حسابان ۱ یازدهم ریاضی

شامل

نمونه سوال و درسنامه مختصر

تهیه و تنظیم:

فاطمه سرایی

دنباله حسابی (عددی)

یادآوری: این درس ادامه دنباله حسابی مربوط به کتاب ریاضی ۱ سال دهم است.

❖ اگر $a_1, a_2, a_3, \ldots$ رشته ای از اعداد باشند که در آن هر جمله جدید با اضافه کردن عددی ثابت(قدرنسبت) به جمله قبلی به دست بیاید این دنباله را حسابی می نامیم و همواره داشتیم: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)k}$

❖ سه جمله ی متوالی c, b, a تشکیل دنباله حسابی می دهند **اگر وتنها اگر** $a + c = 2b$ و در این صورت b را واسطه حسابی بین c, a می نامیم.

❖ اگر بین دو جمله ی b, a تعداد m واسطه داشته باشیم همواره داریم: $d = \dfrac{b-a}{m+1}$ قدر نسبت

چند مثال برای یادآوری:

🕮 **مثال** : در دنباله حسابی $a_1 = 2$ و قدر نسبت ۴ است. جمله دهم رابیابید.

🕮 **مثال** : در یک دنباله عددی جملات سوم و هفتم به ترتیب -3 و ۵ می باشد. قدر نسبت دنباله را بیابید.

🕮 **مثال** : در یک دنباله عددی جمله پنجم سه برابر جمله دوم است. اگر جمله ششم ۱۱- باشد، جمله دهم را بیابید

مثال : جملات $x , 2x+1 , x+4$ تشکیل دنباله حسابی می دهند. x رابیابید.

مثال: دنباله حسابی زیر چند جمله دارد؟ $1,3,5,...,125$

مثال : تعداد جملات طبیعی دورقمی چند تاست؟

مثال : دنباله ی $-2,1,4,7,...$ چند جمله ی دورقمی دارد؟

مثال : در یک دنباله حسابی $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=10$ جمله سوم کدام است؟

مثال : در یک دنباله حسابی رابطه $a_۲ + a_۴ + a_۶ + a_۸ = ۲۰۰$ بین جملات برقرار است.

مجموع جملات سوم و هفتم این دنباله کدام است؟ ۱) ۸۰ ۲) ۹۰

۳) ۱۰۰ ۴) ۵۰

مجموع n جمله اول دنباله حسابی

❖ اگر جمله نخست دنباله ای حسابی برابر $a_۱$ و قدر نسبت آن برابر d باشد، جمله عمومی این دنباله به صورت $a_n = a_۱ + (n-۱)k$ بود و مجموع n جمله نخست این دنباله حسابی برابر است با : $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$ و یا

$$S_n = \frac{n}{۲}\left[۲a_۱ + (n-۱)d\right]$$

نکته: اگر S_n مجموع n جمله نخست دنباله ای حسابی باشد، آنگاه $S_{n+۱} - S_n = a_{n+۱}$

❖ مجموع اعداد طبیعی زوج با شروع از ۲ $۲+۴+۶+...+۲n = n(n+۱)$

مجموع اعداد طبیعی فرد با شروع از ۱ $۱+۳+۵+...+(۲n-۱) = n^۲$

مثال: مجموع ۲۰ جمله اول دنباله روبرو را بیابید. $-۳, -۱, ۱, ۳, ۵, ...$

مثال : مجموع چند جمله از دنباله ی $-۳, ۴, ۱۱, ...$ برابر ۸۷ است؟

مثال : در یک دنباله حسابی مجموع ۲۰ جمله اول سه برابر مجموع ۱۲ جمله اول است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم را محاسبه کنید.

مثال : ابتدا بین ۷و۲۹ تعداد ۱۰ واسطه عددی حسابی درج کنید و سپس مجموع تمام جملات را بیابید.

