هوالعلیم الرزّاق

جزوه حل کامل سوالات نهایی دروس ریاضی۳ و حسابان۲ با جزئیات روشن و نکات آموزشی

مولف: علی اصغر مرادی ویس

مدرس دانشگاه و دبیر ریاضی آموزش و پرورش

ID: moradivais

کانال:

@riazinahaeikonkouri

هزینه استفاده: صلوات

«هو العلیم الرزاق»

معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(-1,-1)$ و با دایره $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد.
(مشابه سؤال نهایی - امرء)

نکات آموزشی:

۱- دو دایره مماس درون اند هرگاه:

$$d = r - r'$$

شعاع دایره بزرگ — شعاع دایره کوچک — خط المرکزین

۲- اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله گسترده یک دایره باشد مختصات مرکز این دایره $O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ است و شعاع این دایره برابر است با $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$.

حل) طبق نکات آموزشی بالا داریم:

$$x^2+y^2-4x-6y-3=0 \to \begin{cases} O'=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{(-4)}{2},-\frac{(-6)}{2}\right)=(2,3) \\ r'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+12}=\frac{1}{2}\sqrt{64}=\frac{1}{2}(8)=4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} O=(-1,-1) \\ O'=(2,3) \end{array}\right\} \to \text{خط المرکزین} = d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

دایره‌ها مماس درون اند $\to d=r-r' \to 5=r-4 \to 5+4=r \to r=9$

معادله دایره: $(x-(-1))^2+(y-(-1))^2=9^2 \to \boxed{(x+1)^2+(y+1)^2=81}$

موفق باشید.
مرادویس

«هو العلیم الرزاق»

سؤال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ را بیابید. (مشابه سؤال نهایی - ۱ نمره)

نکته‌های آموزشی:

۱- فرض کنیم $c\in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد نقطه‌ی به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

۲- اگر تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ تعریف شده باشد آنگاه نقاط ابتدایی و انتهایی بازه $[a,b]$ نمی‌توانند نقاط بحرانی باشند.

حل) طبق نکات بالا داریم:

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$D_f: 4-x^2\ge 0 \rightsquigarrow x^2\le 4 \rightsquigarrow -2\le x\le 2 \Rightarrow D_f=[-2,2]$

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

۱) جایی که $f'(x)=0$ می‌شود $\rightsquigarrow \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \rightsquigarrow -x=0 \rightsquigarrow x=0\in[-2,2] \Rightarrow$ نقطه بحرانی

۲) جایی که $f'(x)$ وجود ندارد: $\xrightarrow{\text{در ریشه‌های مخرج } f'(x) \text{ وجود ندارد}} \sqrt{4-x^2}=0 \rightsquigarrow 4-x^2=0$

$\rightsquigarrow x^2=4 \rightsquigarrow x=\pm 2 \rightsquigarrow$ چون $x=-2$ و $x=+2$ نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه f هستند لذا طبق نکته بالا، نقاط بحرانی نیستند.

موفق باشید

مرادی ویس

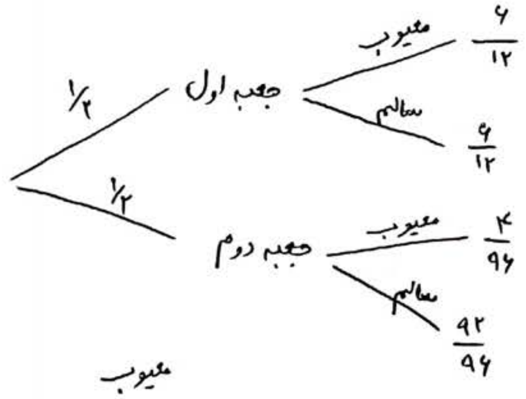
« هو العلیم الرزاق »

سؤال: دو جعبه داریم. درون یکی از آن ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تای از آنها معیوب است و درون جعبه ی دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تای آن ها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟ (مشابه سؤالات نهایی - ۱٫۵ نمره)

نکته آموزشی) قانون احتمال کل:

اگر فرض کنیم در حالت کلی A_1، A_2، ...، A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B پیشامد دلخواه باشد، رابطه ی زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می گویند:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) \quad ; \quad 1\le i\le n$$



$$P(\overset{\text{معیوب}}{B})=\frac{1}{2}\times\frac{6}{12}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{96}=\frac{6}{24}+\frac{4}{192}=\frac{48}{192}+\frac{4}{192}=\frac{52}{192}$$

"هو العلیم الرزاق"

سؤال) جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید. (دی ماه ۹۷ - ایذه)

نکته آموزشی:

دانش آموزان عزیز دقت داشته باشند در غالب اوقات در امتحانات نهایی، سؤال اول بصورت جای خالی یا درست، نادرست مطرح می‌شود از این رو لازم است تعریفات، قضیه ها، نکات مهم، کادرهای رنگی درون کتاب درسی حفظ و مورد توجه واقع شوند.

