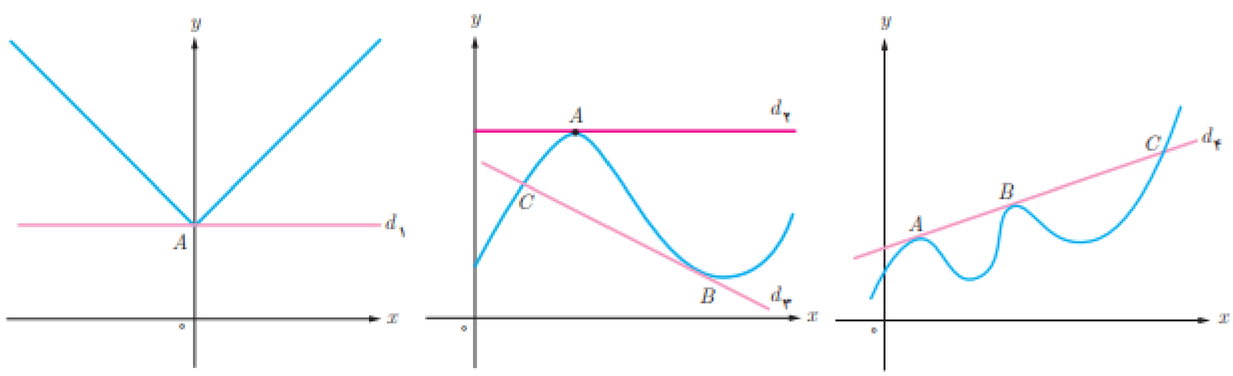
آشنایی با مفهوم مشتق

قبل از ورود به مبحث مشتق لازم است مفهوم خط مماس بر منحنی را بررسی کنیم.

اشتباه متداول درمورد تعریف خط مماس از خط ممای بر دایره نشات می گیرد. خط مماس بر دایره خطی است که با دایره یک نقطه مشترک دارند. اما در تمام منحنی ها به این صورت نیست. به منحنی ها زیر دقت کنید و مشخص کنید خط داده شده درکدام نقطه برمنحنی مماس است؟



فرض کنید P نقطه ای نقطه ای روی منحنی با طول a باشد.اگر حد $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته و مقدار آن برابر m باشد، در این صورت خط مماس بر نمودار f در نقطه P ، خطی است که از نقطه P گذشته و شیب آن برابر m است. در واقع <u>مشتق در یک نقطه</u> برابر <u>شیب خط مماس بر منحنی در نقطه مورد نظر</u> است.

در این صورت مقدار این حد را مشتق تابع f در نقطه a مینامیم و با $f'(a)$ نشان می دهیم.

تعریف اول مشتق $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

اگر مشتق تابع f در نقطه a وجود داشته باشد(حد فوق وجود داشته باشد) میگوییم تابع f در نقطه a مشتق پذیر است.

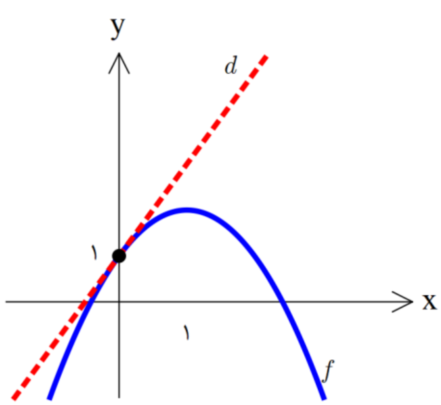
تعریف دوم مشتق $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مثال: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=2x^2+3x$ را در $x=1$ بیابید.

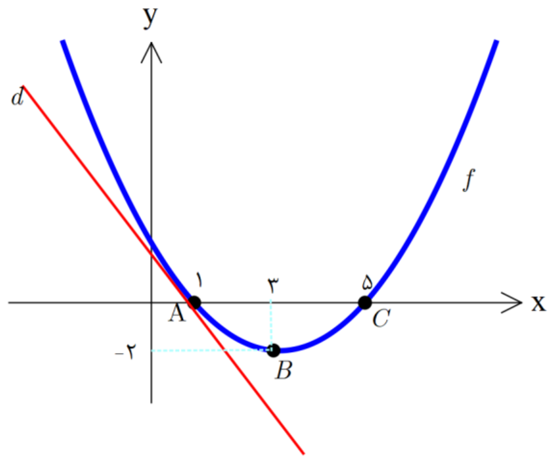
مثال: در تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مقدار $f'(1)$ را با تعریف بیابید.

