

۱. در ظرفی ۲ باکتری موجود است و در هر دقیقه تعداد باکتری ها ۲ برابر می شود. حداقل چند دقیقه باید صبر کنیم تا

تعداد باکتری ها از ۲۵۰ بیشتر شود؟ $a_1 = 2, q = 2, a_n = 2 \times 2^{n-1}$

شماره

$$S_n > 250 \Rightarrow a \frac{1-q^n}{1-q} > 250$$

دنباله هندسی:

$$\Rightarrow 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} > \frac{250}{2} \Rightarrow 2^n - 1 > 125 \Rightarrow 2^n > 126$$

$$2^7 = 128 \Rightarrow \boxed{n = 7 \text{ حداقل مورد نیاز}}$$

۲. در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب ها دو واحد از جواب دیگر بزرگ تر باشد، مقدار m و هر دو

جواب را پیدا کنید. $x_1 = \alpha, x_2 = \alpha + 2$

شماره

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \alpha + 2 = -\frac{-8}{2} \Rightarrow 2\alpha + 2 = 4 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\boxed{x_1 = 1, x_2 = 3}$$

به از ریشه ها در معادله سه برابر:

$$2x(1) - 8x(1) + m = 0 \Rightarrow 2 - 8 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 6}$$

۳. ابتدا تابع $f(x) = |x+2| - |3-x|$ را رسم نموده و سپس از روی شکل تعداد جواب های معادله ای

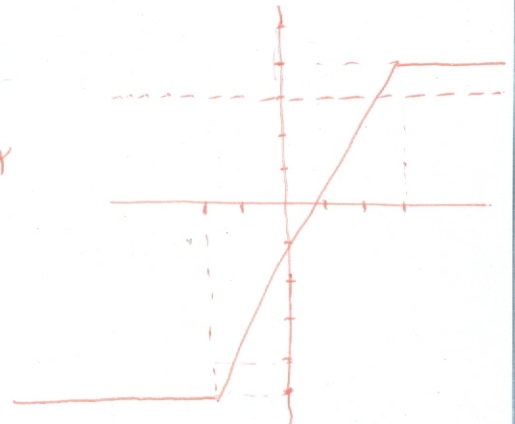
شماره

 $f(x) = 4$ را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 - (-(2+x)) = 5 & x > 3 \\ x+2 - (3-x) = 2x-1 & -2 < x < 3 \\ -x-2 - (3-x) = -5 & x < -2 \end{cases}$$

$$2x - 1 = 4 \Rightarrow 2x = 5$$

$$\boxed{x = 2.5}$$



۴. مثلث ABC به راس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید. طول میانه BM را بدست

آورید.

انمره M

$$= \left(\frac{3-1}{2}, \frac{3+7}{2} \right) = (1, 5)$$

نقطه میانی AC

$$\text{طول پاره خط } BM = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{V^2 + V^2} = \underline{V\sqrt{2}}$$

۵. دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ را در نظر بگیرید.

انمره ۲

الف) دامنه تعریف تابع $f \circ g$ را تعیین کنید.

ب) ضابطه $g \circ f(x)$ را بنویسید.

پ) مقدار $f \circ f(5)$ را محاسبه کنید.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1\}$$

$$(x \in [3, +\infty)) \cap (x \in \mathbb{R} - \{4\}) \Rightarrow x \in [3, +\infty) - \{4\}$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1} - 3} = \sqrt{\frac{-3x+4}{x-1}}$$

$$f \circ f(5) = \frac{1}{5-1} \times \frac{1}{5-1} = \frac{1}{16}$$

۶. یک به یک بودن تابع $f(x) = \frac{3x-5}{2+x}$ را به طور کامل بررسی کنید

انمره

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\frac{3x_1 - 5}{2 + x_1} = \frac{3x_2 - 5}{2 + x_2} \Rightarrow 4x_1 - 10 + 3x_1x_2 - 5x_2$$

$$= 4x_2 - 10 + 3x_1x_2 - 5x_1$$

$$\Rightarrow 4x_1 + 5x_1 = 4x_2 + 5x_2 \Rightarrow 11x_1 = 11x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{تابع ۱-۱ است}$$

۷. اگر $4^a = A$ باشد، حاصل $\log_4^{16A^2}$ را بر حسب a بیابید.