الف) اگر باقیمانده تقسیم $f(x)=x^2+kx-1$ بر $(x+1)$ برابر ۲ باشد مقدار k برابر ...۲-... است.

نکته: باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارتست از $r(x)=f(-\frac{b}{a})$.

طبق نکته $\Leftarrow$ $2=f(-1) \Rightarrow 2=(-1)^2+k(-1)-1 \Rightarrow 2=1-k-1 \Rightarrow 2=-k \Rightarrow \boxed{k=-2}$

@moradivais

ب) دوره تناوب تابع تانژانت برابر با ...π... است.

حل) دوره تناوب تابع $f(x)=\tan x$ برابر $T=\pi$ است.

ج) مشتق تابع $f(x)=\sqrt{2x-1}$ در نقطه‌ای به طول یک روی منحنی تابع، عدد ...1... است.

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}} \Rightarrow f'(1)=\frac{2}{2\sqrt{2(1)-1}}=\frac{2}{2\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1$$

د) اگر تابع $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ صعودی باشد علامت مشتق تابع f در این بازه ...مثبت... است.

موفق باشید.

مرادویس

«هو العلیم الرزاق»

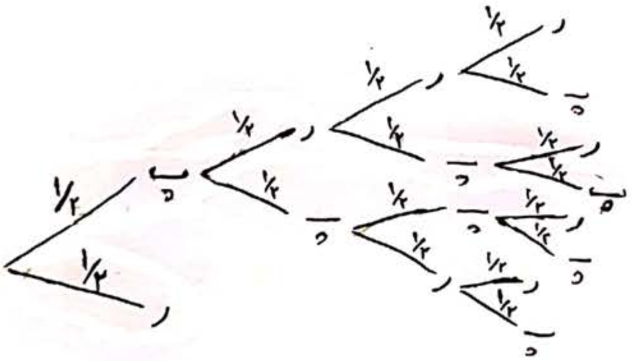
سؤال) یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید سه سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟ (دی ماه ۹۷ ـ ۲/۵ نمره)

نکته آموزشی:

قانون احتمال کل: اگر فرض کنیم در حالت کلی A_1، A_2، ...، A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه‌ی زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i) \quad ; \quad 1\le i\le n$$

حل) داریم:



$$P(B)=\overbrace{\frac{1}{2}}^{۰/۵\ \text{نمره}}+\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}_{۱/۷۵\ \text{نمره}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{16}=\overbrace{\frac{11}{16}}^{۰/۲۵\ \text{نمره}}$$

«هو العلیم الرزاق»

سؤال: نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند. (مشابه سؤالات نهایی - اعزه)

نکات: مراحل حل مسائل بهینه‌سازی:

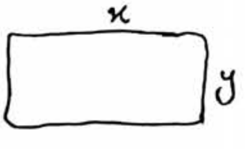
مرحله ۱: در صورت امکان شکلی برای مسأله رسم کنید و متغیرهای موجود در آن را نامگذاری کنید.

مرحله ۲: تابعی که قرار است بهینه شود (مساحت، حجم، هزینه، ...) را برحسب متغیرهای موجود می‌نویسیم (محدوده متغیرها را نیز ترجیحاً مشخص می‌کنیم).

مرحله ۳: با توجه به شکل یا صورت سؤال، فیثاغورس، تالس یا ...، رابطه بین متغیرها می‌نویسیم و یک متغیر را برحسب بقیه‌ی متغیرها می‌نویسیم به گونه‌ای که بتوانیم با جاگذاری این رابطه در تابعی که چند متغیره بود (می‌خواستیم آن را بهینه کنیم) آن تابع را یک متغیره می‌کنیم.

مرحله ۴: از این تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم و در نقاط بدست آمده (بحرانی) مقادیر تابع را مشخص می‌کنیم تا با مقایسه‌ی آن‌ها اکسترمم مطلق مورد نظر مشخص شود.

