta x^۲}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\cancel{\Delta x}(۲x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to ۰} ۲x + \Delta x = ۲x + ۰ = ۲x$$

ب) $f(x)=x^2-1$

$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-1=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-1$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2x\Delta x+\Delta x^2\cancel{-1}\cancel{-x^2}\cancel{+1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(2x+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x=2x+0=2x$$

ج) $f(x)=5x+2$

$f(x+\Delta x)=5(x+\Delta x)+2=5x+5\Delta x+2$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{5x}+5\Delta x\cancel{+2}\cancel{-5x}\cancel{-2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{5\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=5$$

د) $f(x)=7x^2+2$

$f(x+\Delta x)=7(x+\Delta x)^2+2=7(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)+2$
$=7x^2+14x\Delta x+7\Delta x^2+2$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\frac{7x^2+14x\Delta x+7\Delta x^2+2}{}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{7x^2}+14x\Delta x+7\Delta x^2\cancel{+2}\cancel{-7x^2}\cancel{-2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(14x+7\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}14x+7\Delta x$$

$=14x+0=14x$

راه حل دوم درس ۳ درست است

تمرین: مشتق تابع با ضابطه $y = x^2 + 5$ را در نقطهٔ $x = 1$ با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

$f(x) = x^2 + 5$

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 5 = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 5$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 \cancel{+5} \cancel{-x^2} \cancel{-5}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x \xrightarrow{x=1}$$

$$f'(1) = 2(1) = 2$$

راه حل دوم درس ۳ درست است

تمرین: مشتق تابع $f(x) = 3x - 1$ را در نقطهٔ $x = 2$ به دست آورید.

$f(x) = 3x - 1$

$f(x+\Delta x) = 3(x+\Delta x) - 1 = 3x + 3\Delta x - 1$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{3x} + 3\Delta x \cancel{-1} \cancel{-3x} \cancel{+1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 3 \longrightarrow f'(2) = 3$$

✓ قضیه‌ها و فرمول‌های مشتق تابع‌ها دقیقاً از تعریف مشتق گرفته شده‌اند لذا حفظ کردن این فرمول‌ها مانند یادگیری تعریف مشتق الزامی می‌باشد.

فرمول ۱: $f(x) = a \longrightarrow f'(x) = 0$

به طریق دیگر: $y = a \longrightarrow y' = 0$

توضیح: مشتق هر عدد ثابتی برابر صفر است.

مثال: $f(x) = 5 \longrightarrow f'(x) = 0$

$y = \sqrt{2} \longrightarrow y' = 0$

$y = -\frac{5}{2} \longrightarrow y' = 0$

فرمول ۲

$$f(x)=ax+b \Longrightarrow f'(x)=a$$

$$y=ax+b \Longrightarrow y'=a$$

توضیح: مشتق تابع درجه اول $ax+b$، همان ضریب x یعنی a می باشد. b که عدد ثابت است، مشتق آن صفر است.

مثال:

$f(x)=2x+6 \longrightarrow f'(x)=2$

$y=5x-2 \longrightarrow y'=5$

$y=3-7x \longrightarrow y'=-7$

فرمول ۳

$$y=ax^n \Longrightarrow y'=n\times a\times x^{n-1}$$

توضیح: برای محاسبه مشتق ax^n ابتدا توان x یعنی n را در a ضرب می کنیم سپس از توان x یک واحد کم می کنیم و آن را در $n\times a$ ضرب می کنیم

$y=8x^5 \longrightarrow y'=5\times 8\times x^{5-1}=\boxed{40x^4}$

$y=x^2 \longrightarrow y'=2\times 1\times x^{2-1}=\boxed{2x}$

$y=-3x^4 \longrightarrow y'=4\times -3\times x^{4-1}=\boxed{-12x^3}$

$y=2x^{-3} \longrightarrow y'=-3\times 2\times x^{-3-1}=\boxed{-6x^{-4}}$

فرمول ۴

$$y=\underset{\text{تابع}}{u}\pm\underset{\text{تابع}}{v} \Longrightarrow y'=u'\pm v'$$

مشتق تابع اول ± مشتق تابع دوم

مثال:

$y=\overset{u}{5x^3}+\overset{v}{4x^2} \longrightarrow y'=(\overset{u'}{3\times 5\times x^2})+(\overset{v'}{2\times 4\times x})=\boxed{15x^2+8x}$

$y=\overset{u}{7x^2}-\overset{v}{6x} \longrightarrow y'=(\overset{u'}{2\times 7\times x})-(\overset{v'}{6})=\boxed{14x-6}$

فرمول ۵

$$y=u\times v \longrightarrow y'=(u'\times v)+(u\times v')$$

$u.v$

(مشتق تابع اول × تابع دوم) + (تابع اول × مشتق تابع دوم)

مثال:

$y=(x^2+1)(2x^3-x^2+1) \Rightarrow y'=(2x)(2x^3-x^2+1)+(x^2+1)(6x^2-2x)$

$y=(x^2-3x)(x^3+2) \Rightarrow y'=(2x-3)(x^3+2)+(x^2-3x)(3x^2)$

u: عبارات

n = عدد ثابت

فرمول ۷ $y=u^n \longrightarrow y'=n\times u'\times u^{n-1}$

$y' =$ توان × مشتق u × u^{n-1}

$y=(x^4-3x^2+1)^4 \longrightarrow y'=\underbrace{4}_{n}\times\underbrace{(4x^3-6x)}_{u'}\times\underbrace{(x^4-3x^2+1)^3}_{u^{n-1}}$

$y=(2x-1)^5 \longrightarrow y'=5\times(2)\times(2x-1)^4$

$y=(5x^2+x^4-3x)^6 \longrightarrow y'=6\times(10x+4x^3-3)\times(5x^2+x^4-3x)^5$

فرمول ۸ $y=\frac{u}{v} \longrightarrow y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$y' = \frac{(\text{مشتق صورت}\times\text{مخرج})-(\text{مشتق مخرج}\times\text{صورت})}{(\text{مخرج})^2}$

$y=\frac{2x-5}{x^2+1} \longrightarrow y'=\frac{2(x^2+1)-(2x-5)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$y'=\frac{2x^2+2-4x^2+10x}{(x^2+1)^2}$

$y'=\frac{-2x^2+10x+2}{(x^2+1)^2}$

$y=\frac{2+3x+x^7}{x^5+x} \Rightarrow y'=\frac{(3+7x^6)(x^5+x)-(2+3x+x^7)(5x^4+1)}{(x^5+x)^2}$

فرمول ۸

* $y=\sqrt{u} \longrightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

مثال: $y=\sqrt{\underbrace{5x}_{u}} \longrightarrow y'=\frac{5}{2\sqrt{5x}}$

$y=\sqrt{\underbrace{x}_{u}} \longrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y=\sqrt{\underbrace{2x^2+x-2}_{u}} \longrightarrow y'=\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x-2}}$

فرمول ۹

* $y=\sqrt[m]{u^n} \longrightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

مثال: $y=\sqrt[\overset{m}{4}]{\underbrace{(x^2+x+5)}_{u}^{2 \to n}} \longrightarrow y'=\frac{2(2x+1)}{4\sqrt[4]{(x^2+x+5)^2}}$

$y=\sqrt[\overset{m}{5}]{\underbrace{(x^3+7x-2)}_{u}^{n=1}} \longrightarrow y'=\frac{1\times(3x^2+7)}{5\sqrt[5]{(x^3+7x-2)^4}}$

$y=\sqrt[\overset{m}{3}]{\underbrace{(4x+1)}_{u}^{2 \to n}} \longrightarrow y'=\frac{2\times(4)}{3\sqrt[3]{(4x+1)^1}}=\frac{8}{3\sqrt[3]{4x+1}}$

$y=\sqrt[\overset{m}{5}]{\underbrace{(2x-1)}_{u}^{2 \to n}} \longrightarrow y'=\frac{2(2)}{5\sqrt[5]{(2x-1)^3}}=\frac{4}{5\sqrt[5]{(2x-1)^3}}$