مثال: در یک دنباله حسابی جمله اول برابر ۷- و قدر نسبت برابر ۲ است. مجموع ده جمله اول این دنباله حسابی چقدر است؟

مثال: در یک دنباله حسابی جمله اول برابر ۱۹ و قدر نسبت برابر ۷- است. مجموع پانزده جمله اول را بیابید.

مثال : مجموع چند جمله از دنباله حسابی ...,۲,۵,۸ برابر ۷۳۷ است؟

مثال : در یک دنباله حسابی مجموع جمله های هشتم و هجدهم برابر ۶۰ است. مجموع بیست و پنج جمله اول دنباله کدام است؟

مثال : در یک دنباله حسابی $a_{۷} = ۲۱$ و $S_{۱۱} = ۲۵۳$. قدر نسبت این دنباله چقدر است؟

مثال: در دنباله حسابی ...,۳,۹,۱۵ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر نشود.

مثال: در یک دنباله حسابی با جمله اول ۲، مجموع هفت جمله دوم برابر ۲۹۴ است. قدر نسبت دنباله کدام است؟

📖 **مثال :** در یک دنباله حسابی $S_{6}=-12 \, , S_{14}=-140$ ، جمله نهم این دنباله چقدر است؟

📖 **مثال ۳۱:** در یک دنباله حسابی مجموع جمله سوم و سیزدهم برابر ۲۴ است، مجموع پانزده جمله اول کدام است؟

دنباله هندسی

❖ اگر $a_1, a_2, a_3, \ldots$ رشته ای از اعداد باشند که در آن هر جمله جدید با ضرب عددی ثابت(قدرنسبت) به جمله قبلی به دست بیاید این دنباله را هندسی می نامیم و همواره داشتیم: $\boxed{a_n = a_1 . r^{n-1}}$

❖ سه جمله ی متوالی c, b, a تشکیل دنباله هندسی می دهند اگر وتنها اگر $a.c = b^2$ و در این صورت b را واسطه هندسی بین c, a می نامیم.

❖ اگر بین دو جمله ی b, a تعداد m واسطه داشته باشیم همواره داریم: قدر نسبت $d = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$

مجموع جملات دنباله هندسی

❖ اگر جمله نخست دنباله ای هندسی برابر $a_۱$ و قدر نسبت آن برابر r باشد، جمله عمومی این دنباله به صورت $a_n = a_۱ . r^{n-۱}$ بود و مجموع n جمله نخست این دنباله هندسی برابر است با : $S_n = a_۱ \times \frac{۱-r^n}{۱-r}$

نکته: اگر S_n مجموع n جمله نخست دنباله ای هندسی باشد، آنگاه $S_{n+۱} - S_n = a_{n+۱}$

❖ در محاسبه مجموع ها گاهی به فرمول زیر نیاز احساس می شود

$$a^n - ۱ = (a-۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + ... + a + ۱)$$

❖**حد مجموع**: اگر یک دنباله هندسی داشته باشیم که $|r| < ۱$ در این صورت مجموع **تمام** جملات دنباله $S = \frac{a_۱}{۱-r}$

📖 **مثال** : در یک دنباله هندسی جمله سوم و هفتم به ترتیب $-۲, -۳۲$ هستند. قدر نسبت را بیابید.

📖 **مثال** : در یک دنباله هندسی جمله پنجم هشت برابر جمله دوم است. جمله دهم چند برابر جمله هشتم است؟

📖 **مثال:** در دنباله روبرو مجموع تمام جملات کدام است؟ $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, ..., \frac{۱}{۱۲۸}$

مثال: در دنباله ای هندسی $a_{2}=6$ و $a_{7}=192$ مقدار S_{10} چقدر است؟

مثال : در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول ۲۸ برابر مجموع سه جمله اول است. مجموع ده جمله ی اول چند برابر مجموع پنج جمله اول است؟

مثال : در یک دنباله هندسی با قدر نسبت مثبت، مجموع چهار جمله اول برابر ۱۲ و مجموع هشت جمله اول برابر ۲۰۴ است. جمله هفتم دنباله کدام است؟

۱) $\frac{32}{3}$ ۲) $\frac{128}{3}$ ۳) $\frac{256}{5}$ ۴) $\frac{64}{5}$

معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

❖هرمعادله درجه دوم را به صورت $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a\neq 0$ نمایش می دهند و راه مختلفی برای حل آن ارائه می دهند.