حل سؤال:



$S = xy$ (1)

$\text{محیط} = P = 2(x+y) = 14 \rightsquigarrow x+y=7 \rightsquigarrow y = 7-x$ (2)

(2), (1) از $\Rightarrow S_{(x)} = x(7-x) = 7x - x^2 \ ; \ x \in [0,7]$

$S'(x) = 7-2x \xrightarrow{S'(x)=0} 7-2x=0 \rightsquigarrow x = 3.5$

جدول تغییرات:

x	0		3.5		7
$S'(x) = 7-2x$		$+$	0	$-$	
$S(x) = 7x - x^2$	0	$\nearrow$	12.25	$\searrow$	
			مطلق Max		

$\Rightarrow$ بیشترین مساحت $12.25\ cm^2$ است و این زمانی است که طول و عرض مساوی باشند پس $x = y = 3.5$

موفق باشید
مرادی ویس

«هو العلیم الرزاق»

سؤال: معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید. (مشابه سؤالات نهایی - ۱ نمره)

نکات آموزشی:

۱- جواب های کلی معادله $\cos x = \cos\alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

۲- در روابط مثلثاتی داریم که:

$$\cos 2x \begin{cases} = \cos^2 x - \sin^2 x \\ = 1 - 2\sin^2 x \\ = 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$$

۳- حالات خاص معادلات مثلثاتی:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

که $k \in \mathbb{Z}$.

حل سؤال: طبق نکات بالا داریم که:

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \xrightarrow{\cos 2x = 2\cos^2 x - 1} 2\cos^2 x \cancel{-1} - \cos x \cancel{+1} = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\rightarrow \cos x\,(2\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad ; \ k \in \mathbb{Z} \\ 2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

موفق باشید.

مرادی ویس

«هو العلیم الرزاق»

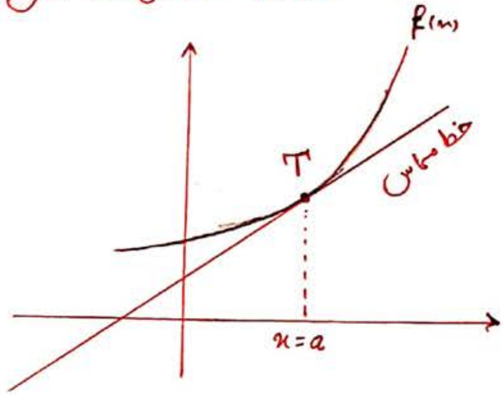
سؤال ۶ معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^2+3$ را در نقطه‌ای بطول ۲- بنویسید.
(مشابه به سؤالات نهایی - تمرین کتاب درسی)

نکات آموزشی: معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$:

$T=(a, f(a))$

شیب خط مماس $= m_T = f'(a)$

معادله خط مماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$



حل سؤال:

$$T=(-2, f(-2)) = (-2, 7) \qquad f(x)=x^2+3 \to f(-2)=(-2)^2+3=7$$

$$m_T = f'(-2) \xrightarrow{f'(x)=2x} m_T=2(-2)=-4$$

معادله خط مماس: $y-7=-4(x-(-2)) \to y-7=-4(x+2) \to y-7=-4x-8$

$$\to y=-4x-8+7 \to \boxed{y=-4x-1}$$

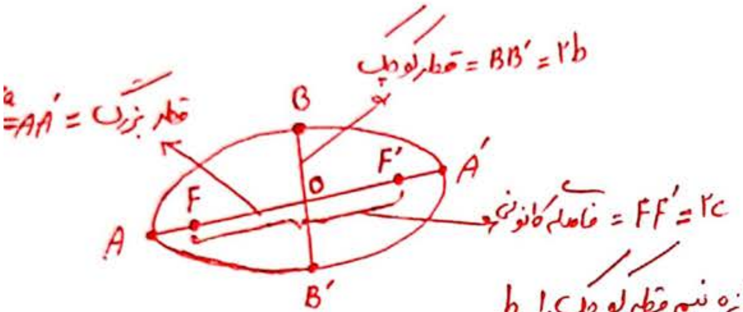
موفق باشید.
مرادی ویس

« هو العلیم الرزاق »

سؤال: در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

(دی ۹۷ - ۱ نمره)

نکات: در بیضی زیر داریم که:



۱- اگر در یک بیضی، اندازه نیم قطر بزرگ را a، اندازه نیم قطر کوچک را b

و نصف فاصله کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه: $a^2 = b^2 + c^2$

۲- مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

۳- همواره $\frac{c}{a}$ مقداری بین صفر و یک است، هرچه $\frac{c}{a}$ بزرگتر و به یک نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچکتر و به صفر نزدیکتر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیکتر خواهد بود.

حل سؤال:

$$\begin{cases} 2a = 8 \to a = 4 \quad (0/25) \\ 2b = 6 \to b = 3 \quad (0/25) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a^2 = b^2 + c^2} 4^2 = 3^2 + c^2 \to c^2 = 16 - 9 = 7 \to$$

$$\to c^2 = 7 \to c = \sqrt{7}$$

(0/25)

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}}$$

موفق باشید.

