مدرس: شیدا الهعدی

نظریهٔ اعداد:

بخش اول: بخش پذیری در اعداد صحیح

* تساوی $15 = 5 \times 3$ را در نظر بگیرید. عدد ۱۵ از سه دسته پنج تایی تشکیل شده است. جور دیگری نیز می‌توانیم بگوییم که در تقسیم عدد ۱۵ بر ۵ خارج قسمت برابر ۳ است و باقی مانده صفر است. به همین خاطر می‌توانیم از یک طرف بگوییم که ۱۵ بر ۵ بخش پذیر است و از طرف دیگر بگوییم که عدد ۵ عدد ۱۵ را می‌شمارد، چون می‌توان ۱۵ را با دسته‌های ۵ تایی شمرد.

(۳ دسته پنج تایی سیب می‌شود ۱۵ سیب و سیبی باقی نمی‌ماند.)

این شمارش یا عاد کردن را در ریاضی با علامت «|» نشان می‌دهند و می‌نویسند:

$5 | 15$

پس:

هر وقت یک حاصل ضرب به صورت $a = bq$ دیدیم، می‌گوییم:

الف) a بر b بخش پذیر است.

ب) b می‌شمارد (عاد می‌کند) a را.

ج) منظور از عدد از این به بعد همیشه عدد صحیح است.

بخش پذیری: عدد صحیح a (غیرصفر) را شمارندهٔ عدد b گوییم هرگاه عددی چون q وجود داشته باشد به طوری که $b = aq$ باشد.

* قرارداد: قرارداد می کنیم که صفر، عدد صفر را می شمارد: $0|0$

* ویژگی های رابطهٔ عاد کردن:

۱) برای عدد صحیح a داریم:
الف) $a|0$ ، $\pm 1|a$ و $\pm a|a$
ب) اگر $a|1$ آنگاه $a=\pm 1$
ج) اگر $0|a$ آنگاه $a=0$

نکته: همهٔ اعداد صفر را عاد می کنند اما صفر هیچ عدد غیرصفری را عاد نمی کند.

مثال: به ازای چند عدد طبیعی n داریم: $2n^2+n-2|1$ ؟

خوب ← ببین چون $P(n)|1 \xrightarrow{\text{پس}} P(n)=\pm 1$

در نتیجه:

$P(n)=1 \rightarrow 2n^2+n-2=1 \rightarrow 2n^2+n-2-1=0$
$\Rightarrow 2n^2+n-3=0 \xrightarrow{a+b+c=0} n=1$ ، $n=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}\notin N$ غ ق ق

$P(n)=-1 \rightarrow 2n^2+n-2=-1 \rightarrow 2n^2+n-2+1=0$
$\Rightarrow 2n^2+n-1=0$
$\Rightarrow (2n-1)(2n+1)=0$
$\Rightarrow 2n-1=0 \longrightarrow n=\frac{1}{2}\notin N$ غ ق ق
$2n+1=0 \longrightarrow n=-\frac{1}{2}\notin N$ غ ق ق

پس فقط $n=1$ که در این رابطه صدق می کند پس فقط به ازای یک عدد طبیعی رابطه درست است.

۲) اگر $a|b$ آنگاه:

- الف) $-a|-b$ ، $a|-b$ ، $-a|b$
- ب) $ma|mb$ ، $a|mb$ $(m\in\mathbb{Z})$
- پ) اگر $b\neq 0$ باشد آنگاه $|a|\leq|b|$
- ت) $a|b+ma$ $(m\in\mathbb{Z})$
- ث) اگر $b|a$ آنگاه $|a|=|b|$

۳) اگر $a|b$ و $b|c$ آنگاه $a|c$

۴) اگر $a|b$ و $c|d$ آنگاه $ac|bd$

۵) اگر $ab|c$ آنگاه $a|c$ و $b|c$

۶) اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه $a|ma+nb$ $(m,n\in\mathbb{Z})$

مثال ۲) اگر $a|b$ و $a|c$ آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

الف) $a|b+c$ ب) $a|b^2+c$ ج) $a^2|b+c$ د) $a^2|bc$

در این سبک سؤالات گزینه‌ها را بررسی کنید:

الف) $\begin{cases} a|c \\ a|b \end{cases} \Rightarrow a|b+c$ ✓

ب) $a|b \Rightarrow \begin{cases} a|b^2 \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|b^2+c$ ✓

د) $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a^2|bc$ ✓

ج) $\begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a^2=9 \\ b+c=15 \end{matrix} \Rightarrow 9\nmid 15$

پس $a^2\nmid b+c$ پس گزینه‌ی ۳ صحیح نیست.

مدرس: شیما اصغری

مثال ۳ اگر a عددی صحیح و $d|a-4$ و $d|a^2-7a+25$ آنگاه مجموع مقادیر طبیعی ممکن برای d چه عددی است؟

حل $\longrightarrow$ $d|a-4 \xrightarrow{\times a} d|a^2-4a$

$$\left.\begin{matrix} d|a^2-4a \\ d|a^2-7a+25 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{از هم کم}} d|3a-25$$

حال از رابطه‌ی اولی یعنی $d|a-4$ کمک بگیریم:

$$\begin{cases} d|a-4 \\ d|3a-25 \end{cases} \Rightarrow d|3a-25-3(a-4) \Rightarrow d|-13$$
$$\Rightarrow d=\pm 1, \pm 13$$

پس مجموع مقادیر طبیعی ممکن است برای d برابر با:

$$\begin{cases} 13+1=14 \\ -13+1=-12 \\ -13-1=-14 \\ +13-1=12 \end{cases}$$

مثال ۴ چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی به معادله‌ی $xy+x+y^2+2y=0$ وجود دارد؟ ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

* به ۲ روش حل می‌کنیم هر کدام راحت‌تر بود یاد بگیرین :)

روش ۱: این جور وقت‌ها اول یکی از متغیرها را برحسب دیگری می‌نویسیم:

$$xy+x+y^2+2y=0 \Rightarrow x(1+y)=-(y^2+2y) \Rightarrow x=\frac{-(y^2+2y)}{1+y}\in\mathbb{Z}$$

حال برای آن که $\frac{-y^2-2y}{1+y}$ صحیح باشد باید $1+y|-y^2-2y$

خب حالا طبق ویژگی دوم قسمت ۲ اگر $a|b$ پس $a|b+am$ در نتیجه داریم:

$$1+y|-y^2-2y \longrightarrow 1+y|-y^2-2y+y(1+y) \Rightarrow 1+y|-y$$

مدرس: شهید المعزی

دوباره از همین ویژگی استفاده می‌کنیم:

$$1+y \mid -y \Rightarrow 1+y \mid -y+1(y+1) \Rightarrow 1+y \mid 1 \Rightarrow 1+y=\pm 1$$

$$\begin{cases} 1+y=1 \Rightarrow y=0 \\ 1+y=-1 \Rightarrow y=-2 \end{cases}$$

پس y دو مقدار صحیح دارد. در نتیجه دو نقطه با مختصات صحیح داریم.

نکته: چند جمله‌ای $f(n)$ با ضرایب صحیح را در نظر بگیرید. برای یافتن n هایی که $n-a \mid f(n)$ می‌توانیم n هایی را بیابیم که $n-a \mid f(a)$. حالا یه راه حل دیگه:

روش ۲: خب در بالا دیدیم که باید مقادیری برای y پیدا کنیم که $1+y \mid -y^2-2y$

$$1+y=0 \Rightarrow y=-1 \longrightarrow 1+y \mid f(-1) \xrightarrow[-y^2-2y]{f(y)=} 1+y \mid 1 \Rightarrow 1+y=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

پس دو مقدار صحیح برای y وجود دارد. (چقدر راحت تر)

نکته: برای به توان رساندن طرفین رابطه عاد کردن یا حذف توان می‌توانیم به شکل زیر عمل کنیم:

۱) $a \mid b \xrightarrow{n\in N} a^n \mid b^n$

۲) $a \mid b \xrightarrow{n\leq m} a^n \mid b^m$

۳) $a^n \mid b^m \xrightarrow{n\geq m} a \mid b$

مثال: $7^{200}-1$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

حل: می‌دانیم $7^{200}-1=49^{100}-1$ و همواره برای هر $n\in N$ داریم:

$$a-b \mid a^n-b^n \xrightarrow[b=1,\,n=100]{a=49} 49-1 \mid 49^{100}-1 \Rightarrow 48 \mid 49^{100}-1$$

$$\xrightarrow[12\mid 48]{} 12 \mid 49^{100}-1$$

بنابراین $7^{200}-1$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

نکته: با فرض صحیح بودن اعداد a و b و برای اعداد صحیح n و m (طبیعی) داریم:

① $a-b \mid a^n-b^n \ (n\in\mathbb{N}) \xrightarrow{\text{به طور ویژه}} a^m-b^m \mid a^n-b^n$

n مضرب m است.