فرمول ۱۰

$y=\overset{\text{عدد ثابت}}{K} f(x) \longrightarrow y'=K f'(x)$

$y=\underbrace{6}_{K}x^2 \longrightarrow y'=6\times(2x)=12x$

$y=\frac{x^3}{3} \longrightarrow y'=\frac{1}{3}\times(3x^2)=x^2$

$y=\underbrace{\frac{1}{3}}_{K}x^3$

فرمول ۱۱

$$y=\sin u \longrightarrow y'=u'\cos u$$

مثال:

$y=\sin 3x \longrightarrow y'=3\cos 3x$

$y=\sin x^2 \longrightarrow y'=2x\cos x^2$

$y=\sin\sqrt{x} \longrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

فرمول ۱۲

$$y=\cos u \longrightarrow y'=-u'\sin u$$

$y=\cos\frac{1}{2}x \longrightarrow y'=-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x$

$f(x)=\cos(x^2+3x) \longrightarrow f'(x)=-(2x+3)\sin(x^2+3x)$

$y=\cos\sqrt{x} \longrightarrow y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$

فرمول ۱۳

$$y=\tan u \longrightarrow y'=u'(1+\tan^2 u)$$

مثال:

$y=\tan 3x \Longrightarrow y'=3(1+\tan^2 3x)$

$y=\tan\sqrt{x} \longrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\tan^2\sqrt{x})$

$y=\tan\frac{1}{x} \longrightarrow y'=(-\frac{1}{x^2})(1+\tan^2\frac{1}{x})$

$(\frac{1}{x})'=\frac{0-(1)(1)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$

فرمول ۱۴

$$y=\cot u \longrightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)$$

مثال: $y=\cot 5x \longrightarrow y'=-(5)(1+\cot^2 5x)$

$y=\cot(1-3x) \longrightarrow y'=-(-3)(1+\cot^2(1-3x))$

$y'=3(1+\cot^2(1-3x))$

خطی

توابع: رادیکالی (ریشه / توان)، مثلثاتی ($\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$)، کسری $\frac{u}{v}$، ضرب $u\times v$

تمرین: مشتق‌های زیر را با استفاده از فرمول‌های مشتق حل کنید.

الف) $y=5x^3-3x^2+1$ فرمول ۱، ۲ و ۳

$y'=15x^2-6x$

ب) $y=x(3x^4+x)$ فرمول ۵

$y=1(3x^4+x)+x(12x^3+1)$

* پ) $y=3\sin x\cdot\cos x$ مشتق + فرمول ۵ و فرمول ۱۰

$y=u\times v \longrightarrow y=u'v+uv'$

$y'=3[\cos x\times\cos x+\sin x(-\sin x)]=3(\cos^2 x-\sin^2 x)$

ت) $y=\sqrt{3x-1}$ فرمول ۸

$y'=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

ث) $y=\sqrt[5]{(x^2+x)^3}$ فرمول ۱

$y'=\frac{3(2x+1)}{5\sqrt[5]{(x^2+x)^2}}$

ج) $y=\frac{2\cos x}{\sin x+2}=2\left[\frac{\cos x}{\sin x+2}\right]$

$y'=2\left[\frac{-\sin x(\sin x+2)-\cos x(\cos x)}{(\sin x+2)^2}\right]=2\left[\frac{-\sin^2 x-2\sin x-\cos^2 x}{(\sin x+2)^2}\right]$

چ) $y=\tan 3x+\sin\sqrt{x}$

$y'=3(1+\tan^2 3x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

ح) $y=(x^3-2x+1)^7 \longrightarrow y'=7\times(3x^2-2)\times(x^3-2x+1)^6$

تمرین: مشتق های زیر را با استفاده از فرمول ها زیر به دست آورید

الف) $y=\sqrt{3x-1}$ $\qquad y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$y=\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$

ب) $y=(x^3-2x+1)^7$

$y'=7\times(3x^2-2)\times(x^3-2x+1)^6$

پ) $y=(3x-1)(x+2)$ $\qquad y'=u'v+uv'$

$y=(3)(x+2)+(3x-1)(1)$

$y=3x+6+3x-1=6x+5$

ت) $y=x\sqrt{x}$ $\qquad y'=u'v+uv'$

$y'=(1)\sqrt{x}+x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$y'=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}$