یکی از متداول ترین روش ها روش Δ است. $\Delta=b^2-4ac$ را تشکیل می دهند. اگر $\Delta<0$ معادله ریشه ندارد. اگر $\Delta=0$ باشد دو ریشه مثل هم دارد که اصطلاحا می گوییم یک ریشه مضاعف دارد : $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

واگر $\Delta>0$ معادله دو ریشه دارد : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

❖ اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ بین ضرایب رابطه $a+b+c=0$ برقرار باشد، آنگاه معادله دارای دو ریشه $1,\frac{c}{a}$ است.

❖اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ بین ضرایب رابطه $a+c=b$ برقرار باشد، آنگاه معادله دارای دو ریشه $-1,-\frac{c}{a}$ است.

روابط بین ریشه های معادله درجه دوم

در حالت $\Delta>0$ معادله دارای دو ریشه $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ بود که جمع این دوریشه: $S=\frac{-b}{a}$ و ضرب دوریشه $P=\frac{c}{a}$ است. در بیشتر مسائل برای سهولت به جای x_1,x_2 از α,β استفاده میکنیم. یعنی:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}\ ,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

جمع دوریشه را S و حاصل ضرب دوریشه را P می‌نامیم.

❖برای سهولت تست زنی با توجه به اتحادهای اصلی و کمکی می‌توان روابط زیر را بین ریشه ها به عنوان فرمول حفظ کرد

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3PS$$

$$\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm 2\sqrt{P}}$$

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال : اگر معادله $x^2+6x+5k-1=0$ دارای ریشه مضاعف باشد، k را بیابید.

مثال : اگر $x=-1$ یکی از ریشه های معادله $4x^2-ax-7=0$ باشد، ریشه دیگر را بیابید.

مثال: اگر $x=-2$ یک ریشه معادله $2x^2+(k+3)x+3k=0$ باشد، ریشه دیگر معادله را پیدا کنید.

مثال : اگر β,α ریشه های معادله $x^{۲}-۲x-۴=۰$ باشند، محاسبه کنید:

الف) $\alpha+\beta$

ب) $\alpha\beta$

پ) $\alpha^{۲}+\beta^{۲}$

ت) $\alpha^{۳}+\beta^{۳}$

ث) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$

ج) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

مثال : اگر در معادله $x^{۲}-mx+۱=۰$ رابطه $\frac{۱}{\alpha^{۲}}+\frac{۱}{\beta^{۲}}=۲$ بین ریشه ها برقرار است. m را بیابید.

مثال : در معادله $x^{۲}-۳x+m=۰$ یکی از ریشه ها دو برابر ریشه دیگر است. m را بیابید.

مثال : m را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادلهٔ $mx^{۲}-۴x+۱=۰$ سه برابر دیگری باشد. $(m\neq۰)$

مثال : در معادله $3x^2-15x+m=0$ اگر یکی از ریشه ها دو واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد m کدام است؟

مثال: به ازای چند مقدار m معادله $mx^2-\left(m^3-4m\right)x-m+5=0$ دو جواب دارد که قرینه یکدیگرند؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) صفر

تشکیل معادله درجه ۲ جدید از روی ریشه های آن

❖ اگر اعداد β,α ریشه های یک معادله درجه دوم را داشته باشیم و بخواهیم خودِ معادله را از روی ریشه ها بنویسیم داریم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta \\ P=\alpha\beta \end{cases} \Rightarrow x^2-Sx+p=0$$ (چرا؟)

مثال : معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه هایش ۲و۴- باشد.

مثال : معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه هایش ۵ و $\frac{-8}{3}$ باشد.