② $a+b \mid a^n-b^n$ (n زوج) $\xrightarrow{\text{به طور ویژه}} a^m+b^m \mid a^n-b^n$

n مضرب زوج m است.

③ $a+b \mid a^n+b^n$ (n فرد) $\xrightarrow{\text{به طور ویژه}} a^m+b^m \mid a^n+b^n$

n مضرب فرد m است.

تمرینات

۱- کدام یک از نتیجه گیری های زیر صحیح است؟

الف) $a\mid bc \Rightarrow a\mid b$　　ب) $a\mid b^n \Rightarrow a\mid b$

ج) $a\mid b+c \Rightarrow a\mid b$　　د) $ac\mid b \Rightarrow a\mid b$

۲- باقی مانده تقسیم بزرگ ترین عدد طبیعی n بر ۴ که در رابطه $n^2+1 \mid 6n+1$ صدق می کند را بیابید.

۳- اگر $13 \mid 11x+7y$ و $13 \mid 10x+ky$ آن گاه k کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

الف) ۲　　ب) ۴　　ج) ۶　　د) ۸

۴- باقی مانده ی تقسیم $19^{66}+11^{66}$ بر ۲۴ را بیابید.

۵- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، 3^n-2^n بر ۶۵ بخش پذیر است؟

۱) ۱۶　　۲) ۱۸　　۳) ۲۰　　۴) ۲۲

مدرس: شیدا اسعدی

پاسخ نامه تمرین های صفحه ی ۶ :

۱ بررسی گزینه ها

۱) $۴|۶\times۱۰ \not\Rightarrow ۴|۶\ ,\ ۴|۱۰$

۲) $۸|۲^{۴} \not\Rightarrow ۸|۲$

۳) $۴|۳+۵ \not\Rightarrow ۴|۳\ ,\ ۴|۵$

اما در گزینه ی چهارم داریم:

$$ac|b \rightarrow b=acq \rightarrow b=a(\underbrace{cq}_{q'}) \rightarrow b=aq' \rightarrow a|b \checkmark$$

۲ اول روش اول:

چون می دانیم که اگر $a|b$ آنگاه $a\leq b$ است پس:

$$n^{۲}+۱\,|\,۶n+۱ \rightarrow n^{۲}+۱ \leq ۶n+۱ \rightarrow n^{۲}-۶n \leq ۰ \rightarrow ۰\leq n\leq ۶$$

حال می دانیم که چه مقادیر n ای در این بازه قرار می گیرد یا بازرسی و خطا داریم:

$$n=۶ \rightarrow ۶^{۲}+۱\,|\,۶(۶)+۱$$

ولی روش دوم که بهتر هست برای حل تشریحی سؤال:

$$\begin{cases} ① & n^{۲}+۱\,|\,۶n+۱ \xrightarrow{\times(۶n-۱)} n^{۲}+۱\,|\,(۶n+۱)(۶n-۱)=۳۶n^{۲}-۱ \\ ② & n^{۲}+۱\,|\,n^{۲}+۱ \xrightarrow{\times ۳۶} n^{۲}+۱\,|\,۳۶n^{۲}+۳۶ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②-①} n^{۲}+۱\,|\,۳۷ \Rightarrow n^{۲}+۱=\pm۱ \text{ و } \pm۳۷$$

از آن جایی که همیشه $n^{۲}$ (چون توان دو دارد) مثبت است پس:

$$n^{۲}+۱=۳۷ \Rightarrow n^{۲}=۳۶ \xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{} n=۶$$

که با توجه به تقسیم ۶ بر ۴ می شود ۲ .

$$\begin{cases} 13 \mid 11x+7y \xrightarrow{\times 5} 13 \mid 55x+35y \\ 13 \mid 13x+13y \xrightarrow{\times 5} 13 \mid 65x+65y \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم کنید}}$$

$$13 \mid 65x+65y-55x+35y \Rightarrow 13 \mid 10x+30y \xrightarrow{\text{کم کنید}} 13 \mid 10x+4y$$

از طرفی $13 \mid 26y$

(خیلی راحت بود)

چون $13 \mid 10x+ky$ پس $k=4$ قابل قبول است:

۴ می دانیم که $a^m+b^m \mid a^n+b^n$ ، پس از n مضرب فرد m باشد پس:

$$11^2+19^2 \mid (11^2)^{33}+(19^2)^{33} \Rightarrow 482 \mid 11^{66}+19^{66}$$

$$\xrightarrow{241 \mid 482} 241 \mid 11^{66}+19^{66}$$

۵ می دانیم که $a^m-b^m \mid a^n-b^n$ (برای nهای مضرب m) را از آن جایی که $65=3^4-2^4$ پس اگر $4 \mid n$ آن گاه $65 \mid a^n-b^n$ را. حال تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۴ برابر است با:

$$\frac{96-12}{4}+1=22$$

مدرس: شیدا اسعدی

قضیه‌ی تقسیم:

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت (با تقسیم a بر b)

اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می‌شوند به طوری که:

$0 \leqslant r < b$ و مقسوم ← $a = bq + r$ → باقی مانده

مقسوم علیه ← b ، خارج قسمت ← q

نکته: بیشترین مقداری که r می‌تواند داشته باشد $b-1$ است.

مثال ۶: چند عدد طبیعی سه‌رقمی داریم که باقی ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۴ است؟

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۲۸ ۳) ۱۲۹ ۴) ۱۳۰

حل: اینقدر گزینه‌ها به هم نزدیک شده که باید با دقت تمام حل کنیم:

$$a = bq + r \xrightarrow[r=4]{b=7} a = 7q + 4 \xrightarrow[\text{۳ رقمی}]{100 \leqslant a \leqslant 999} 100 \leqslant 7q + 4 \leqslant 999$$

$$\longrightarrow 100 - 4 \leqslant 7q \leqslant 999 - 4$$

$$\Longrightarrow \frac{100-4}{7} \leqslant q \leqslant \frac{999-4}{7}$$

$$14 \leqslant q \leqslant 142$$

حال $142 - 14 + 1 = 129$ پس ۳ درست است.

مثال ۷: اگر باقی مانده‌ی تقسیم a بر ۸ و ۷ به ترتیب برابر با ۷ و ۵ باشد، باقی ماندهٔ تقسیم $2a^2+5$ بر ۵۶ کدام است؟

پاسخ:

طبق قضیه تقسیم

$$\begin{cases} a = 8q + 7 \xrightarrow{\times 7} 7a = 56q + 49 \\ a = 7q' + 5 \xrightarrow{\times 8} 8a = 56q' + 40 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a = 56(q' - q) + (-9)$$

پس باقی ماندهٔ تقسیم a بر ۵۶ برابر ۹- یا ۴۷ است. بنابراین داریم:

$$a = ۵۶(q' - q - 1) + ۵۶ - ۹$$
$$= ۵۶q'' + \underline{۴۷}$$ مثلث ۴۷ جمله بالا

$$۲(-۹)^۲ + ۵ = ۱۶۲ + ۵ = ۱۶۷ = ۵۶(۲) + ۵۵$$

پس $۲a^۲ + ۵ = ۵۶q''' + ۵۵$ ✓✓✓

مثال: مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷، باقی ماندهٔ آن، توان دوم خارج قسمت باشد کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

اول ببین که سؤال چی میخواد: باقی مانده برابر توان دوم خارج قسمت است یعنی ($r = q^۲$) پس طبق قضیهٔ زیبای تقسیم داریم:

$$a = bq + r \xrightarrow[b=۴۷]{r=q^۲} a = ۴۷q + q^۲ \xRightarrow{۰ \leq r < b} ۰ \leq q^۲ < ۴۷ \longrightarrow q_{max} = ۶$$

پس بیشترین مقدار برای a می‌شود:

$$a_{max} = ۴۷(۶) + ۶^۲ = ۳۱۸ \rightarrow \text{جمع ارقام} = ۳ + ۱ + ۸ = ۱۲$$

پس ۳ صحیح است.