ث) $y=\cos x+x\sin x$

$y'=-\sin x+[(1)\sin x+x\cos x]$

$y'=\cancel{-\sin x}+\cancel{\sin x}+x\cos x=\boxed{x\cos x}$

ج) $y=\sqrt[5]{(2x-1)^2}$ $\qquad y'=\frac{n\times u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

$y'=\frac{2(2)}{5\sqrt[5]{(2x-1)^3}}=\frac{4}{5\sqrt[5]{(2x-1)^3}}$

چ) $y=\cos(x+\frac{\pi}{4})$ $\qquad y'=-u'\sin u$

$y'=-(1)\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\sin(x+\frac{\pi}{4})$

ح) $y=\sin(2x+1)-\cos 3x$

$y'=2\cos(2x+1)-[-3\sin 3x]$

$y'=2\cos(2x-1)+3\sin 3x$

((سوالات امتحان نهایی مشتق از سال ۹۵ تا ۹۰))

① مشتق توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = \sin 2x$ ($u = 2x$)

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f'(x) = u'\cos u$

ب) $g(x) = \left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}\right)^{4}$ ($u = 2x-1$, $v = \sqrt{x}$)

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$g'(x) = \dfrac{2(\sqrt{x}) - (2x-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sqrt{x})^2}$ =

پ) $h(x) = (x^3 - 2x + 1)^7$

$h'(x) = 7 \times (3x^2 - 2) \times (x^3 - 2x + 1)^6$

ت) $y = \cot 3x$ ($u = 3x$)

$y' = -u'(1 + \cot^2 u)$

$y' = -3(1 + \cot^2 3x)$

ج) $y = \dfrac{x + \cos x}{2 + \sin x}$ ($u = x + \cos x$, $v = 2 + \sin x$)

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$y' = \dfrac{(1 - \sin x)(2 + \sin x) - (x + \cos x)(\cos x)}{(2 + \sin x)^2}$

ب) $y=\dfrac{\overset{u}{\sin 3x}}{\underset{v}{x^5}}$ $\quad y'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$y'=\frac{3\cos 3x\,(x^5)-\sin 3x\,(5x^4)}{(x^5)^2}$$

ت) $y=\dfrac{\overset{u}{1+\cos(3x)}}{\underset{v}{4x^2-1}}$

$$y'=\frac{-3\sin 3x\,(4x^2-1)-(1+\cos 3x)(8x)}{(4x^2-1)^2}$$

ث) $y=\underset{u}{\sqrt[3]{x}}+\underset{v}{\cos 3x}$ $\quad y'=u'+v'$

$$y'=\frac{(1)(1)}{3\sqrt[3]{x^2}}+(-3\sin 3x)$$

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-3\sin 3x$$

208

ج) $f(x)=\dfrac{\overset{u}{x}}{\underset{v}{1-2x}}$

$$f'(x)=\frac{1(1-2x)-x(-2)}{(1-2x)^2}=\frac{1\cancel{-2x}+\cancel{2x}}{(1-2x)^2}=\frac{1}{(1-2x)^2}$$

ح) $g(x)=\sin 2x+x\cos x$

$$g'(x)=2\cos 2x+\left[(1)\cos x+x(-\sin x)\right]$$

$$g'(x)=2\cos 2x+\cos x-x\sin x$$

خ) $y=\underset{u}{x}+\underset{v}{\cos x}$ $\quad y'=u'+v'$

$$y'=1+(-\sin x)$$

$$y'=1-\sin x$$

د) $y=x^2+\cos 3x$

209 $\quad y'=2x-3\sin 3x$

خرداد ۹۵

د) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x+1}$

$f'(x)=\dfrac{-\sin x(x+1)-\cos x(1)}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{-x\sin x-\sin x-\cos x}{(x+1)^2}$

شهریور ۹۵

م) $y=(5x+2)^3$

$y'=3\times(5)\times(5x+2)^2$

$y'=15(5x+2)^2$

دی ماه ۹۵

ل) $y=\cos x+\sin\sqrt{x}$

$y'=-\sin x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

دی ماه ۹۵

ی) $y=\dfrac{5x-3}{\sin x}$

$y'=\dfrac{(5)(\sin x)-(5x-3)(\cos x)}{(\sin x)^2}$

$y'=\dfrac{5\sin x-5x\cos x+3\cos x}{(\sin x)^2}$

اواخر ۹۶

۲) مشتق توابع زیر را با استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری حساب کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{x^3+1}$

ب) $y=(-7x^2+3x)^4$

پ) $y=\cos 2x+\sin\sqrt[3]{x^4}$

ت) $y=\dfrac{6x-2}{\cos 2x}$

مشتق دوم تابع $f''(x)$ یا y'':

همان طور که مشتق یک تابع تعریف شد ما می توان مشتقِ مشتقِ یک تابع (مشتق دوم تابع) را نیز تعریف کرد.