مثال: در شکل روبرو تابع $f(x)=-(x+1)^2+2$ رسم شده است.

شیب خط d را بیابید.



مثال: در نمودار مقابل خط d در نقطه $x=۱$ برنمودار f مماس شده است. خرداد۹۹



الف) مشتق تابع f را در نقطه $x=۱$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط C,B مقایسه کنید.

مثال: شیب خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۲+۱$ را در نقطه ای به طول $x=۲$ واقع بر منحنی بیابید.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $y=\sqrt{x}$ را در نقطه ای به طول ۴ روی منحنی بنویسید.

مثال: مقدار مشتق تابع $f(x)=(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)$ را در نقطه $x=۳$ بیابید.

مثال: معادله خط مماس بر منحنی $y=-x^{۲}$ را در نقطه ای به طول **۲-** روی منحنی بنویسید.

مثال: اگر $f\left(x\right)=\frac{۱}{x}$ باشد، با استفاده از تعریف، مشتق تابع f را بر حسب x به دست آورید.

سپس مقدار $f'\left(۲\right)$ را حساب کنید.

مثال: اگر $f\left(x\right)=۱-۲x$ باشد، $f'\left(-۱\right)$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید. دی۹۷

مثال: مشتق تابع $f\left(x\right)=x^{۳}-۲$ را با استفاده از تعریف، مشتق در نقطه ای به طول $x=-۱$ به دست آورید.

خرداد۹۸ تجربی

مثال: اگر $f(x) = ۵x^{۲} - x + ۷$ باشد، ضابطه $f'(x)$ را به دست آورید.

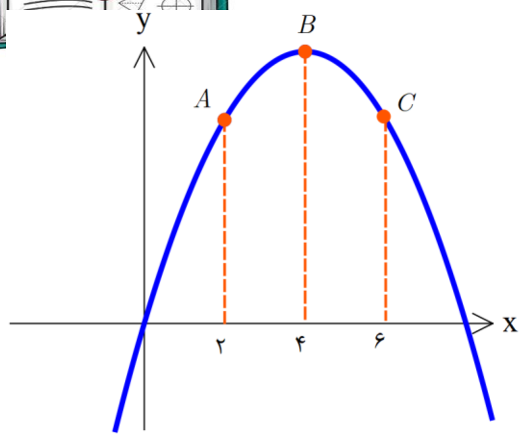
مثال: معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^{۲} + ۱۰x$ را در نقطه $A(۲, f(۲))$ بنویسید. خرداد۹۹

مثال: اگر $f(x) = ۲x^{۲} - ۳x + ۴$ باشد،

الف) مقدار $f'(۳)$ را به دست آورید.

ب) معادله خط مماس بر منحنی f در نقطه ای به طول **۳** واقع بر آن را بنویسید.

نکته: برای یافتن شیب خط مماس باید تعریف مشتق در نقطه نوشته شود. اما اگر صورت مساله تاکید بر تعریف نداشته باشد، میتوان با قوانین مشتق گیری که بعدا خواهیم خواند شیب مماس، یا همان مشتق در نقطه را محاسبه کرد. چون بعضی از مشتق گیری با تعاریف منجر به محاسبات و رفع ابهام های دشواری خواهد شد که در برنامه درسی شما نمیگنجد.



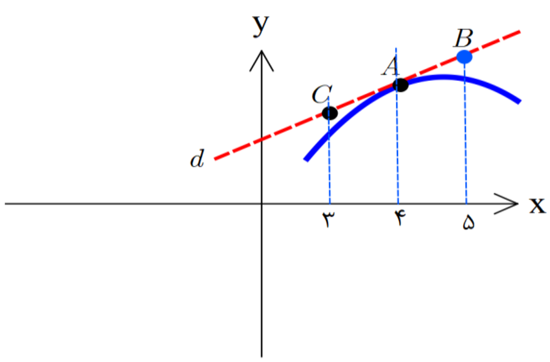
مثال: در شکل روبرو نمودار تابع $f(x) = ۸x - x^۲$ رسم شده است.

نقاط C, B, A را با هم مقایسه کنید.