مثال ۹ در یک تقسیم مقسوم ۱۸ برابر باقی مانده و باقی مانده برابر با حداکثر مقدار خود است.
در این تقسیم، مجموع مقسوم و مقسوم علیه کدام است؟

حل اول بنویسیم که چه می‌خواد:

در قضیه تقسیم $a=bq+r$ حداکثر مقدار باقی مانده $b-1$ است، از آن جایی که مقسوم ۱۸ برابر باقی مانده است پس داریم:

$$a=18r=18(b-1)\xrightarrow[r=b-1]{a=bq+r}18(b-1)=bq+(b-1)$$

$$\Rightarrow 18b-18=bq+b-1\Rightarrow 17b-bq=17$$

$$\Rightarrow b(17-q)=17$$

حالا، از اون جایی که ۱۷ عددی اول است پس دو حالت داریم:

$$1)\begin{cases}b=17\\17-q=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=17\\q=16\\r=b-1=16\\a=18r=18\times16=288\end{cases}\Rightarrow a+b=288+17=305$$

$$2)\begin{cases}b=1\\17-q=17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\q=0\\r=b-1=0\\a=18r=0\end{cases}\Rightarrow a+b=1$$

که هر دو حالت را قبول داریم.

مثال ۱۰ اگر در یک تقسیم ۵۴ واحد از مقسوم کم کنیم، ۳ واحد از خارج قسمت کم شود، مقسوم علیه تغییر نکرده و باقی مانده ۶ واحد افزایش می‌یابد، مقدار مقسوم علیه در این تقسیم کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

حل $a-54=b(q-3)+(r+6)\Rightarrow a-54=\underbrace{bq+r}_{a}-3b+6$

$\Rightarrow -54=-3b+6\Rightarrow 3b=60\Rightarrow b=20$ ✓ پس ۳ درست است.

مدرس: ناهید السعدی

نکته: برای حل سؤال قبلی، در قضیه تقسیم داشتیم $a=bq+2$ ، ۵۴ واحد از مقسوم (a) و ۳ واحد از خارج قسمت (q) کم و ۶ واحد به باقی مانده (r) اضافه کردیم برای همین شکل کلی را تغییر دادیم.

افراز اعداد صحیح به کمک قضیهٔ تقسیم:

اعداد صحیح بر اساس باقی ماندهٔ تقسیم شان بر b به یکی از b صورت زیر قابل نوشتن هستند:

$$bk, bk+1, bk+2, \ldots, bk+\underbrace{(b-1)}_{\text{بیشترین مقدار ممکن برای } r}$$

نکته ۱: هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از دو صورت $2k+1$ و یا $2k$ (زوج یا فرد) نوشت.

نکته ۲: هر عدد اول $p>3$ را می‌توان به یکی از دو صورت $p=6k+1$ و یا $p=6k+5$ نوشت.

نکته ۳: هر عدد صحیح و فرد را می‌توان به یکی از دو صورت $4k+1$ و $4k+3$ نوشت.

نکته ۴: مربع هر عدد صحیح فرد به فرم $8k+1$ است.

مثال ۱: عدد $5^{22}+7$ بر کدام یک از اعداد زیر همواره بخش پذیر است؟

۱) ۸ ۲) ۱۱ ۳) ۱۶ ۴) ۱۴

حل: دقت کنید ⇐ 5^{11} عددی فرد است و مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است.

پس:

$$5^{22}+7=(5^{11})^2+7$$

$$\xrightarrow[(5^{11})^2=8k+1]{} 8k+1+7=8k+8=8(k+1)$$

پس $5^{22}+7$ بر ۸ بخش پذیر است. پس ۱ درست است.

مدرس: شهلا اسعدی

تمرینات بخش دوم و یادآوری بخش اول :

۶ کدام یک از نتیجه گیری های زیر نادرست است؟

۱) $a^2 | c^4 \Rightarrow a|c$ ۲) $a|b, b|c \Rightarrow a|c$

۳) $ab|c \Rightarrow a|c$ ۴) $a|bc \Rightarrow a|c$

۷ اگر $112 | b^3$ و $135 | a^2$ ، کم ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۷۳ ۳) ۵۳ ۴) ۵۹

۸ به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، $28 | 3^n - 1$ و $39 | 5^n - 1$ درست است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹ اگر باقی مانده ی تقسیم a بر ۱۳ و ۱۰ به ترتیب برابر با ۵ و ۴ باشد باقی ماندهٔ تقسیم a بر ۱۳۰ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۴

۱۰ اگر a عددی اول و دو رقمی باشد ، باقی ماندهٔ تقسیم a^4+4a^2+5 بر ۶ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱ اگر باقی مانده ی تقسیم اعداد a و 2a بر b به ترتیب برابر با ۱۳ و ۹ باشد باقی ماندهٔ تقسیم عدد ۴۱ بر b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۲ اگر باقی مانده ی تقسیم a و 2a بر b به ترتیب ۶ و ۴ باشد ، اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین مقدار b کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۲

۱۳ اگر باقی ماندهٔ تقسیم عدد فرد a بر ۱۳ برابر با ۱۰ باشد ، باقی ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۲۶ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱۰ ۳) ۱۳ ۴) ۲۳

۱۴ اگر عبارت $3x^3+9x^2$ مربع کامل باشد، آن گاه باقی ماندهٔ تقسیم بیشترین عدد دو رقمی x بر ۵ کدام است؟

۱) ۱　　۲) صفر　　۳) ۲　　۴) ۴

۱۵ در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b، خارج قسمت، مجذور باقی مانده است. چند عدد b می توان یافت؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۱۶ اگر در یک تقسیم مقسوم برابر با ۱۷۱ بوده و مجموع مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی مانده برابر با ۲۹ باشد، مجموع خارج قسمت و باقی مانده کدام یک از اعداد زیر می تواند باشد؟

۱) ۱۷　　۲) ۱۸　　۳) ۱۹　　۴) ۲۰

۱۷ اگر a عددی اول و دو رقمی باشد باقی ماندهٔ تقسیم a^4+4a^2+5 بر ۶ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۱۸ در تقسیم اعداد ۱۴۸ و ۱۰۰ بر عدد دو رقمی b، باقی مانده ها به ترتیب ۵ و ۴ می باشند، مجموع ارقام عدد b کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۵　　۳) ۶　　۴) ۷

۱۹ کدام یک از اعداد زیر را می توان به صورت حاصل ضرب دو عدد $6k+2$ و $6k'+5$ نوشت؟

۱) ۶۶۱　　۲) ۶۶۳　　۳) ۶۶۵　　۴) ۶۶۷

۲۰ کدام یک از نتیجه گیری های زیر درست است؟

۱) $7|(a^2+b^2) \Rightarrow 49|ab$　　۲) $8|a^2+b^2 \Rightarrow 64|ab$

۳) $9|a^2+b^2 \Rightarrow 81|ab$　　۴) $10|a^2+b^2 \Rightarrow 100|ab$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد یا ب.م.م

ب.م.م: عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دارای دو شرط زیر باشد:

الف) $d|a \,,\, d|b$ ب) $\forall m>0 ;\ m|a \,,\, m|b \rightarrow m\leq d$

«نکات ب.م.م:»

۱) $(a,b)=(-a,b)=(a,-b)=(-a,-b)$

۲) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

۳) اگر k عدد طبیعی باشد: $(ka,kb)=k(a,b)$

۴) اگر n عدد طبیعی باشد: $(a^n,b^n)=(a,b)^n$

۵) اگر $a=bq+r$ آنگاه $(a,b)=(b,r)$

مثال: اگر عدد طبیعی n مضرب ۷ نباشد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^2+9n+21$ و $n+7$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ و ۳ ۳) ۱ و ۵ ۴) ۷

فرض کنید ب.م.م دو عبارت d باشد، طبق تعریف ب.م.م داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d|n^2+9n+21 \\ d|n+7 \xRightarrow{\times -n} d|-n^2-7n \end{array}\right\} \xRightarrow{+} d|2n+21$$

$$\left.\begin{array}{l} d|2n+21 \\ \text{از طرفی}: d|n+7 \xRightarrow{\times 2} d|2n+14 \end{array}\right\} \xRightarrow{-} d|7 \Rightarrow d=1 \text{ یا } 7$$

چون $n\neq 7k$ پس d نمی‌تواند ۷ باشد، پس $d=1$ است.