«هو العلیم الرزاق»

سؤال : معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ مفروض باشد مرکز و شعاع دایره را بنویسید؟

(دی ماه ۹۷ ـ ۱٫۵ نمره)

نکته : اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله گسترده‌ی یک دایره باشد داریم که :

$O=\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ مرکز دایره

$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ شعاع دایره

جواب سؤال ، طبق نکته بالا داریم که :

$$O\left|\begin{array}{l} -\frac{a}{2}=\frac{-(-6)}{2}=3 \\ -\frac{b}{2}=-\frac{2}{2}=-1 \end{array}\right.$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(2)^2-4(6)}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}(4)=2$$

« هو العلیم الرزاق »

سؤال) ضرائب a و b را در تابع $f(x) = -x^4 + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی $(1,2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد. (نهایی - دی ماه ۹۷)

نکته‌ها:

۱- مختصات نقاط اکسترمم در منحنی تابع صدق می‌کند یعنی اگر (a,b) نقطه‌ی اکسترمم تابع $f(x)$ باشد آن گاه $f(a) = b$.

۲- در توابع چندجمله‌ای، طول نقاط اکسترمم، مشتق اول تابع را صفر می‌کند یعنی اگر (a,b) نقطه‌ی اکسترمم تابع $f(x)$ باشد آن گاه $f'(a) = 0$.

حل سؤال:

طبق نکات بالا داریم:

$$f'(x) = -4x^3 + a \xrightarrow{f'(1)=0} -4 + a = 0 \rightsquigarrow a = 4$$

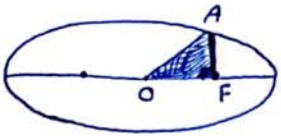
$$(1,2) \in f \xrightarrow[a=4]{f(1)=2} f(1) = -(1)^4 + 4(1) + b = 2 \rightsquigarrow -1 + 4 + b = 2 \rightsquigarrow b = -1$$

موفق باشید

«هو العلیم الرزاق»

سؤال کنکور: اگر قطر بزرگ و کوچک یک بیضی به ترتیب ۱۰ و ۶ باشد مساحت مثلث $O\hat{A}F$ کدام است؟

(F کانون و O مرکز بیضی است)



۱) ۳ ۲) ۳٫۲ ۳) ۳٫۴ ۴) ۳٫۶

نکات:

۱- فاصله کانونی بیضی برابر $2c$ است.

۲- طول قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

۳- طول قطر کوچک بیضی $2b$ است.

۴- رابطه بین a، b و c برابر است با: $a^2=b^2+c^2$

۵- پاره خطی را که از کانون بیضی عبور می‌کند و بر محور کانونی بیضی عمود است و دو سر ابتدایی و انتهایی آن روی محیط بیضی است وتر کانونی می‌نامیم و طول این وتر $\frac{2b^2}{a}$ است.

حل سؤال: طبق نکات بالا داریم که:

$$\left.\begin{array}{l} \text{طول قطر بزرگ} = 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ \text{طول قطر کوچک} = 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 5^2=3^2+c^2 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow c=4 \Rightarrow OF=4$$

$$\text{نصف وتر کانونی} = AF = \frac{\frac{2b^2}{a}}{2} = \frac{b^2}{a} = \frac{3^2}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\text{مساحت مثلث } O\hat{A}F = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{2} OF \times AF = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{9}{5} = \frac{18}{5} = 3/6$$

موفق باشید

«هو العلیم الرزاق»

سؤال: جدول تغییرات تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را رسم و نقاط max و min نسبی آن را مشخص کنید.
(دی ماه ۹۷_ اغزه)

نکته:

برای رسم جدول تغییرات و بدست آوردن نقاط max و min نسبی تابع f، ابتدا نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم

الف) اگر علامت f' در نقطه بحرانی از مثبت به منفی تغییر کند آن‌گاه آن نقطه max نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در نقطه بحرانی از منفی به مثبت تغییر کند آن‌گاه آن نقطه min نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در نقطه بحرانی تغییر علامت ندهد آن‌گاه تابع f در آن نقطه max یا min نسبی ندارد.

حل سؤال:

$$f'(x)=6x^2+6x-12$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 6x^2+6x-12=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)=6x^2+6x-12$		+	0	−	0	+	
$f(x)=2x^3+3x^2-12x$		صعودی	20 max نسبی	نزولی	−7 min نسبی	صعودی	

نقطه max نسبی تابع f $\begin{vmatrix} -2 \\ 20 \end{vmatrix}$

نقطه min نسبی تابع f $\begin{vmatrix} 1 \\ -7 \end{vmatrix}$

« هو العلیم الرزاق »

سؤال) اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه $[-1,3]$ بیابید.

نکته ها:

۱- نقاط max و min یک تابع را نقاط اکسترمم آن تابع می گویند.