مثال :معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $۲-\sqrt{۳}$, $۲+\sqrt{۳}$ باشد.

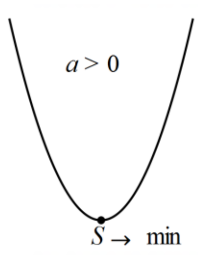
مثال : حاصل ضرب دو عدد ۱- و حاصل جمع آنها ۴ است. آن ها را پیدا کنید.

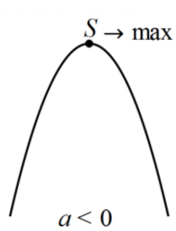
نمودار تابع درجه ۲ (سهمی) و ماکزیمم و مینیمم

❖ نمودار تابع با ضابطه ی $y=ax^{۲}+bx+c$ یک سهمی است که راس آن از فرمول $S\begin{bmatrix}\frac{-b}{۲a}\\ \frac{-\Delta}{۴a}\end{bmatrix}$ به دست می آید.

$x=\frac{-b}{۲a}$ طول راس سهمی و $y=\frac{-\Delta}{۴a}$ را مقدار مینیمم یا ماکزیمم سهمی میگوییم.

❖ اینکه یک سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم را از روی علامت ضریب $x^{۲}$ یعنی a مشخص می کنیم. به این صورت که اگر $a>۰$ منحنی رو به بالا و می نیمم دارد و اگر $a<۰$ منحنی رو به پایین و ماکزیمم دارد.





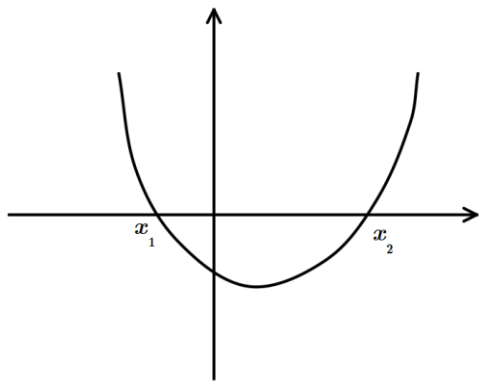
❖ محل تلاقی منحنی با محور عرض ها مقدار و علامت c را مشخص میکند.

❖ در محل تلاقی منحنی با محور y ها خطی مماس بر منحنی می کشیم اگر شیب خط مثبت باشد $b>۰$ و اگر شیب خط مماس منفی باشد $b<۰$ است.

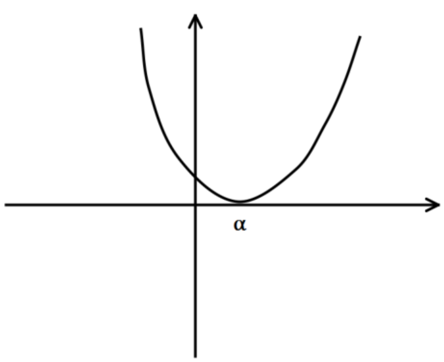
❖❖ خیلی مهم : محل تلاقی منحنی $y=ax^2+bx+c$ با محور x ها جوابهای معادله $ax^2+bx+c=0$ است. یعنی اگر دلتای معادله نظیر مثبت باشد منحنی محور طولها را در دو نقطه قطع میکند، اگر دلتا منفی باشد ، منحنی محور طولها را قطع نمیکند و اگر دلتا صفر باشد منحنی بر محور x ها مماس است.

❖در صورتی که نمودار یک سهمی را داده باشند و معادله سهمی را بخواهند به روشهای زیر دقت بیشتری کنید:

❶ اگر نمودار محور طول ها را در دو نقطه x_1 , x_2 قطع کرده باشد معادله به صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ خواهد بود.