مشتق تابع f را با f' و مشتق تابع f' را با f'' نمایش می‌دهیم.

$$\underset{\text{تابع}}{f(x)} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x)$$

$$y \xrightarrow{\text{مشتق}} y' \xrightarrow{\text{مشتق}} y''$$

مثال: مشتق دوم تابع های زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=4x^3-x^2+2 \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x)=12x^2-2x$

(مشتق دوم $f''(x)=24x-2$

ب) $f(x)=\sin x \xrightarrow{\text{مشتق اول}} f'(x)=+\cos x$

(مشتق دوم $f''(x)=-\sin x$

پ) $y=\cos x \longrightarrow y'=-\sin x$

$y''=-\cos x$

$$\sin^n u = u' \times n \times \sin^{n-1} u \times \cos u$$
$$\cos^n u = -u' \times n \times \sin^{n-1} u \times \sin u$$
$$\tan^n u = u' \times n \times \tan^{n-1} u \times (1+\tan^2 u)$$
$$\cot^n u = -u' \times n \times \cot^{n-1} u \times (1+\cot^2 u)$$

ت) $y=\tan x$ $\quad f'(x)=1(1+\tan^2 x)$

$=1+\tan^2 x$

$f''(x)=0+(1)(2)\tan x(1+\tan^2 x)$

$f''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)$

ث) $f(x)=\frac{1}{x} \to f'(x)=\frac{0-(1)(1)}{x^2}$

$= \frac{-1}{x^2}$

$f''(x)=\frac{0-(-1)(2x)}{(x^2)^2}$

$= \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

تمرین خرداد ۹۲: با استفاده از فرمول های مشتق، مشتق دوم تابع زیر را حساب کنید.

$y=x^2+\sin x$

$y'=2x+\cos x$

$y''=2-\sin x$

دی ماه ۹۵

تمرین: اگر $y=2x+\cos x$ باشد، در رابطه ی زیر مقدار x را بدست آورید.

$$y''+y=y'+\sin x$$

$y=2x+\cos x$

$y'=2-\sin x$

$y''=0-\cos x=-\cos x$

$$\underbrace{-\cos x}_{y''}+\underbrace{2x+\cos x}_{y}=\underbrace{2-\sin x}_{y'}+\sin x$$

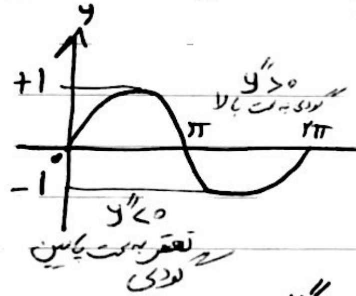
$2x=2$

$x=\frac{2}{2}=1$

تحلیل مفهومی y' و y'' از روی نمودار تابع ها:

$y=\sin x \longrightarrow y'=\cos x$

$y''=-\sin x$



① ملاحظه می شود که در بازه ی $(0,\pi)$ گودی «تقعر» نمودار رو به پایین می باشد $\Leftarrow y''<0$

ملاحظه می شود که در بازه ی $(\pi, 2\pi)$ گودی نمودار رو به بالا می باشد $\Leftarrow y''>0$

y' شیب خط y است

y'' جهت تقعر تابع y می‌باشد

تمرین: در هر یک از توابع زیر y'' را حساب کنید.

الف) $y = 2x^2 + 7x + 5$

ب) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 4$

ت) $y = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

ث) $y = (x-2)^3$

ج) $y = \sin 2x$

چ) $y = \cos x + \sin x$

ح) $y = \frac{x-1}{x+2}$