۲- مراحل یافتن اکسترمم های مطلق تابع پیوسته f در بازه بسته ی $[a,b]$:

الف) مشتق تابع را بدست آورده و نقاط بحرانی f را می یابیم.

ب) مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می کنیم.

ج) در مرحله ب، بزرگترین عدد بدست آمده، مقدار max مطلق تابع و کوچکترین آن ها min مطلق تابع در بازه $[a,b]$ است.

حل سؤال:

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \in [-1,3] \rightarrow & x=1 \text{ بحرانی است.} \\ x=-2 \notin [-1,3] \rightarrow & x=-2 \text{ بحرانی نیست.} \end{cases}$$

$f(1)=2(1)^3+3(1)^2-12(1)=-7 \rightarrow$ مطلق min $\left|\begin{smallmatrix}1\\-7\end{smallmatrix}\right.$

$f(-1)=2(-1)^3+3(-1)^2-12(-1)=13$

$f(3)=2(3)^3+3(3)^2-12(3)=45 \rightarrow$ مطلق max $\left|\begin{smallmatrix}3\\45\end{smallmatrix}\right.$

موفق باشید.

سؤال) مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-2|$ را در $x=2$ بررسی کنید. (دی ماه ۹۷- اغزه)

نکته :

تابع f در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر است هرگاه مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ وجود داشته باشند و با هم برابر باشند.

حل سؤال)

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)}{(x-2)}=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)}=-1$$

$\Rightarrow f'_+(2)\neq f'_-(2) \Rightarrow$ تابع $f(x)=|x-2|$ در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ باشد مقدار $(g^{-1}of^{-1})(5)$ را بدست آورید. (۰/۵ نمره - دی ماه ۹۷)

نکته ۱: چگونگی بدست آوردن ضابطه تابع وارون f :

برای پیدا کردن ضابطه‌ی تابع وارون، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱- به جای $f(x)$، y را جایگذاری می‌کنیم.

۲- x را در معادله برحسب y پیدا می‌کنیم.

۳- اسم x و y را عوض می‌کنیم و در نهایت به جای y از $f^{-1}(x)$ استفاده می‌کنیم.

نکته ۲: در ترکیب دو تابع مانند f و g داریم که:

$$(fog)(a)=f(g(a))$$

حل سؤال:

یافتن ضابطه تابع وارون f : $y=\frac{1}{8}x-3 \to y+3=\frac{1}{8}x \to x=8y+24 \Rightarrow y=8x+24$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=8x+24$$

یافتن ضابطه تابع وارون g : $y=x^3 \to \sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x^3} \to \sqrt[3]{y}=x \Rightarrow y=\sqrt[3]{x}$

$$\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}\left(f^{-1}(5)\right)=g^{-1}(64)=4$$

$f^{-1}(5)=8(5)+24=40+24=64$

$g^{-1}(64)=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$

سؤال: توابع $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را در نظر بگیرید. دامنه fog را با استفاده از تعریف بدست آورید.
(دی ماه ۹۷ _ ۱،۲۵ نمره)

نکته ۱: داریم که:

1) $(fog)_{(x)}=f(g(x))$

2) $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

نکته ۲)

الف) دامنه توابع چندجمله‌ای برابر با $\mathbb{R}$ است.

ب) دامنه‌ی توابع گویای کسری، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

حل سؤال: ابتدا دامنه‌ی توابع $f(x)$ و $g(x)$ را بدست می‌آوریم سپس با توجه به تعریف دامنه fog، آن را بدست می‌آوریم:

$$g(x)=3x-1 \rightsquigarrow D_g=\mathbb{R}$$

$$f(x)=\frac{x+3}{2x} \xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} 2x=0 \rightsquigarrow x=0 \rightsquigarrow D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{(3x-1)\in\mathbb{R}-\{0\}}_{\Downarrow}\}=\mathbb{R}-\{\tfrac{1}{3}\}$$

$$3x-1\neq 0 \rightsquigarrow x\neq\frac{1}{3}$$

سؤال : دامنه تابع $f(x)=\tan(2x)$ را بدست آورید. (دی ماه ۹۷ - ۰/۵ نمره)

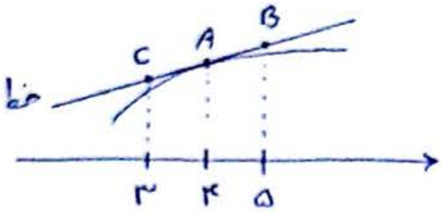
نکته : دامنه ی تابع $f(x)=\tan(bx)$ از رابطه ی زیر بدست می آید :

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} \mid bx\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \; ; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