مثال: در شکل مقابل خط d بر نمودار f مماس شده است. اگر $f(۴) = ۲۴ \, , \, f'(۴) = ۱/۵$

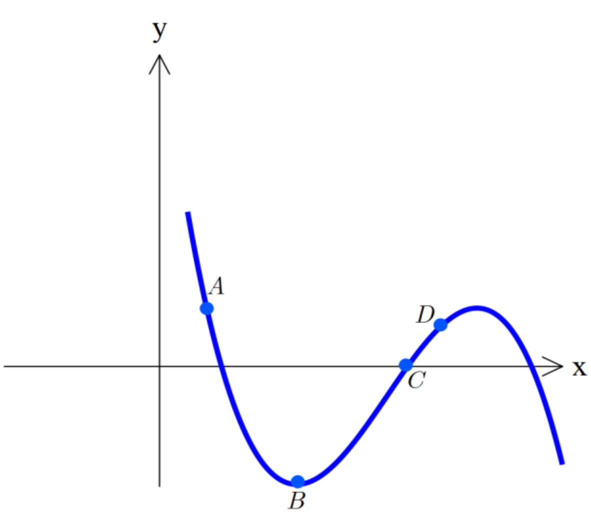
با توجه به شکل، مختصات نقاط C, B, A را بیابید. دی۹۷

تیر۹۸ تجربی



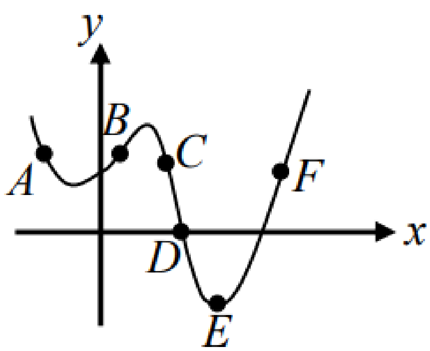
مثال: نقاط داده شده روی منحنی را با شیب های ارائه شده

در جدول نظیر کنید. شهریور۹۸



مقدار مشتق	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲
نقطه				

مثال: با توجه به نمودار داده شده، گزینه مناسب را انتخاب کنید.شهریور۹۸



در کدام نقطه مماس افقی بر نمودار رسم میشود؟

الف) B ب) E

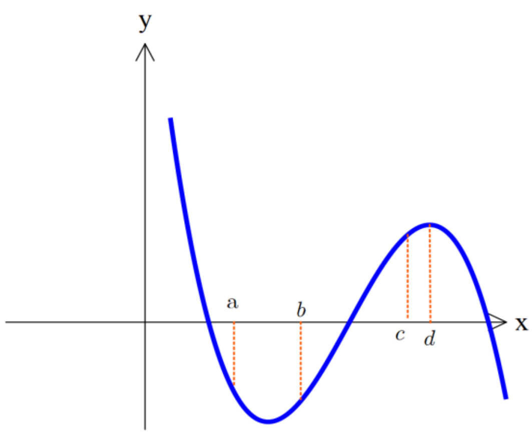
شیب خط مماس در نقطه F چه علامتی دارد؟

الف) مثبت ب) منفی

شیب خط مماس بر نمودار، در نقطه D نسبت به نقطه B چگونه است؟

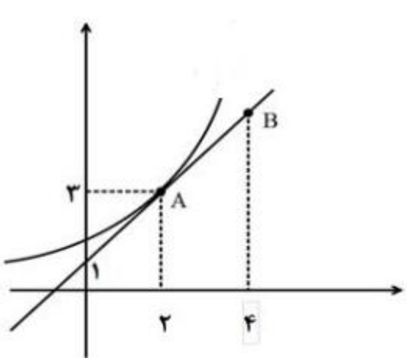
الف) بیشتر ب) کمتر

مثال: با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل نقاط به طولهای d, c, b, a را با مشتق های داده شده در جدول نظیر کنید. دی۹۸تجربی



مقدار مشتق	$\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{-۱}{۲}$	۲
نقطه				

مثال: در شکل روبرو نمودار تابع و خط مماس بر آن در نقطه $x = ۲$ رسم شده است.



الف) مشتق تابع در نقطه $x = ۲$ را بیابید.

ب) معادله خط مماس بر نمودار در نقطه A را بیابید.

مشتق پذیری و پیوستگی

مشتق پذیری در یک نقطه

مشتق تابع در واقع شیب خط مماس بر منحنی است. یعنی اگر تابعی در یک نقطه حد مورد نظر در ابتدای فصل مشتق را داشت، میگوییم تابع در آن نقطه مشتق پذیر است.

قضیه: اگر تابع f در نقطه $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه در $x=a$ پیوسته است. خرداد۹۸

پس برای آنکه تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱- تابع در $x=a$ پیوسته باشد.