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد یا ک.م.م

ک.م.م : عدد طبیعی c را (ک.م.م) دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $c=[a,b]$ ، هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد :

الف) $a|c \,,\, b|c$ ب) $\forall m>0 ; a|m , b|m \Rightarrow c\leqslant m$

"نکات ک.م.م"

۱) $[a,b]=[b,a]=[-a,b]=[a,-b]=[-a,-b]$

۲) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

۳) $[a,b](a,b)=|ab|$

۴) اگر k عددی طبیعی باشد: $[ka,kb]=k[a,b]$

۵) اگر n عددی طبیعی باشد: $[a^n,b^n]=[a,b]^n$

۶) $(a,[a,b])=|a|$ ، $[a,(a,b)]=|a|$

مثال اگر a و b اعداد صحیح باشند، حاصل $[(a^2,a),(a,b)]$ کدام است؟

۱) $|a|$ ۲) a ۳) b ۴) ab

به همین راحتی که $\Longrightarrow (a^2,a)=|a| \Rightarrow [|a|,\underbrace{(a,b)}_{d}] \overset{d\,|\,|a|}{=\!=\!=} |a|$ ✓

هم‌نهشتی در اعداد صحیح :

هم‌نهشتی : برای هر عدد طبیعی مانند m و هر عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$ می‌گوییم a به پیمانه m هم‌نهشت با b است :

$a \overset{m}{\equiv} b$

مدرس: شیدا العوضی

← در واقع a و b بر m هم باقی مانده هستند.

← اگر r باقی مانده ی تقسیم a بر b باشد ($a=bq+r$) آنگاه a و r به پیمانه b هم نهشت اند.

← رابطه ی هم نهشتی به پیمانه m به زبان ریاضی:

$$\forall a,b,m\in \mathbb{Z};\ a\overset{m}{\equiv}b \Longleftrightarrow m\mid a-b$$

← به مجموعه ی همه ی اعداد صحیح که باقی مانده ی تقسیم آن ها بر m برابر با r باشد، کلاس یا دسته ی هم نهشتی r به پیمانه m می گویند:

$$[r]_m=\{x\in \mathbb{Z}\mid x=mk+r\}$$

← تعداد دسته های هم نهشتی به پیمانه ی m در مجموعه اعداد صحیح برابر m تا است:

$$[a]_m=[b]_m \Longleftrightarrow a\overset{m}{\equiv}b$$

مثال: چند عدد طبیعی سه رقمی a داریم به طوری که $[a]_{17}=[-4]_{17}$ باشد؟

۱) ۵۵ ۲) ۵۴ ۳) ۵۳ ۴) ۵۲

$$[a]_{17}=[-4]_{17} \longrightarrow a\overset{17}{\equiv}-4 \Longrightarrow a=17k-4$$

چون a عددی ۳ رقمی است پس:

$$100\leqslant a\leqslant 999 \Rightarrow 100\leqslant 17k-4\leqslant 999 \Rightarrow 104\leqslant 17k\leqslant 1003$$

$$\Rightarrow \frac{104}{17}\leqslant k\leqslant \frac{1003}{17}$$

$$\xrightarrow{k\in \mathbb{Z}} 7\leqslant k\leqslant 59$$

پس $59-7+1=53$ مقدار برای k وجود دارد.

ویژگی های مهم هم نهشتی:

① هم نهشتی تمام خواص تساوی غیر از تقسیم و رادیکال فرجه زوج را دارد.

الف) $a\overset{m}{\equiv}a$ ، $a\overset{m}{\equiv}b \Longleftrightarrow b\overset{m}{\equiv}a$ ، $\begin{cases} a\overset{m}{\equiv}b \\ b\overset{m}{\equiv}c \end{cases} \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$

ب) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c \in \mathbb{Z}} a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c \ , \ ac \overset{m}{\equiv} bc$

پ) $a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

ت) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \\ ac \overset{m}{\equiv} bd \end{cases}$

۲) اگر دو عدد در پیمانه‌ای هم نهشت باشند، در پیمانه‌ی شمارنده‌های آن عدد نیز هم نهشت هستند:

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{n \mid m} a \overset{n}{\equiv} b$$

۳) می‌توانیم هر سه قسمت یک هم نهشتی را در عددی صحیح دلخواه ضرب کنیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{c \in \mathbb{Z}} ac \overset{mc}{\equiv} bc$$

۴) اگر دو عدد در دو پیمانه هم نهشت باشند، در پیمانه‌ی ک.م.م آن‌ها نیز هم نهشت هستند:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Longleftrightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

۵) به طرفین یک رابطه‌ی هم نهشتی می‌توان ضریبی از پیمانه را اضافه یا کم کرد:

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} a \overset{m}{\equiv} b \pm mk \xrightarrow{k' \in \mathbb{Z}} a \pm mk' \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

۶) برای ساده کردن طرفین هم نهشتی باید دقت کرد و به صورت زیر عمل کرد:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \underset{\frac{m}{(m,c)}}{\equiv} b$$

مثال از رابطه‌ی هم نهشتی $9a \overset{18}{\equiv} 6b$ کدام نتیجه گیری زیر نادرست است؟

۱) $a \overset{2}{\equiv} 0$ ۲) $b \overset{3}{\equiv} 0$

۳) $a \overset{6}{\equiv} 2$ ۴) $3a \overset{6}{\equiv} 2b$

حل $9a \overset{18}{\equiv} 6b \xrightarrow{\div 3} 3a \overset{6}{\equiv} 2b$ ✓

$$3a \overset{6}{\equiv} 2b \Rightarrow \begin{cases} 3a \overset{3}{\equiv} 2b \Rightarrow 2b \overset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow b \overset{3}{\equiv} 0 \\ 3a \overset{2}{\equiv} 2b \Rightarrow 3a \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{2}{\equiv} 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow a \overset{6}{\equiv} 2 \Rightarrow 0 \overset{6}{\equiv} 2$ ✗

می‌توانیم $a=b=0$ را در نظر بگیریم برای گزینه‌ی سوم $9(0) \overset{18}{\equiv} 6(0)$ پس ۳ غلط است.