❷ اگر نمودار در نقطه ای به طول α بر محور x ها مماس بود معادله سهمی به صورت $y=a(x-\alpha)^2$ خواهدبود

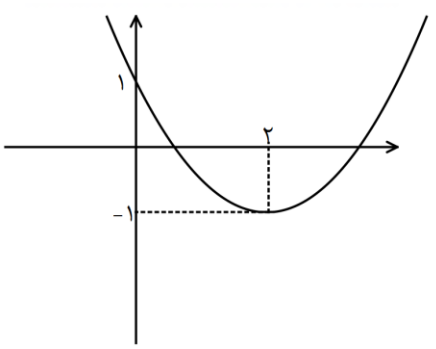


❸ نقاطی از سهمی که مختصات آنها داده شده را میتوان در معادله سهمی جایگذاری کرد. نقاط روی سهمی داخل معادله اش صدق می‌کنند.

❹همواره طول راس را میتوان با فرمول $x=\frac{-b}{2a}$ محاسبه کرد

مثال: تابع f با ضابطه $x^{2}-4x-y-4=0$ مفروض است. مقدار مینیمم تابع f را تعیین کنید.

مثال: در شکل زیر نمودار سهمی به معادلهٔ $P(x)=ax^{2}+bx+c$ داده شده است. ضرایب c,b,a را تعیین کنید.

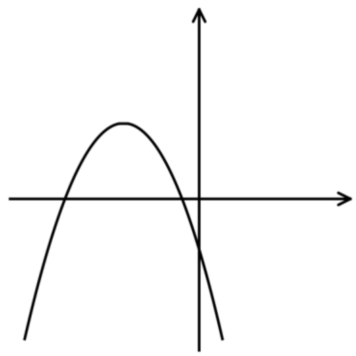


مثال : اگر تابع $y=(1-m)x^{2}+(m^{2}-6)x+1$ در نقطه ای به طول ۱- ماکزیمم داشته باشد، مقدار m را بیابید.

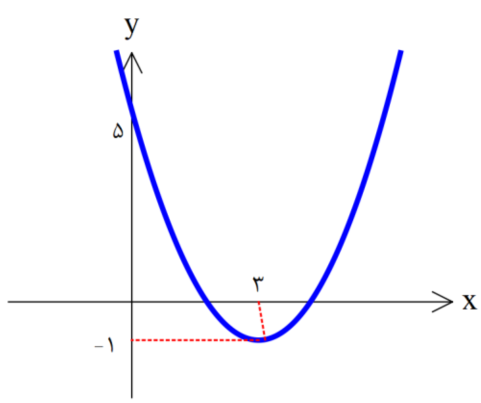
مثال : بیشترین مقدار تابع $f(x)=-x^{2}+4x+1$ را تعیین کنید.

مثال: در شکل روبرو سهمی به معادلهٔ $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است.

علامت ضرایب c,b,a و تعداد جواب های معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ را تعیین کنید.



مثال : در شکل زیر، سهمی به معادلهٔ $P(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است. حاصل ضرب ریشه های معادله را بیابید



مثال: نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ در شکل مقابل رسم شده است.

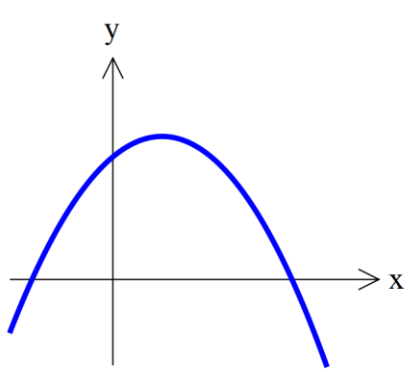
اگر S مجموع صفرهای تابع f باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $c>۰, S>۰$