۲- مشتق چپ و راست در $x=a$ **موجود** و **برابر** باشند. (منظور از موجود بودن آن است که جواب حدهای فوق عدد شود)

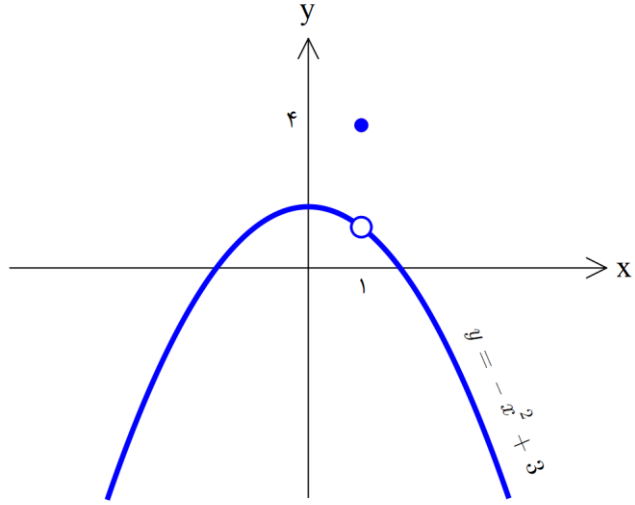
نتیجه مهم این است که اگر تابعی در نقطه پیوسته نباشد، مشتق پذیر نیست.

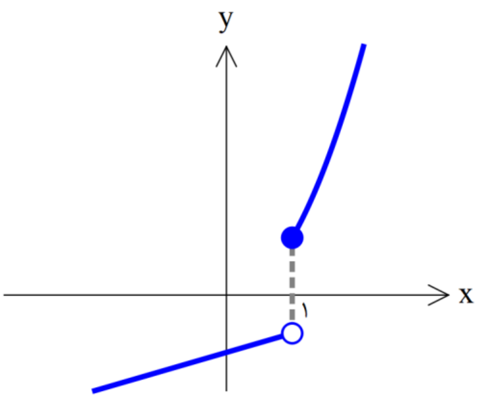
مشتق چپ و مشتق راست

در نقطه $x=a$ شیب نیم مماس چپ رامشتق چپ میگوییم و به صورت $f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نمایش میدهیم.

درنقطه $x=a$ شیب نیم مماس راست رامشتق راست میگوییم.وبه صورت $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$نمایش میدهیم.

📖 **مثال:** در تابع های رسم شده زیر مشخص کنید در نقطه $x=۱$ تابع مشتقپذیر است؟



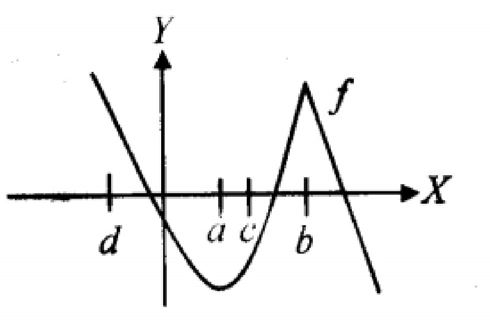


📖 **مثال:** با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سوالات زیر پاسخ دهید. دی۹۷

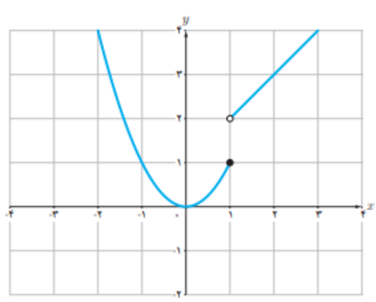
الف) طول نقطه ای که مماس در آن افقی است.

ب) طول نقطه ای که مشتق در آن مقداری منفی است.

پ) طول نقطه ای که تابع در آن مشتق پذیر نیست.



📖 **مثال:** چرا در شکل روبرو تابع در نقطه $x=۱$ مشتق پذیر نیست؟



مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\neq ۱ \\ ۲ & x=۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. میخواهیم از روی نمودار تابع و یکبار هم با استفاده از مشتق تابع، مشتق پذیری تابع در $x=۲$ را بررسی کنیم.

مثال: مشتق پذیری تابع روبرو را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید. $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+x & x\geq ۱ \\ ۳x-۱ & x<۱ \end{cases}$

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<0 \\ x^2-1 & x\geq 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases}$

نشان دهید که $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

مثال: به کمک تعریف مشتق،مشتق پذیری تابع $f(x)=\left|x^2-4\right|$ را در $x=-2$ بررسی کنید.