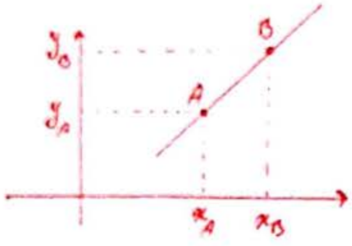
حل سؤال : با توجه به نکته بالا داریم :

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 2x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \; , k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \; ; k\in\mathbb{Z}\right\}$$

سؤال: برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4)=1/5$ و $f(4)=24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید. (دی ماه ۹۷ - ۰/۷۵ نمره)

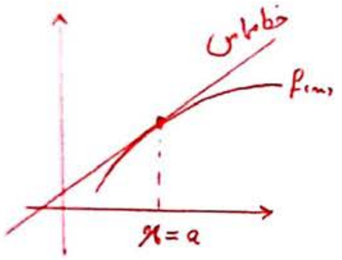


نکته‌ها:



۱- شیب خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ می‌گذرد، عبارتست از:

$$\overbrace{m_{AB}}^{\text{شیب}}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$



۲- شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ عبارتست از:

شیب خط مماس $m = f'(a)$

بر تابع $f(x)$ در $x=a$

حل سؤال:

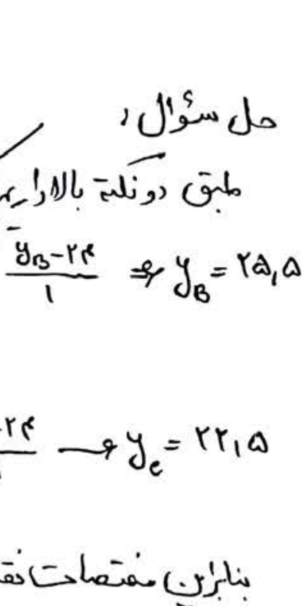
طبق دو نکته‌ی بالا داریم که:

$$f'(4)=m_{AB} \rightarrow 1/5=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \rightarrow 1/5=\frac{y_B-24}{5-4} \rightarrow 1/5=\frac{y_B-24}{1} \rightarrow y_B=25/5$$

$$f'(4)=m_{AC} \rightarrow 1/5=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A} \rightarrow 1/5=\frac{y_C-24}{3-4} \rightarrow 1/5=\frac{y_C-24}{-1} \rightarrow y_C=22/5$$

بنابراین مختصات نقاط A و B و C عبارتند از:

$A\Big|\begin{matrix}4\\24\end{matrix}$ و $B\Big|\begin{matrix}5\\25/5\end{matrix}$ و $C\Big|\begin{matrix}3\\22/5\end{matrix}$



سؤال: حد زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 1}{-3x^5 + 3x^2 + 3}$$

نکته:

برای حد توابع کسری گویا وقتی $x \to \pm\infty$ میل می‌کند داریم که:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + l}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + l'} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\text{جمله دارای بزرگترین درجه}}{\text{جمله دارای بزرگترین درجه}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^n}{a'x^m} = \begin{cases} \dfrac{a}{a'} & ; m = n \\ 0 & ; n < m \\ \pm\infty & ; n > m \end{cases}$$

- $m = n$ → درجه صورت و مخرج برابر هستند
- $n < m$ → درجه مخرج بزرگتر است.
- $n > m$ → درجه صورت بزرگتر است.

$\pm\infty$ → بستگی به علامت x، a و a' دارد.

حل سؤال: طبق نکته بالا داریم که:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 1}{-3x^5 + 3x^2 + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5}{-3x^5} = -\frac{4}{3}$$

«هو العلیم الرزاق»

سؤال: بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^3-12x+4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

نکته:

در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آن‌گاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

حل سؤال: طبق نکته داریم که:

$$f'(x)=3x^2-12 \xrightarrow{f'=0} 3x^2-12=0 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=4$$

$$\Rightarrow x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)=3x^2-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)=x^3-12x+4$		$\nearrow$	20	$\searrow$	-12	$\nearrow$	

طبق جدول تعیین علامت، بزرگترین بازه که تابع در آن نزولی اکید است $(-2,2)$ است.

«هو العلیم الرزاق»

سؤال) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه‌ی $t=9$ چقدر است؟ (دی ماه ۹۷ - ۰/۷۵ نمره)

نکته: آهنگ لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ی $x=a$ همان مشتق تابع f در نقطه‌ی $x=a$ یعنی $f'(a)$ است.