۲) $c<۰, S<۰$

۳) $c<۰, S>۰$

۴) $c>۰, S<۰$

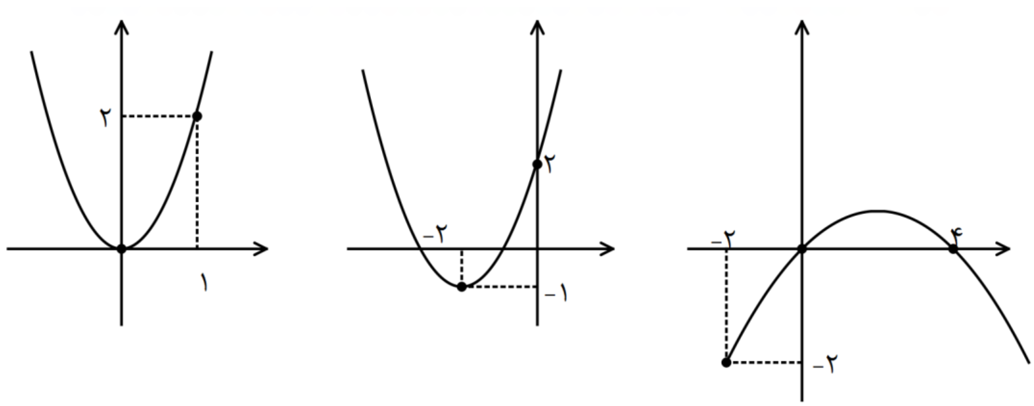


مثال : حدود m برای آنکه معادله ی $(m-1)x^2+mx+m-3=0$ دوریشه مختلف العلامت داشته باشد، چیست؟

مثال : مقدار m را برای آنکه معادله $mx^2+\left(m^2-4\right)x+m-3=0$ دو ریشه قرینه داشته باشد، بدست آورید.

مثال: حدود k را طوری بیابید که معادلهٔ $x^2-x+k=0$ دارای دو ریشه مثبت باشد.

مثال : در تابع درجه دوم ax^2+bx+c در هر یک از حالت های زیر علامت ضرایب c,b,a را تعیین کنید.



معادلات گویا

روش های مختلفی برای حل معادلات گویا وجود دارد

❶ طرفین وسطین $\frac{\square}{\sqsubset}=\frac{\triangle}{\bigcirc} \Rightarrow \square\times\bigcirc=\triangle\times\sqsubset$ فقط باید دقت کنید که جواب به دست آمده هیچ کدام از مخرج ها را صفر نکند.

❷ ضرب در ک.م.م برای یافتن ک.م.م باید تمام مخرج ها را تجزیه کنیم و از جملات مشترک بالاترین توان و از غیرمشترک ها تمام انها را در ک.م.م می آوریم.

❸ روش تغییر متغیر: این روش تنها مختص این معادلات نیست. هرجا عبارتی تکرار شده باشد میتوان کل آن عبارت را t گرفت.

📖 **مثال:** معادله $\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{2}{x}+1}+1=\dfrac{6}{\frac{2}{x}+1}$ را حل کنید

📖 **مثال** : با در نظر گرفتن یک تغییر متغیر مناسب، معادلهٔ مقابل را حل کنید. $\left(x^2+5x\right)^2-2\left(x^2+5x\right)-24=0$

مثال : معادله $\left(\frac{x^{۲}}{۳}-۲\right)^{۲}-۱۱\left(\frac{x^{۲}}{۳}-۲\right)+۱۰=۰$ را حل کنید.

مثال : جواب های معادله $x^{۴}+۲۵=۲۶x^{۲}$ را بدست آورید.

مثال: معادله های زیر را حل کنید

الف) $\frac{x}{x-۳}+\frac{۳}{x-۱}=۵$

ب) $\frac{۱}{(x-۲)^{۲}}+\frac{۴}{x-۲}=-۳$

پ) $\frac{x^{۲}-x-۱}{x^{۲}-۹}=\frac{۲}{x-۳}-\frac{۳}{x+۳}$

مثال : مقدار a را طوری بیابید که $x=۱$ ریشه معادله $\frac{x+a}{x}-\frac{x}{x+a}=\frac{۴a}{x+a}$ باشد.

❖ نسبت طلایی:

اگر در یک مستطیل طول را x وعرض را y در نظر بگیریم و رابطه $\frac{x}{x+y}=\frac{y}{x}$ برقرار باشد می گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است. نسبت $k=\frac{x}{y}$ را نسبت طلایی گوییم.