دلایل مشتق پذیر نبودن تابع

◆تابع در نقطه مورد نظر پیوسته نیست.

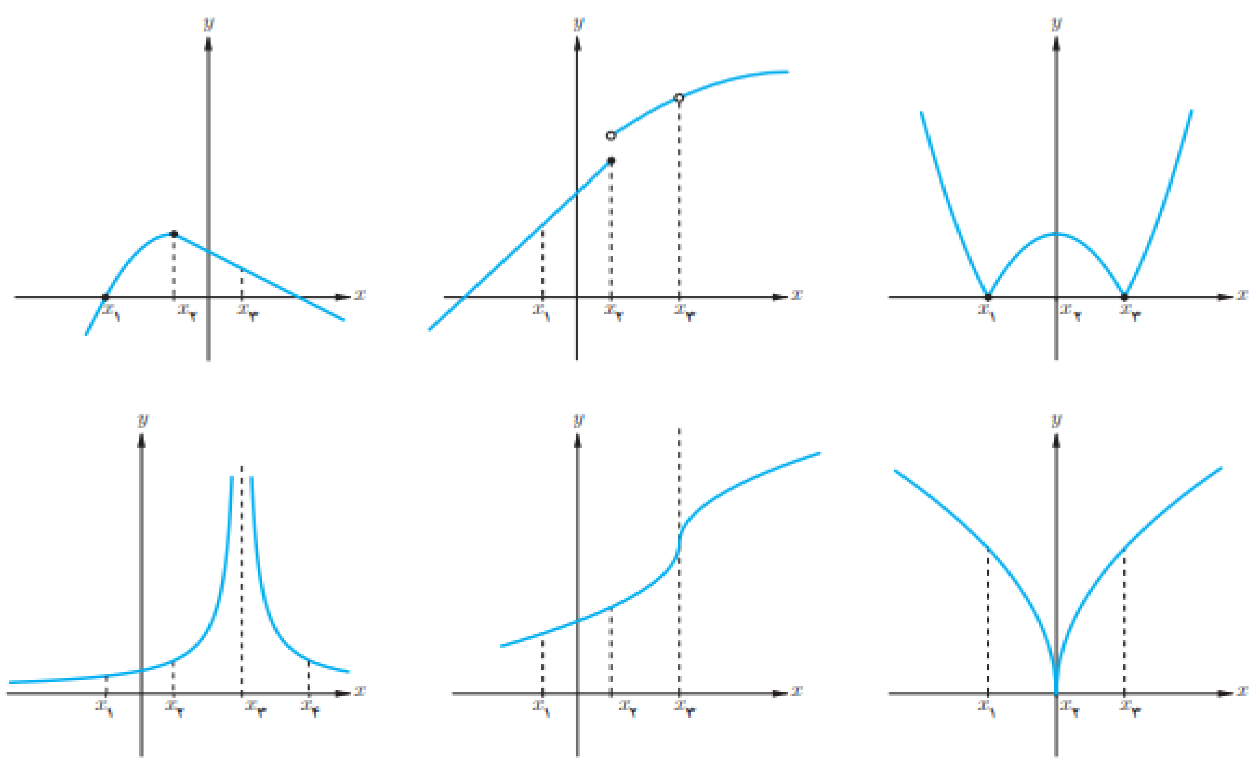
◆تابع پیوسته است اما مشتق چپ و راست شرایط زیر را دارند:

۱- هر دو موجود ولی نابرابر هستند. (**نقطه گوشه ای**)

۲- یکی موجود و دیگری نامتناهی است.(**نقطه گوشه ای**)

۳- هر دو نامتناهی هستند. (**مماس قائم**)

مثال: در شکل های رسم شده زیر در کدام نقطه یا نقاط تابع مشتق پذیر نیست؟ چرا؟

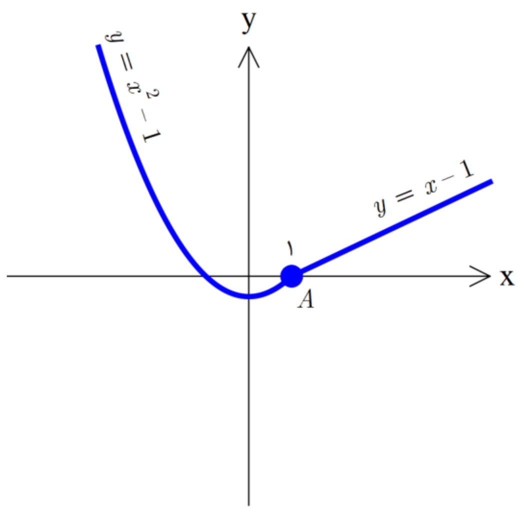


مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^{2}-4|$ را در نقطه $x=2$ بررسی کنید . سپس معادله نیم مماس راست و نیم مماس چپ را در $x=2$ بنویسید.