مثال: اگر عدد طبیعی $2n+1$ بر ۵ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم عدد طبیعی $14n^2+19n+6$ بر عدد ۲۵ کدام است؟ (ریاضی خارج)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

حل: $2n+1$ بر ۵ بخش پذیر است. پس داریم:

$$2n+1 \overset{5}{\equiv} 0 \Rightarrow 2n \overset{5}{\equiv} -1 \overset{5}{\equiv} 4 \xrightarrow{\div 2} n \overset{5}{\equiv} 2 \quad \star$$

از طرفی با تجزیه عبارت $14n^2+19n+6$ داریم:

$$14n^2+19n+6=(2n+1)(7n+6)$$

باتوجه به رابطه ی $\star$، باقی مانده تقسیم $7n+6$ بر ۵ را بدست می آوریم:

$$n \overset{5}{\equiv} 2 \xrightarrow{\times 7} 7n \overset{5}{\equiv} 14 \xrightarrow{+6} 7n+6 \overset{5}{\equiv} 20 \overset{5}{\equiv} 0$$

$$14n^2+19n+6=\underbrace{(2n+1)}_{5k}\underbrace{(7n+6)}_{5k'}=25kk' \Rightarrow 14n^2+19n+6 \overset{25}{\equiv} 0$$

مثال: اگر باقی مانده تقسیم عدد صحیح a بر ۹ و ۷ به ترتیب ۵ و ۶ باشد، باقی مانده تقسیم a بر ۶۳ چگونه است؟

۱) عدد اول ۲) مضرب ۲ ۳) مضرب ۳ ۴) مضرب ۵

پاسخ:

$$\begin{cases} a \overset{9}{\equiv} 5 \xrightarrow{\times 7} 7a \overset{63}{\equiv} 35 \\ a \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{\times 9} 9a \overset{63}{\equiv} 54 \end{cases} \xrightarrow{\text{از هم کم کنیم}} 2a \overset{63}{\equiv} 19 \overset{63}{\equiv} 82 \xrightarrow{\div 2} a \overset{63}{\equiv} 41$$

پس باقی مانده عدد اول است.

حالا روش دوم:

$$\begin{cases} a \overset{9}{\equiv} 5 \overset{9}{\equiv} 41 & +(4\times 9) \\ a \overset{7}{\equiv} 6 \overset{7}{\equiv} 41 & +(5\times 7) \end{cases} \Rightarrow a \underset{[7,9]}{\equiv} 41 \Rightarrow a \overset{63}{\equiv} 41$$

مدرس: شهیدالمعزی

«قوانین بخش پذیری»

عدد $b=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$ را در نظر بگیرید. این عدد را می‌توانیم به فرم زیر نمایش دهیم:

$$b=a_0+10a_1+\cdots+10^{n-1}a_{n-1}+10^na_n$$

آزمون های بخش پذیری:

① الف) عددی بر ۲، ۵ یا ۱۰ بخش پذیر است که اولین رقم سمت راست (یکان) بر ۲، ۵ و یا ۱۰ بخش پذیر باشد.

ب) به طور کلی عددی بر 2^n، 5^n و 10^n بخش پذیر است که n رقم سمت راستش بر 2^n و 5^n، 10^n بخش پذیر باشد، به طور مثال داریم:

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\overset{4}{\equiv}\overline{a_1a_0} \quad \text{و} \quad \overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}\overset{8}{\equiv}\overline{a_2a_1a_0}$$

مثال: به ازای چند مقدار a، باقی مانده تقسیم عدد شش رقمی $\overline{۲۳۸۷a۶}$ بر ۴، برابر ۲ است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

$$\overline{2387a6}\overset{4}{\equiv}\overline{a6}\overset{4}{\equiv}\cancel{10}^{\,2}a+\cancel{6}^{\,2}\overset{4}{\equiv}2a+2\overset{4}{\equiv}2\Rightarrow 2a\overset{4}{\equiv}0$$

$$\xrightarrow{\div 2} a\overset{2}{\equiv}0$$

چون باقیمانده برابر ۲ است.

پس مقادیر ممکن برای a برابر $\{0,2,4,6,8\}$ یعنی ۵ مقدار است.

② الف) عددی بر ۳ یا ۹ بخش پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ یا ۹ بخش پذیر باشد.

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}\overset{9,3}{\equiv}a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0$$

ب) برای پیدا کردن باقی مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۹۹ ارقام عدد را از سمت راست دوتا دوتا جدا کرده و باهم جمع می‌کنیم و سپس به پیمانه ۹۹ می‌بریم:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{99}{\equiv} \overline{a_1 a_0} + \overline{a_3 a_2} + \cdots$$

پ برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد بر ۹۹۹ (۲۷, ۳۷, ۱۱۱, ...) ارقام سمت راست را سه تا سه تا جدا کرده و باهم جمع کنیم و سپس به پیمانه مورد نظر می‌بریم:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \underset{\text{یا} \ldots}{\overset{999}{\equiv}} \overline{a_2 a_1 a_0} + \cdots$$

۴ الف برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۱۱، ارقام را از سمت راست یکی در میان، مثبت و منفی می‌نویسیم و سپس به پیمانه ۱۱ می‌بریم:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - \cdots$$

ب برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد بر ۱۰۱ ارقام را از سمت راست دو تا دو تا جدا کرده و یکی در میان مثبت و منفی می‌نویسیم و سپس به پیمانه ۱۰۱ می‌بریم:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{101}{\equiv} \overline{a_1 a_0} - \overline{a_3 a_2} + \cdots$$

پ برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد بر ۱۰۰۱ (۷ یا ۱۳ یا هر مقسوم علیه ۱۰۰۱) ارقام را از سمت راست سه تا سه تا جدا کرده و یکی در میان مثبت و منفی می‌نویسیم و سپس به پیمانه مورد نظر می‌بریم:

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 \overset{1001 \text{ یا} \ldots}{\equiv} a_2 a_1 a_0 - a_5 a_4 a_3 + \cdots$$

مثال اگر $\overline{2b3a64}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد باقی‌ماندهٔ تقسیم $\overline{5vab}$ بر ۹ کدام می‌تواند باشد؟ ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حل $\overline{2b3a64} \overset{11}{\equiv} 4 - 6 + a - 3 + b - 2 \overset{11}{\equiv} a + b - 7$

$$a + b - 7 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow a + b \overset{11}{\equiv} 7 \xrightarrow[0 \leq a+b \leq 18]{0 \leq a,\, b \leq 9} \begin{cases} a+b=7 \\ a+b=18 \end{cases}$$

چون این عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر است ←

مدرس: شهید الصدری

پس باقی ماندهٔ تقسیم $\overline{5 7 a b}$ بر ۹ بخش پذیر است با:

$\overline{57ab} \overset{9}{\equiv} 5+7+a+b \overset{9}{\equiv} 3+a+b$

$a+b=7 \longrightarrow a+b+3 \overset{9}{\equiv} 10 \overset{9}{\equiv} 1$

$a+b=18 \longrightarrow a+b+3 \overset{9}{\equiv} 21 \overset{9}{\equiv} 3$

«معادلهٔ هم نهشتی»

چون در درس قبل گفتیم پس:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(m,c)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

* معادلهٔ هم نهشتی: معادله‌ای است که به جای تساوی از هم نهشتی در آن استفاده کرده‌ایم.

← معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر: $(a,m) \mid b$

← برای حل معادلات هم نهشتی معمولاً به روش زیر عمل می‌کنیم:

(۱) ضریب مجهول و عدد ثابت را در پیمانه داده شده تا حد امکان کوچک می‌کنیم.
(چه مثبت چه منفی)

(۲) طرفین را در صورت امکان بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.

(۳) اگر تقسیم طرفین به عدد صحیح امکان پذیر نبود ضرایب پیمانه را اضافه و کم می‌کنیم تا ضریب مجهول ساده شود و به عدد یک تبدیل شود.

مثال: معادلهٔ هم نهشتی (پیمانه ۳۱) $72x \equiv 1$ در مجموعه اعداد طبیعی سه رقمی چند جواب دارد؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

حل: هدف اصلی معادلهٔ هم نهشتی آن است که ضریب x برابر یک باشد.

$$72x \overset{31}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 3} 216x \overset{31}{\equiv} 3 \xrightarrow{216 \overset{31}{\equiv} -1} -x \overset{31}{\equiv} 3$$

$$\longrightarrow x \overset{31}{\equiv} -3$$

بنابراین طبق تعریف هم‌نهشتی داریم:

$$x = 31k - 3 \xrightarrow[100 \leq x \leq 999]{} 100 \leq 31k - 3 \leq 999 \Longrightarrow 103 \leq 31k \leq 1002$$

$$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 4 \leq k \leq 32$$

پس $29 = 1 + 4 - 32$ جواب سه رقمی دارد.