انمره

$$\log_{\Sigma}^{16A^2} = \log_{\Sigma}^{4^4} + \log_{\Sigma}^{A^2} \Rightarrow 4 + 2 \log_{\Sigma}^A = 4 + 2 \log_{\Sigma}^{\Sigma^a}$$

$$\Rightarrow 4 + 2(a) = 4 + 2a$$

۸. معادله لگاریتمی زیر را حل کنید. (۱ نمره) $\log_{10}^{\Delta x - 1} - \log_{10}^{x^2 - 1} = 2 \log_{10}^{\sqrt{3}} = \log_{10}^3$

انمره

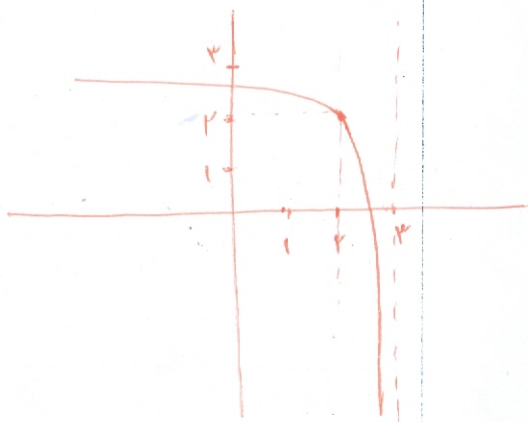
$$\log_{10} \frac{\Delta x - 1}{x^2 - 1} = \log_{10}^3 \Rightarrow \frac{\Delta x - 1}{x^2 - 1} = 3 \Rightarrow \Delta x - 1 = 3x^2 - 3$$

$$\Rightarrow 3x^2 - \Delta x - 2 = 0 \Rightarrow (3x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x \begin{cases} 2 \rightarrow \text{ق.ع} \\ -1/3 \rightarrow \text{ق.ع} \end{cases}$$

۹. تابع $f(x) = 2 + \log(3 - x)$ را رسم کنید و دامنه آن را بنویسید. (فقط آخرین مرحله رسم شود).

انمره



$$D_f = (-\infty, 3)$$

۱۰. زاویه $\alpha = \frac{14\pi}{3} \text{ rad}$ برابر است با ۸۶۰° درجه و در ربع ۲ دایره مثلثاتی است.

۰.۵ نمره

$$\frac{14\pi}{3} = \Sigma\pi + \frac{2\pi}{3} = \Sigma \times 180^\circ + \frac{2}{3}(180^\circ) = 860^\circ$$

۱۱. حاصل عددی عبارت زیر را بدست آورید.

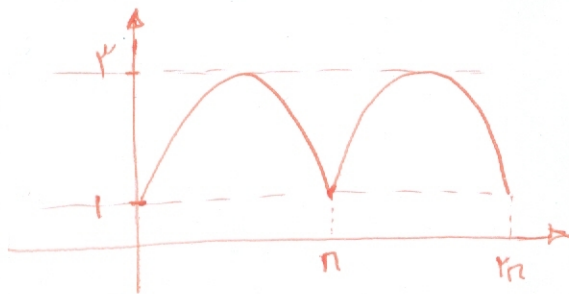
$$A = \frac{(\tan 20^\circ \times \cot 70^\circ)(\sin 150^\circ + \cos 120^\circ)}{1 + \sin^2 100^\circ} =$$

انمره

$$\left. \begin{aligned} \sin(150^\circ) &= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ \\ \cos(120^\circ) &= \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\sin 30^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{(\quad) \times 0}{1 + \sin^2 100^\circ} = 0$$

۱۲. تابع $f(x) = \left| 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right| + 1$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید. (فقط آخرین مرحله رسم شود).

انمره ۱.۵



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = [1, 3]$$

۱۳. مقدار عددی نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

انمره

$$\begin{aligned} \sin 82^\circ &= \sin(45^\circ + 37^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 37^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 37^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 23^\circ &= \cos(90^\circ - 67^\circ) = \cos 90^\circ \cos 67^\circ + \sin 90^\circ \sin 67^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{3} + 2}{10} \end{aligned}$$

۱۴. اگر بازه‌ی $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی برای عدد ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را بیابید.

انمره

$$\begin{aligned} x-1 < 2 &\Rightarrow x < 3 \\ 2x+3 > 2 &\Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

۱۵. حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۴ شماره

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6-2x}{|2x-6|} =$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{6-2x}{2x-6} = -1$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{6-2x}{-2x+6} = 1$

حرف ≠ حرات
حد ندارد.

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4x+4}{4x^3-7x+1} = \frac{4+8+4}{4 \times 8 - 7 \times 2 + 1} = \frac{16}{19}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}$

$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4-x}{9-2x} \times \frac{4}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

د) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2\cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1-\cos 2x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times 2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \frac{\sin x}{x} = 2$

۱۶. مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x=0$ پیوسته باشد.

انمره $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad / \quad f(0) = b-1$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & 0 < x \\ b-1 & x=0 \\ x-2a & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x-2a = -2a$

$\Rightarrow -2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \quad / \quad b-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$