مثال: یک تابع مثال بزنید که در نقطه $x=4$ پیوسته باشد ولی مشتق پذیر نباشد.

مثال: در شکل زیر مشتق چپ و راست را از روی شکل در نقطه A یافته و نشان دهید در این مشتق پذیر نیست.



مثال: مشتق پذیری تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را در $x = ۰$ بررسی کنید.

مثال: مشتق پذیری تابع $y = \sqrt[3]{x^2}$ را در $x = ۰$ بررسی کنید.

تعریف دامنه تابع مشتق:

نقاطی از دامنه تابع f که در آنها تابع دارای مشتق باشد را دامنه مشتق پذیری گوییم . یعنی از روی دامنه تابع باید نقاط مشتق ناپذیر را کم کنیم. $D_{f'} = D_f - \{\text{نقاط مشتق ناپذیر}\}$

مثال: تابع $f(x) = |(x-۳)(x+۱)|$ در چه نقاطی مشتق پذیر نیست؟ دامنه تابع مشتق را بیابید.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x+۱ & x \neq ۲ \\ ۴ & x = ۲ \end{cases}$ داده شده است.

الف) دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید.

ب) ضابطه f' را به دست آورید.

ج) نمودار f و f' را رسم کنید.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ۵x & x \leq -۱ \\ ۳ & -۱ < x < ۲ \\ -۴x+۵ & x \geq ۲ \end{cases}$ داده شده است.

الف) دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید.

ب) ضابطه f' را به دست آورید.

ج) نمودار f و f' را رسم کنید.

محاسبه تابع مشتق بعضی توابع

چند جمله ای ها

① (عدد ثابت k) $y = k \to y' = 0$

② $y = x \to y' = 1$

③ $y = x^n \to y' = nx^{n-1}$

④ $y = u^n \to y' = nu'u^{n-1}$

مثال: مشتق توابع زیر را بیابید.

$$y = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$$

$$y = 3\left(x^2 + 1\right)^4 - 3x^5$$

$$y = 1 - \frac{x}{3} + 5x^3$$

$$y = 2\left(2 - \frac{x}{3}\right)^4$$

اعمال روی توابع در مشتق:

⑤ $y = f \pm g \to y' = f' \pm g'$

⑥ $y = f.g \to y' = f'.g + g'.f$

⑦ $y = \frac{f}{g} \to y' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$

در تابع های کسری مشتق تابع $y=\frac{۱}{x}$ را به عنوان حالت خاص به یاد داشته باشید.

$$\boxed{y=\frac{۱}{x}\rightarrow y'=\frac{-۱}{x^{۲}}}$$

مثال: اگر $g'(۲)=۵, f'(۲)=۳$ حاصل عبارت $(۲g-f)'(۲)$ برابر ....است. دی۹۷

مثال: مشتق بگیرید. ساده کردن لازم نیست.

$$f(x)=\frac{x^{۳}+۱}{۵x-۱}$$

مثال: با استفاده از قوانین، مشتق بگیرید.

$f(x)=\left(\frac{۲}{۲x-۱}\right)^{۵}$ دی۹۷

$f(x)=\left(x^{۴}-۳x\right)^{۵}$ خرداد۹۸

$f(x)=\left(x^{۲}+۲x+۱\right)^{۵}$ تیر۹۸

دی۹۸ $f(x)=\left(x^{2}+1\right)^{3}(5x-1)$

مثال: مشتق بگیرید.

$$g(x)=\left(x^{2}+x\right)\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$$

مثال: مشتق بگیرید. (ساده کردن الزامی نیست)خرداد۹۹

ب) $g(x)=\left(\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{3x+2}\right)$

الف) $f(x)=\left(\frac{-3x+1}{x^{2}+5}\right)^{8}$

مشتق توابع رادیکالی

حالت خاص) $\left(y=\sqrt{x}\rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right.$ ⑧ $y=\sqrt{u}\rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

حالت خاص) $\left(y=\sqrt[3]{x}\rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}\right.$ ⑨ $y=\sqrt[3]{u}\rightarrow y'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^{2}}}$

مثال: مشتق بگیرید.

$$y=\sqrt{x^{3}+1}$$

$$y=\sqrt{x+2}$$

$$y=\sqrt[3]{x^{2}+x}$$

مثال: مشتق بگیرید.