مثال: عرض یک مستطیل طلایی $۳+\sqrt{۵}$ است. مساحت این مستطیل چند است؟

۱) $۱۷+۴\sqrt{۵}$ ۲) $۱۸+۵\sqrt{۵}$ ۳) $۱۹+۷\sqrt{۵}$ ۴) $۲۲+۱۰\sqrt{۵}$

مثال : یک مستطیل با محیط $۲\left(۱+\sqrt{۵}\right)$ و با نسبت طلایی، (می دانیم k مثبت است) طول مستطیل را بیابید.

معادلات گنگ

با توجه به نوع مساله روش های متفاوتی وجود دارد.

❶ اگر تنها دو رادیکال در دو طرف معادله داشته باشیم و پشت رادیکالها هم علامت باشد میتوان دو طرف را به توان ۲ رساند تا از شر رادیکال خلاص شویم

❷ اگر اگر چند رادیکال داشته باشیم و نتوان آن را به صورتی در آورد که یکی از رادیکال ها یکطرف و آن یکی در طرف دیگر باشد(یعنی رادیکالها به جز خودشان با عبارت دیگری جمع شده باشند) در این صورت سعی می کنیم یکی از رادیکالها سمت راست و یکی سمت چپ باشد و به توان می رسانیم. (اتحاد را دقت کنید)

❸ اگر معادله به صورت $\sqrt{\ }+\sqrt{\ }=۰$ باشد ، عبارت های زیر رادیکال را صفر قرار می دهیم و ریشه مشترک را به عنوان جواب قبول می کنیم.

📖 **مثال** : معادله های زیر را حل کنید

الف) $\sqrt{۲-x^{۲}}=x$

ب) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۹}$

پ) $۲+\sqrt{۱+x}=x-۳$

ت) $\left(۴-\sqrt{x}\right)^{۲}-۴+\sqrt{x}=۲$

مثال: حاصل ضرب ریشه های حقیقی معادلهٔ $x^{۲}+۴x+۳=\sqrt{x^{۲}+۴x+۵}$ کدام است؟

قدر مطلق

تابع قدر مطلق به صورت $|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ تعریف میشود. در واقع قدرمطلق یک عملگر مثبت ساز است.

❖ برای هر دو عدد حقیقی b,a داریم: $|a+b|\leq |a|+|b|$

به نظر شما در رابطه نامساوی مثلث (رابطه فوق) چه زمانی مساوی و چه زمانی کوچکتر اتفاق می افتد؟

با استفاده از تعریف قدر مطلق میتوان در روابط داده شده از قدر مطلق رها شویم. برای این کار از تعیین علامت و مشخص کردن نواحی و علامت هر رابطه در آن ناحیه استفاده می‌کنیم.

مثال : تابع $y=|x-۳|$ را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید.

مثال: ضابطه تابع $y=|x+۲|-۳|۳-x|$ را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید.

حل معادلات شامل قدر مطلق

معادلات قدر مطلقی به دو صورت حل میشوند

❶ اگر شامل یک قدر مطلق باشند می‌توان به راحتی با نکته‌ی $|f(x)|=u \xrightarrow{u\geq ۰} f(x)=\pm u$ به جواب رسید

❷ اگر معادله شامل بیش از یک قدر مطلق باشد می‌توان با تکنیک برداشتن قدر مطلق به معادله ساده تری رسید.

همواره به خاطر داشته باشید وقتی معادله ای را با روش برداشتن قدرمطلق به تابع چند ضابطه ای تبدیل می‌کنید و هر ضابطه را جدا حل میکنید، حتما جواب در شرط آن ضابطه باید صدق کند.

مثال : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $|۲x+۴|-۳=۰$

ب) $|x+۴|+|x-۱|=۷$

نامعادلات شامل قدر مطلق

در عبارت هایی که شامل یک یا چند قدر مطلق باشد بهترین کار این است که عبارت رابدون استفاده از قدر مطلق بنویسیم.