حل سؤال: طبق نکته داریم که:

$$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+2t \xrightarrow{t=9} m'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}+2(9)=\frac{1}{2\times 3}+18=\frac{1}{6}+18=\frac{109}{6}$$

حد تابع زیر را بدست آورید. (دی ماه ۹۷ - ۰/۵ نمره)

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3}=$$

نکته ۱ : $\dfrac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفر حدی}}=\infty \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{+\text{عدد}}{0^+}=+\infty \\ \dfrac{-\text{عدد}}{0^+}=-\infty \\ \dfrac{+\text{عدد}}{0^-}=-\infty \\ \dfrac{-\text{عدد}}{0^-}=+\infty \end{cases}$

پاسخ :

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3}=\frac{[3^-]-3}{3^--3}=\frac{2-3}{0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

«هو العلیم الرزاق»

سؤال) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[3,4]$ چقدر است؟ (دی ماه ۹۷ - ۱ نمره)

نکته:

آهنگ متوسط تغییر تابع پیوسته $f(x)$ در بازه $[a,b]$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

حل سؤال:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(4)-x(3)}{4-3}=\frac{130-(\sqrt{3}+54)}{1}=76-\sqrt{3}$$

«هو العلیم الرزّاق»

سؤال) اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2)=3$ ، $f'(2)=1$ ، $g(2)=-3$ و $g'(2)=2$ مقادیر $(fg)'(2)$ و $(f+g)'(2)$ را بدست آورید. (۲۵، اغزه - دی ماه ۹۷)

نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق پذیر باشند آن گاه:

الف) $(f+g)'_{(a)}=f'(a)+g'(a)$

ب) $(fg)'_{(a)}=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

حل سؤال:

$(fg)'_{(2)}=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=1\times(-3)+3\times2=3$

$(f+g)'_{(2)}=f'(2)+g'(2)=1+2=3$

موفق باشید

سؤال: ضابطه‌ی تابعی به فرم $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن ۳- باشد. (دی ماه ۹۷ - البرز)

نکته: برای بدست آوردن ضابطه تابع مثلثاتی $y=a\sin bx+c$ با توجه به مقادیر داده شده، از روابط زیر استفاده م

$$T=\frac{2\pi}{|b|}$$

$$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}$$

$$|a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}$$

حل

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \rightsquigarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{\pi}=2 \rightsquigarrow b=\pm 2$$

$$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{3+(-3)}{2}=\frac{0}{2}=0 \rightsquigarrow c=0$$

$$|a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{3-(-3)}{2}=\frac{3+3}{2}=\frac{6}{2}=3 \rightsquigarrow |a|=3 \rightsquigarrow a=\pm 3$$

هر یک از سه تابع $y=3\sin 2x$ یا $y=-3\sin 2x$ و یا $y=3\sin(-2x)$ جواب مسئله است.

" هوالعلیم الرزاق "

تست کنکور: نمودار تابع $y=-\frac{1}{3}x^2$ را طوری انتقال می‌دهیم، رأس آن بر (۴،۳) منطبق شود. نمودار حاصل، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱ و ۵ ۲) ۱- و ۵ ۳) ۱ و ۷ ۴) ۱- و ۷

نکته:

در تابع $y=f(x)$ داریم $(k>0)$:

۱) $y=f(x+k)$، منحنی k واحد به سمت چپ منتقل می‌شود.

۲) $y=f(x-k)$، منحنی k واحد به سمت راست منتقل می‌شود.

۳) $y=f(x)+k$، منحنی k واحد به بالا منتقل می‌شود.

۴) $y=f(x)-k$، منحنی k واحد به پایین منتقل می‌شود.

حل) رأس نمودار $y=-\frac{1}{3}x^2$ نقطه‌ی (۰،۰) است برای انتقال به نقطه‌ی (۴،۳) طبق نکات بالا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$y=-\frac{1}{3}(x-4)^2+3$$

حال برای یافتن نقطه‌ی تماس با محور طول‌ها، معادله‌ی $y=0$ را حل می‌کنیم:

$$y=-\frac{1}{3}(x-4)^2+3=0 \Rightarrow (x-4)^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x-4=3 \Rightarrow x=7 \\ x-4=-3 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

«هو العلیم الرزاق»

تست ۲) اگر $f(x)=[x+\frac{3}{2}](x+x^2-1)$ ، مقدار $f'(\frac{3}{4})$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

نکته:

گاهی بهتر است ضابطه تابع را ساده کنیم، سپس مشتق آن را بیابیم. مثلاً وقتی ضابطه تابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح است، ابتدا ضابطه ی تابع را به کمک تعیین علامت و بازه بندی، بدون قدرمطلق و جزء صحیح می نویسیم.