(دی۹۷) $g(x)=x^{2}\sqrt{x+1}$

(خرداد۹۸) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$

(تیر۹۸) $g(x)=\dfrac{5x^{2}-x}{\sqrt{x}}$

(دی۹۸) $g(x)=\dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$

مثال: مشتق بگیرید.

الف) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{۳x}}{x^{۲}+۱}$

ب) $g\left(x\right)=\left(\sqrt{۵-۷x}\right)\left(۴-\dfrac{x}{۳}\right)$

مثال: مشتق بگیرید.

الف) $f\left(x\right)=\dfrac{x^{۲}+۱}{۳}$

ب) $g\left(x\right)=\dfrac{۳}{x^{۲}+۱}$

مثال: اگر $f(x)=۱+\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{x^{۲}}+...+\dfrac{۱}{x^{۶}}$ مقدار $f'(۱)$ را بیابید.

مثال: اگر $f(x)=\dfrac{ax^{۲}+a}{\sqrt{۳x+۱}}$ و $f'(۱)=\dfrac{۲۱}{۸}$ ، مقدار a را بیابید.

مشتق تابع مرکب

$$y=\left(fog(x)\right)\rightarrow y'=g'(x).f'\left(g(x)\right)$$

یعنی در مشتق تابع مرکب اول مشتق تابع داخلی ضربدر مشتق تابع بیرونی به ازای تابع داخلی.

مثال: مشتق تابع $y=\sqrt{x^{۳}+۱}$ را با استفاده از مشتق تابع مرکب بیابید.

مثال: اگر $g\left(x\right)=f\left(\frac{۱}{x}\right)$ و $f'(x)=x^{۲}+۱$ مشتق تابع g را در $x=۲$ بیابید.

مثال: اگر $g(x)=x^{۴}+۲x$ و $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}$ باشد، مقدار مشتق fog را در $x=۰$ محاسبه کنید.

مثال: اگر $f\left(x\right)=x^{۳}+۵x$ باشد، با استفاده از مشتق تابع مرکب ، مشتق تابع $y=f\left(\sqrt{x}\right)$ را بیابید.

آهنگ تغییرات

در تابع $y=f(x)$ نسبت تغییرات تابع Δy به تغییرات متغیر Δx را آهنگ تغییرات می گویند.

$$\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱} = \text{آهنگ تغییر } y \text{ نسبت به } x$$

آهنگ متوسط تغییر : هنگامی که متغیر از a به b تغییر می کند مقدار $b-a$ را نمو متغیر و مقدار $f(b)-f(a)$ را نمو تابع می نامند و نسبت $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ را آهنگ متوسط تغییرات تابع مینامیم.

نکته: اگر قرار دهیم $b-a=h$ مقدار متوسط تغییر تابع به صورت $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ خواهد بود.

📖 **مثال:** در تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ ، آهنگ تغییر تابع را وقتی x از ۴ به ۲۵ تغییر می کند بدست آورید. (نهایی دی۸۹)

📖 **مثال:** آهنگ تغییرات تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲$ وقتی x از ۲ به ۲/۲ تغییر کند را به دست آورید. (نهایی خرداد۸۷)

مثال: تابع با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{x-۱}$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی x از $x_۱=۱$ تا $x_۲=۵$ تغییر میکند تعیین کنید. (نهایی دی۹۰)

مثال: یک توده باکتری پس از ساعت t دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+۲t^۲$ گرم است. آهنگ تغییرمتوسط جرم این توده در بازه زمانی $[۳,۴]$ چقدر است؟ دی۹۷

مثال: یک توده باکتری پس از ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۱\le t\le ۴$ چند گرم افزایش می یابد؟ خرداد۹۹

مثال: آهنگ تغییرمتوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ را وقتی متغیر از $x_۱=۲$ به $x_۲=۷$ تغییر میکند را به دست آورید. شهریور۹۸

مثال: تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد. اگر x مدت زمان پس از تولد(برحسب ماه) باشد، حساب کنید که آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[۰,۲۵]$ چقدر است؟

دی۹۸

آهنگ لحظه ای تغییر تابع : در تابع f مقدار $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را آهنگ لحظه ای تغییر تابع در نقطه a مینامیم.