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم دو عدد a و $3a+4$ بر 8 یکسان باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^2 - 2a + 3$ بر 4 کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) صفر

حل: a و $3a+4$ به پیمانه ۸ هم‌نهشت هستند:

$$3a+4 \overset{8}{\equiv} a \to 2a \overset{8}{\equiv} -4 \xrightarrow[(2,8)=2]{\div 2} a \overset{4}{\equiv} -2 \to a \overset{4}{\equiv} -2+4 \to a \overset{4}{\equiv} 2$$

$$\Longrightarrow a^2 - 2a + 3 \overset{4}{\equiv} 2^2 - 2(2) + 3 \overset{4}{\equiv} 3$$

مثال: اگر $63x \overset{30}{\equiv} 27y$ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر لزوماً درست نمی‌باشد؟

۱) $x \overset{5}{\equiv} 4y$ ‏ ۲) $4x \overset{5}{\equiv} y$ ‏ ۳) $2x \overset{5}{\equiv} 3y$ ‏ ۴) $4x \overset{5}{\equiv} 3y$

حل: ب.م.م ۹ و ۳۰ برابر ۳ است. پس با تقسیم معادله بر ۹ پیمانه نیز بر ۳ تقسیم می‌شود:

$$63x \overset{30}{\equiv} 27y \xrightarrow{\div 9} 7x \overset{10}{\equiv} 3y \xrightarrow{5 \mid 10} 7x \overset{5}{\equiv} 3y \to 2x \overset{5}{\equiv} 3y \to$$ گزینه‌ی ۳

$$3y \overset{5}{\equiv} 2x \overset{5}{\equiv} 12x \to 3y \overset{5}{\equiv} 12x \xrightarrow{\div 3} y \overset{5}{\equiv} 4x \to$$ گزینه‌ی ۲

$$2x \overset{5}{\equiv} 3y \overset{5}{\equiv} 8y \to 2x \overset{5}{\equiv} 8y \xrightarrow{\div 2} x \overset{5}{\equiv} 4y \to$$ گزینه‌ی ۱

پس ۴ درست است.

۲۱ اگر $(x,10)=5$ و $(y,10)=5$ باشد، حاصل تقسیم $(x+y-5,10)$ بر $(y,10)$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۵　　۳) صفر　　۴) ۲

۲۲ اگر b عددی طبیعی و دو رقمی و $5 \overset{b}{\equiv} 84$ باشد باقی مانده‌ی تقسیم ۱۷ بر b کدام است؟

۱) ۲۰　　۲) ۲۸　　۳) ۲۶　　۴) ۴۸

۲۳ اگر $a \overset{21}{\equiv} 4$ و $a \overset{29}{\equiv} 12$ باشد رقم وسط کوچکترین مقدار طبیعی a کدام است؟

۱) ۶　　۲) ۷　　۳) ۸　　۴) ۹

۲۴ اگر باقی مانده‌ی تقسیم a بر ۱۳ و ۱۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم a بر ۱۱۷ کدام است؟

۱) ۴۷　　۲) ۷۰　　۳) ۵۷　　۴) ۶۰

۲۵ چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر دو عدد ۴ و ۵ برابر یک باشد؟

۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۲۶ باقیمانده تقسیم $\underbrace{111\ldots1}_{1398}$ بر ۱۱۱۱ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۱۱　　۴) ۱۱۱

۲۷ دو رقم سمت راست عدد $3!+6!+9!+\ldots+300!$ کدام است؟

۱) ۰۶　　۲) ۸۶　　۳) ۴۶　　۴) ۶۶

۲۸ به ازای هر عدد طبیعی $n \le n_0$ دو عدد $2n+7$ و $11n-3$ نسبت به هم اول اند. بزرگترین مقدار n_0 کدام است؟

۱) ۳۵　　۲) ۳۷　　۳) ۳۹　　۴) ۴۰

۲۹ اگر عدد $\overline{ab}$ مضرب ۷ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم عدد $8a^3+20b^3$ بر ۷ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۴

۳۰. اگر یک عدد چهار رقمی به صورت $\overline{a70b}$ مضرب ۴۴ باشد ولی مضرب ۵۵ نباشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۳۱. به ازای چند عدد طبیعی فرد دو رقمی x، عبارت $3x^3+11x^2-4x$ مضرب ۷ است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۳۲. چند عدد طبیعی دو رقمی در معادله $x^2 \overset{7}{\equiv} 1$ صدق می‌کند؟

۱) ۳۸ ۲) ۳۹ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

۳۳. چند عدد به صورت $\overline{51xy32}$ وجود دارد که بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۳۴. اگر $207 \overset{15}{\equiv} 426a$ باشد کدام گزینه درست است؟

۱) $a^2-6a \overset{5}{\equiv} 3$ ۲) $a^3-4a \overset{5}{\equiv} 1$ ۳) $a^2+145 \overset{5}{\equiv} 4$ ۴) $7a^2-56 \overset{5}{\equiv} 3$

۳۵. اگر $2x^2-x-6$ مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه رقمی x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۳۶. اگر $46x \overset{32}{\equiv} 6$ باشد کدام نتیجه‌گیری به پیمانه ۸ درست است؟

۱) $x^2-3x \equiv 3$ ۲) $2x^3+x=6$ ۳) $x^4+4x=6$ ۴) $15x-x^2+x^3=7$

۳۷. اگر x بزرگ‌ترین عدد ۳ رقمی باشد که در معادله‌ی هم‌نهشتی $11x+7 \overset{12}{\equiv} 35$ صدق می‌کند، رقم یکان عدد $(137)^x$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۱

۳۸. اگر $x^2+5x \overset{9}{\equiv} -4$ باشد، چه تعداد از مقادیر x، عضو مجموعه‌ی $\{10, 11, \dots, 30\}$ است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

«تقویم نگاری یا روزشماری»

یکی از کاربردهای مهم همنهشتی در تقویم نگاری و محاسبه‌ی روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده است.

← به عنوان مثال: اگر اول آبان در یک سال سه‌شنبه باشد در همان سال ۱۲ بهمن چه روزی از هفته است؟

برای حل دقت کنید که: در این نوع مسئله‌ها ابتدا روزی که مشروع است را صفر در نظر می‌گیریم و بقیه‌ی روزها را به ترتیب شماره‌های ۱ تا ۶ فرض می‌کنیم.

د	ی	ش	ج	پ	چ	س
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

چون روز شروع را صفر فرض می‌کنیم باید فاصله‌ی روز بعد از اول آبان تا روز انتهایی یعنی ۱۲ بهمن را حساب کنیم:

$$29+30+30+12=101 \qquad 101 \overset{7}{\equiv} 3$$

آبان آذر دی بهمن

چون روزهای هفته هر ۷ روز تکرار می‌شود کافی است عدد ۱۰۱ را به پیمانه ۷ حساب کنیم: باقی مانده ۳ می‌شود پس در جدول شماره‌ی ۳ روز جمعه است یعنی ۱۲ بهمن جمعه همان سال است.

باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد توان‌دار:

باقی مانده‌ی تقسیم اعداد توان‌دار بر یک عدد: برای محاسبه‌ی باقی مانده‌ی تقسیم a^k بر m دو حالت داریم:

① a و m نسبت به هم اول باشند:

← توانی از a را حدس می‌زنیم که باقی‌مانده تقسیم آن بر m برابر ۱ یا ۱- باشد.

← با توجه به خواص هم‌نهشتی (به توان رساندن، ضرب عدد و ...) به توان k می‌رسانیم.

مثال باقی‌مانده تقسیم 3^{48} بر ۱۱ چند است؟

$$3^2 \overset{11}{\equiv} 9 \overset{11}{\equiv} -2 \xrightarrow{\text{توان } 2} 3^4 \overset{11}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 3} 3^5 \overset{11}{\equiv} 12 \overset{11}{\equiv} 1$$

توانی از ۳ را پیدا کنید که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۱ عددهای یک یا ۱- شود.

$$3^5 \overset{11}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 9} 3^{45} \overset{11}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 3^3} 3^{48} \overset{11}{\equiv} 27 \overset{11}{\equiv} 5$$

حال برای 3^{48} به راحتی باقی‌مانده به دست آمده است.