حل تست ۲) توجه کنید که در یک همسایگی نقطه ی $x=\frac{3}{4}$ داریم که:

$$2<x+\frac{3}{2}<3 \rightarrow \left[x+\frac{3}{2}\right]=2$$

پس:

$$f(x)=2x+2x^2-2 \Rightarrow f'(x)=2+4x \Rightarrow f'(\frac{3}{4})=2+4(\frac{3}{4})=5$$

حد تابع زیر را بدست آورید. (دی ماه ۹۷ - ۱ نمره)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{3^2-9}{\sqrt{3+1}-2}=\frac{9-9}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{2-2}=\frac{0}{0}$$ مبهم

نکته:

۱- اگر در حد توابع کسری با حالت $\frac{0}{0}$ مواجه شدید باید با تجزیه ی صورت و مخرج و ساده کردن آن ها مقدار حد را بیابید.

۲- اگر صورت یا مخرج کسر شامل عبارت رادیکالی (فرجه ۲) باشد، باید صورت و مخرج را در مزدوج عبارت شامل رادیکال ضرب کنیم.

۳- اگر صورت و مخرج هر دو شامل عبارت رادیکالی (فرجه ۲) باشند در این صورت دو بار در مزدوج ضرب می کنیم یکبار کسر را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می کنیم و بار دیگر در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می کنیم.

۴- در حدهای رادیکالی با فرجه ۳، اگر قسمت لاغر آن در کسر بود، کسر را در قسمت چاق ضرب و تقسیم می کنیم و بالعکس.

۵- اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج:

اتحادها چاق و لاغر

$$\begin{cases}(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3\\(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3\end{cases}$$

اتحاد مزدوج: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

ادامه پاسخ سؤال:

رفع ابهام: $$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)}{(\sqrt{x+1}-2)}\times\frac{(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-(2)^2}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)$$

$$=(3+3)(\sqrt{3+1}+2)=6(\sqrt{4}+2)=6(2+2)=6\times 4=24$$

سؤال ۱: اگر $f(x)=1-2x^2$ باشد $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید. (دی ماه ۹۷ - ۰/۷۵ نمره)

نکته:

تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$:

فرض کنید $x=a$ نقطه‌ی درونی تابع $f(x)$ باشد در این صورت مشتق تابع $y=f(x)$ در $x=a$ را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{یا} \qquad f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

البته مشتق تابع $f(x)$ در $x=a$ زمانی وجود دارد که این حد وجود داشته و دارای مقدار متناهی و مشخص باشد.

توجه:

در تعریف بالا برای محاسبه $f'(a)$ دو فرمول بیان شد که این فرمول‌ها معادل هم هستند و شما دانش‌آموزان گرامی برای حل این گونه سؤالات می‌توانید به اختیار از هر کدام از فرمول‌ها استفاده کنید و نمره کامل را دریافت نمائید.

حل سؤال از طریق هر دو فرمول:

فرمول ۱: $f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1-2x^2-(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-2x^2+2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{-2(x^2-1)}{x+1}=$

$f(-1)=1-2(-1)^2=1-2(1)=1-2=-1$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{-2(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to -1}-2(x-1)=-2(-1-1)=4$$

فرمول ۲: $f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-2(-1+h)^2-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-2(1+h^2-2h)+1}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-2-2h^2+4h+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-2h+4)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(-2h+4)=4$$

سؤال) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (۰/۲۵ نمره - دی ماه ۹۷)

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق پذیر است.

نکته: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن گاه f در $x=a$ مشتق پذیر هم نیست.

حل سؤال: برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $x=0$ داریم که:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}=$$ وجود ندارد زیرا تابع برای $x<0$ تعریف نشده است.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\sqrt{x}=$$ وجود ندارد

بنابراین تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $x=0$ پیوسته نیست و طبق نکته بالا در $x=0$ مشتق پذیر نیز نیست.

پس با اوصاف بالا می‌توان نتیجه گرفت عبارت داده شده در سؤال نادرست است.

سؤال ۱: مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (۲ نمره - دی ماه ۹۷)

الف) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^5$

ب) $g(x) = x^2\left(\sqrt{x+1}\right)$

نکته: برای حل کردن سؤال بالا توجه به قوانین مشتق مورد استفاده در حالت‌های الف و ب ضروری است.

* u و v توابعی برحسب x هستند:

۱) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

۲) $(uv)' = u'v + v'u$

۳) $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

۴) $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

حل سؤال:

الف) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^5 \xrightarrow[\text{و سپس قانون ۱}]{\text{ابتدا قانون ۳}} f'(x) = 5\left(\dfrac{1(2x-1) - 2(x)}{(2x-1)^2}\right)\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)^4$

ب) $g(x) = x^2\left(\sqrt{x+1}\right) \xrightarrow[\text{و سپس استفاده از قانون ۴}]{\text{ابتدا قانون ۲}} g'(x) = 2x\left(\sqrt{x+1}\right) + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)x^2$