تذکر : آهنگ تغییر لحظه ای تابع $f(x)$ در نقطه a همان تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطه a است.

مثال: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=۲t^۲-t$ بر حسب متر داده شده است. تعیین کنید که در چه زمانی سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی با هم برابرند؟ خرداد۹۸

مثال: یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+۲t^{۳}$ گرم است.

الف)آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[۳,۴]$ چقدر است؟

ب)آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی $t=۳$ چقدر است؟ تیر۹۸، خرداد۹۹

سرعت یک متحرک

الف) **سرعت متوسط** : سرعت متوسط همان آهنگ تغییر متوسط تابع $f(t)$ نسبت به متغیر t است .

اگر متحرکی با سرعت $S=f(t)$ حرکت کند در این صورت:

$$\text{سرعت متوسط}=\frac{f(t)-f(t_{\circ})}{t-t_{\circ}}$$

ب) **سرعت لحظه ای** : سرعت لحظه ای برابر است با حد سرعت متوسط وقتی t به $t_{\circ}$ میل می کند که آن را با $V(t_{\circ})$ نمایش میدهیم.

$$V\ \text{سرعت متوسط}=\lim_{t\to t_{\circ}}\frac{f(t)-f(t_{\circ})}{t-t_{\circ}}$$

مثال: معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x(t)=۳t^{۲}-۴t+۲$ است. سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t=۱$ و $t=۳$ محاسبه کنید. (نهایی خرداد۹۰)

مثال: معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x = t^{۲} - ۵t + ۶$ است.

اولاً: سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = ۳$ تا $t = ۵$ محاسبه کنید. ثانیاً : آهنگ آنی تغییرات x را در $t = ۲$ به دست آورید. نهایی شهریور۸۶

مثال: موشکی به طور قائم رو به بالا پرتاب شده است. اگر این موشک پس از t ثانیه s متر را طی کند و معادله حرکت آن به صورت $s = ۱۸۰t - ۵t^{۲}$ باشد، سرعت موشک را ۵ ثانیه بعد ار پرتاب حساب کنید. نهایی شهریور۷۹

تعریف

مشتق پذیری در یک بازه

الف) بازه باز : تابع f روی بازه (a,b) مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) بازه بسته تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه بازه (a,b) مشتق پذیر باشد و در a دارای مشتق راست(اول پیوستگی راست بررسی شود) ودر b دارای مشتق چپ باشد (اول پیوستگی چپ داشته باشد)

مثال: مشتق پذیری تابع $f\left(x\right)=\begin{cases} x^{۲} & -۲\le x\le ۱ \\ x+۱ & ۱<x\le ۳ \end{cases}$ را در بازه های خواسته شده بررسی کنید.

الف) بازه $\left[-۲,۳\right]$

ب) بازه $\left[۱,۳\right]$

مثال: مشتق پذیری تابع $f\left(x\right)=\left|x-۱\right|$ را در بازه های خواسته شده بررسی کنید.

الف) بازه $\left(-۲,۱\right)$

ب) بازه $\left(۲,۳\right)$

مثال: دو بازه باز مثال بزنید که در یکی از آنها تابع $f\left(x\right)=\sqrt[۳]{x}$ مشتق پذیر باشد و دردیگری مشتق پذیر نباشد.

تعریف

مشتق دوم

مشتقِ $y=f(x)$ یعنی $y'=f'(x)$ را در صورتی که وجود داشته باشد مشتق اول می‌نامیم و مشتقِ $y'=f'(x)$ را در صورت وجود مشتق دوم می‌نامیم و با $y''=f''(x)$ نشان می دهیم.

نکته: اگر معادله حرکت یک متحرک $s=f(t)$ باشد، مشتق اول آن یعنی $s'=f'(t)$ را **سرعت** می نامند و با $v(t)$ نمایش می دهند. مشتق دومِ $f(t)$ یا مشتق $v(t)$ را **شتاب متحرک** می گویند و با $a(t)$ نشان می دهند یعنی:

$$v(t)=f'(t)$$
$$a(t)=v'(t)=f''(t)$$

مثال: معادله حرکت یک متحرک روی خط مستقیم به صورت $x=t^{۳}-۵t+۶$ است. شتاب این متحرک را در زمان $t=۳$ محاسبه کنید.

مثال: اگر $f(x)=\sin^{۲}x-\cos^{۲}x$ باشد مقدار $f''(\frac{\pi}{۴})$ را بیابید.