② a و m نسبت به هم اول نباشند:

با آزمایش توان‌های متوالی، توانی از a را می‌یابیم که $a^n \overset{m}{\equiv} a$ و با توجه به تناوب به دست آمده مسئله را حل می‌کنیم.

مثال باقی‌مانده‌ی تقسیم 3^{205} بر ۱۰۸ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

حل $3^4 \overset{108}{\equiv} -27 \overset{108}{\equiv} -3^3$

$$3^{205} \overset{108}{\equiv} 3^{201} \times 3^4 \overset{108}{\equiv} 3^{201} \times (-3)^3 \overset{108}{\equiv} -3^{204}$$

$-3^{204} \overset{108}{\equiv} -3^4 \times 3^{200} \overset{108}{\equiv} -(-3)^3 \times 3^{200} \overset{108}{\equiv} 3^{203}$ ← به همین ترتیب

$3^{205} \overset{108}{\equiv} -3^{204} \overset{108}{\equiv} 3^{203} \overset{108}{\equiv} -3^{202} \overset{108}{\equiv} \dots \overset{108}{\equiv} 3^3 \overset{108}{\equiv} 27 \rightarrow$ گزینه سوم

مثال باقی‌مانده تقسیم عدد $6^{60}+3^{60}-2^{60}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

حل از آن جایی که $35=[5,7]$ پس کافی است عدد را به پیمانه ۵ و ۷ ببریم:

$A=6^{60}+3^{60}-2^{60} \overset{5}{\equiv} 1^{60}+(-2)^{60}-2^{60} \overset{5}{\equiv} 1$

$A=6^{60}+3^{60}-2^{60} \overset{7}{\equiv} (-1)^{60}+(3^3)^{20}-(2^3)^{20} \overset{7}{\equiv} 1+(-1)^{20}-1 \overset{7}{\equiv} 1$

$\Rightarrow A \overset{[5,7]}{\equiv} 1 \Rightarrow A \overset{35}{\equiv} 1$

دو قضیه مهم:

① قضیه‌ی فرما: اگر p عددی اول باشد و a عددی صحیح که $p \nmid a$ در این صورت $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

← اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ آن گاه $a^p \overset{p}{\equiv} a$

← قضیه‌ی ویلسون: فرض کنیم p عددی اول باشد، در این صورت: $(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$

مثال: اگر $7^{200}+a$ مضرب ۱۹ باشد کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

طبق قضیه فرما:

$$7^{18} \overset{19}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{توان } 11} 7^{198} \overset{19}{\equiv} 1 \longrightarrow 7^{200} \overset{19}{\equiv} 49 \overset{19}{\equiv} 11$$

$$\longrightarrow 7^{200}+a \overset{19}{\equiv} 11+a$$

از آن جایی که $7^{200}+a$ مضرب ۱۹ است داریم:

$$7^{200}+a \overset{19}{\equiv} 0 \longrightarrow 11+a \overset{19}{\equiv} 0 \longrightarrow a \overset{19}{\equiv} -11 \overset{19}{\equiv} 8$$

رقم یکان:

رقم یکان: رقم یکان هر عدد طبیعی برابر با باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۱۰ است.

← اگر a، n و k عددهای طبیعی باشند، در این صورت $a^{4k+n} \overset{10}{\equiv} a^n$

← برای محاسبه‌ی رقم یکان a^n

① n را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

② اگر باقی مانده صفر شود، یکان a^n برابر است با یکان a^4: $a^n \overset{10}{\equiv} a^4$

③ اگر باقی مانده‌ی $r \neq 0$ باشد یکان a^n برابر است با یکان a^r، $a^n \overset{10}{\equiv} a^r$

مدرس: شهلا اصغری

مثال: رقم یکان عدد $5^{55}+6^{66}+7^{77}+8^{88}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

حل: باقی‌ماندهٔ هر یک از توان‌ها را بر ۴ بدست می‌آوریم:

$$55 \overset{4}{\equiv} 3 \rightarrow 5^{55} \overset{10}{\equiv} 5^{3} \overset{10}{\equiv} 125 \overset{10}{\equiv} 5$$

$$66 \overset{4}{\equiv} 2 \rightarrow 6^{66} \overset{10}{\equiv} 6^{2} \overset{10}{\equiv} 36 \overset{10}{\equiv} 6$$

$$77 \overset{4}{\equiv} 1 \rightarrow 7^{77} \overset{10}{\equiv} 7^{1} \overset{10}{\equiv} 7$$

$$88 \overset{4}{\equiv} 0 \rightarrow 8^{88} \overset{10}{\equiv} 8^{4} \overset{10}{\equiv} (-2)^{4} \overset{10}{\equiv} 16 \overset{10}{\equiv} 6$$

$$\longrightarrow 5+6+7+6 \overset{10}{\equiv} 24 \overset{10}{\equiv} 4$$

* معادلهٔ سیاله:

① هر معادله به فرم کلی $ax+by=c$ که در آن a و b و c اعدادی صحیح و مشخص و x و y مجهول باشند را معادلهٔ سیالهٔ خطی می‌گوییم.

← معادلهٔ سیاله $ax+by=c$ در اعداد صحیح جواب دارد اگر و تنها اگر: $(a,b)|c$

← اگر $(a,b)=1$ آن‌گاه به ازای هر عدد صحیح c، معادلهٔ $ax+by=c$ جواب دارد.

مثال: به ازای کدام مقدار a معادلهٔ $(a+4)x+16y=20$ دارای جواب نیست؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

حل: شرط وجود جواب آن: $(a+4,16)|20$

حال اگر $a=4$ باشد، $(a+4,16)=(8,16)=8 \nmid 20$

با جایگذاری گزینه‌ها داریم $(a+4,16)|20$ پس $a=4$ باشد.

مثال: مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد سه رقمی x که در معادله‌ی $7x+13y=1$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۱۳ ۴) ۷

حل: $7x+13y=1 \xrightarrow{\text{به پیمانه } 13} 7x \overset{13}{\equiv} 1 \rightarrow 7x \overset{13}{\equiv} 14 \rightarrow x \overset{13}{\equiv} 2$

$\Longrightarrow x = 13k+2$

حال اگر $k=8$ باشد $x=106$ است. پس جمع ارقام آن ۷ است.

(۲) اگر x_0 و y_0 یک جواب برای معادله‌ی $ax+by=c$ باشند و $(a,b)=d$ باشد، در این صورت تمام جواب‌های معادله از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k \end{cases} \quad (k\in \mathbb{Z})$$

مثال: اگر $(357, 629)=357x+629y$ آن‌گاه کوچک‌ترین عدد مثبت برای $x+y$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

حل: $357x+629y=(357,629)=(17\times 21, 17\times 37)=17$

لذا $21x+37y=1 \xrightarrow{\text{هم‌نهشتی به پیمانه } 21} 37y \overset{21}{\equiv} 1$

$\xrightarrow[16 \overset{21}{\equiv} -5]{37 \overset{21}{\equiv} 16} -5y \overset{21}{\equiv} -20 \xrightarrow{\div(-5)} y \overset{21}{\equiv} 4 \longrightarrow y_0 = 4 \Longrightarrow x_0 = -7$

$$\begin{cases} x = -7+37k \\ y = 4-21k \end{cases} \longrightarrow x+y = 16k-3 \xrightarrow{k=1} \min(x+y)=13$$

مدرس: شهیار اسعدی

استدلال ریاضی :

اثبات مستقیم : با کمک فرض مسئله و مفاهیم و قضایایی که درستی آن ها را پذیرفته ایم درستی حکم را ثابت می کنیم.

← مسائلی که به این روش حل می کنیم، عموماً به صورت یک حکم کلی هستند.

مثال حاصل ضرب دو عدد به فرم $6k+1$ و $6k+5$ به کدام صورت است؟

۱) $36k+1$ ۲) $6k-1$ ۳) $6k+1$ ۴) $6k+2$

حل اعداد به فرم $6k+5$ را می توان به شکل $6k'-1$ نیز فرض کرد :

$$(6k+1)(6k+5)=(6k+1)(6k'-1)=36kk'-6k+6k'-1=6k''-1$$

مثال نقض مثالی است که درستی یک حکم را در حالت کلی رد می کند.

اگر احکام مطرح شده با سور عمومی نادرست به نظر بیایند، از مثال نقض برای رد آن حکم کمک می گیریم.

مثال کدام گزینه دارای مثال نقض نیست؟

۱. باقی مانده تقسیم اعداد اول غیر از ۷ و ۵ بر ۱۳ برابر ۲ است.

۲. مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچکتر است.

۳. اگر برای هر دو عدد حقیقی a و b داشته باشیم $a>b$ آنگاه $\frac{b}{a}<1$ $(a\neq0)$

۴. باقی ماندهٔ تقسیم عددی که مربع اعداد اول غیر از ۲ و ۳ بر ۴ برابر یک است.

حل

$$\begin{cases} 1)\ a=17 \Rightarrow 17=13\times1+\overset{\neq2}{4} \\ 2)\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow x^3<x^2 \quad \left(\frac{1}{8}<\frac{1}{4}\right) \\ 3)\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a}=2>1 \end{cases}$$

اثبات گزینهٔ ۴ام

$$p^2=36k^2\pm12k+1=4k'+1$$

پس ۴ درست است.

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها: گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه‌ی موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر می‌گیریم.

این روش منحصر به اثبات مسائلی است که تعداد حالت‌های ممکن برای اثبات آن‌ها متناهی است و امکان بررسی همه‌ی حالت‌ها وجود دارد.

هم‌ارزی منطقی زیر دلیلی برای درستی این روش اثبات است:

$$\underbrace{(p \vee q)}_{\text{همه‌ی حالت‌های ممکن}} \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

هم‌چنین برای هر تعداد متناهی گزاره‌ی دلخواه نیز می‌توان گفت:

$$\underbrace{(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n)}_{\text{همه‌ی حالت‌های ممکن}} \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

تذکر: در واقع در طرف دوم نشان می‌دهیم که برقراری همه‌ی حالت‌ها گزاره‌ی r را نتیجه می‌دهد.

مثال: اگر a مضرب ۳ نباشد، a^2 به کدام صورت است؟

۱) $3q-1$ ۲) $3q-2$ ۳) $3q$ ۴) $9q-1$

حل: چون a مضرب ۳ نیست پس به یکی از صورت‌های $3k+1$ و $3k+2$ می‌شود:

$$a=3k+1 \Rightarrow a^2 = \underbrace{9k^2+6k}_{3q}+1 = 3q+1$$

$$a=3k+2 \Rightarrow a^2 = 9k^2+12k+4 = \underbrace{9k^2+12k+3}_{3q'}+1 = 3q'+1$$

پس a^2 به فرم $3q+1$ یا همان $3q-2$ است.

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف): ابتدا فرض می‌کنیم حکم نادرست است (فرض خلف) سپس با استدلال‌های منطقی و مبتنی بر فرض به یک نتیجه‌ی غیرممکن یا خلاف فرض (تناقض) می‌رسیم.

مدرس: نیره اصغری

به جای اثبات درستی قضیه، نادرست بودن نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

(توجه کنید که $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$)

فرض می‌کنیم حکم نادرست است $\Leftarrow$ به یک تناقض می‌رسیم $\Leftarrow$ پس حکم مسئله درست است.

مثال: اثبات کدام گزینه احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟

۱) عدد $\sqrt{5}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط موازی با خط مفروض می‌توان رسم کرد.

۳) از هر نقطه روی یک خط یا خارج آن فقط یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

۴) اگر α و β گنگ باشند و $\alpha + \beta$ گویا باشد، آن‌گاه $2\alpha + \beta$ گنگ است.

حل: گزینه‌ی دوم اصل توازی اقلیدس است و قضیه نیست. پس اثبات نمی‌خواهد.

اثبات بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)

دو گزاره معادل اند (هم‌ارزند) هرگاه دارای ارزش یکسان باشند، برای اثبات درستی یکی از آن‌ها گزاره‌ی ساده‌تر را به گزاره‌ی ساده‌تر معادل تبدیل می‌کنیم و ادامه‌ی این روند ما را به گزاره‌های بدیهی می‌رساند.

$p \Leftrightarrow q$ زمانی دارای ارزش درست است که p و q معادل باشند، پس می‌توانیم به جای اثبات یکی از آن‌ها دیگری را ثابت کنیم.

مثال: در اثبات درستی رابطه‌ی $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$ به کدام رابطه بدیهی می‌رسیم؟

۱) $(y-z)^2 + (xy-xz)^2 + (x-y)^2 \geqslant 0$

۲) $(x+y)^2 + (x-z)^2 + z^2 \geqslant 0$

۳) $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geqslant 0$

۴) $(z-x)^2 + (z-y)^2 + (z-x-y)^2 \geqslant 0$

حل: همه را در ۲ ضرب کنید:

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2 \geqslant$$

$$2xy+2xz+2yz \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2\underbrace{-2xy}_{(x-y)^2}+y^2) + (\underbrace{x^2-2xz+z^2}_{(x-z)^2}) + (\underbrace{y^2-2yz+z^2}_{(y-z)^2}) \geqslant 0 \Rightarrow$$ گزینه‌ی سوم

۳۹ اگر اول مهر ماه در یک سال روز یک‌شنبه باشد، ۷ اسفند ماه در همین سال چه روزی است؟

۱) یک‌شنبه   ۲) دوشنبه   ۳) سه‌شنبه   ۴) چهارشنبه

۴۰ اگر ششم فروردین ماه چهارشنبه باشد، سومین یک‌شنبه‌ی آذر ماه چندم است؟

۱) ۱۵   ۲) ۱۶   ۳) ۱۷   ۴) ۱۸

۴۱ تاریخ یکی از چهارشنبه‌های مرداد از معادله‌ی $۶۷+x \overset{۳۹}{\equiv} ۰$ به دست می‌آید. ۱۴ دی چه روزی است؟

۱) سه‌شنبه   ۲) چهارشنبه   ۳) شنبه   ۴) دوشنبه

۴۲ باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۱۳^{۴۳}$ بر عدد ۱۷ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

۴۳ باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۷۷^{۱۰۰}-۱۷^{۱۰۰}+۱۰^{۱۰۰}-۷$ بر ۷۰ کدام است؟

۱) ۶۰   ۲) ۶۳   ۳) ۶۶   ۴) ۶۹

۴۴ باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۴^{۱۳۹۸}+۹^{۱۳۹۸}$ بر ۲۴ کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۱۲   ۳) ۴   ۴) ۱۶

۴۵ رقم یکان $۹^{۱}+۹^{۲}+\dots+۹^{۹۹}$ کدام است؟

۱) ۹   ۲) ۱   ۳) صفر   ۴) ۸

۴۶ به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

۴۷ اگر $۵x+۴y=۳$ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) $x-y \overset{۹}{\equiv} ۶$ ۲) $x+y \overset{۶}{\equiv} ۵$ ۳) $x-y \overset{۶}{\equiv} ۵$ ۴) $x+y \overset{۹}{\equiv} ۶$

۴۸) اگر عبارت n^2-4n+9 مضرب ۵ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $2n+1$ بر ۵ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۴۹) اگر عبارت $2a+12b+6c \le a^2+4b^2+3c^2+A$ همواره درست باشد، حداقل مقدار A کدام است؟

۱) ۱۳　　۲) ۱۴　　۳) ۱۵　　۴) ۱۶

۵۰) در اثبات نامساوی $x^2+y^2+z^2 \ge xy-xz+yz$ به کدام عبارت بدیهی زیر می‌رسیم؟

۱) $(x-y)^2+(x+z)^2+(y-z)^2 \ge 0$　　۲) $(x+y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \ge 0$

۳) $(x+y-z)^2 \ge 0$　　۴) $0 \le (x-\frac{y}{2})^2+(y-\frac{z}{2})^2+(z-\frac{x}{2})^2$

«موفق باشید»