ولی عبارت های شامل یک قدر مطلق را می‌توان با کمک قوانین زیر راحت تر حل کرد.

❖قوانین نامعادله شامل قدر مطلق :

$$\begin{cases} |u| < a \xrightarrow{a>۰} -a < u < a \\ |u| > a \xrightarrow{a>۰} u > a \vee u < -a \end{cases}$$

مثال : نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $|x-۲| < ۳$

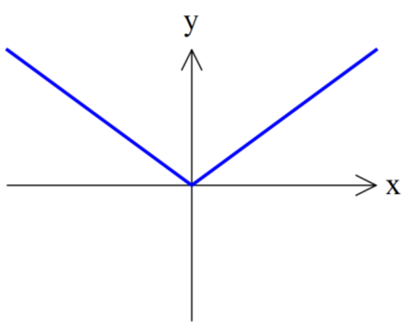
ب) $x + |x| \le \frac{۱}{۲}x + ۳$

پ) $|۲x+۷| > ۳$

ت) $|x-۴| + |x+۳| \le ۹$

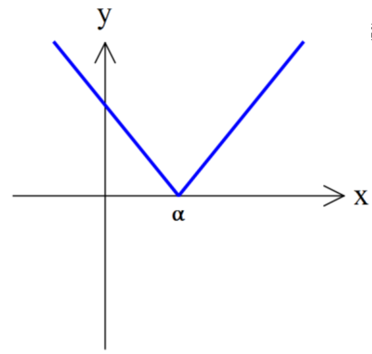
رسم توابع شامل قدر مطلق

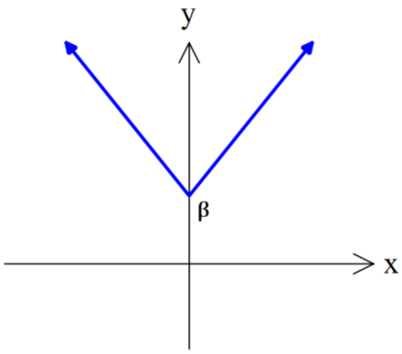
❶ تابع با ضابطه $f(x) = |x|$



نتایج: تابع با ضابطه $\alpha>0$, $f(x)=|x-\alpha|$ تابع با ضابطه

$|+\beta$, $\beta>0$





◆انتقال عمودی

فرض کنید تابع $y=f(x)$ را داریم و k عددی مثبت است. برای رسم تابع $y=f(x)+k$ باید تابع $y=f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت بالا منتقل کنیم و برای رسم $y=f(x)-k$ باید تابع $y=f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت پایین بیاوریم.

پس تغییرات تابع جدید فقط روی عرض نقاط تابع قبلی است و این تغییرات موافق با چیزی است که سوال داده است. یعنی وقتی در سوالی گفته میشود $f(x)+۲$ ما هم باید همان ۲+ را روی عرض ها اعمال کنیم.

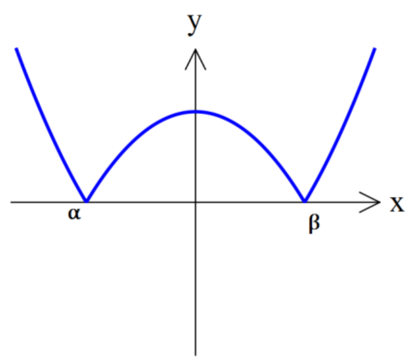
◆انتقال افقی

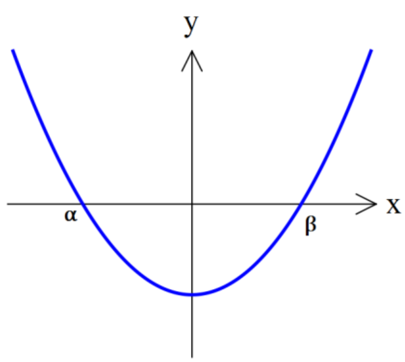
فرض کنید تابع $y=f(x)$ را داریم و k عددی مثبت است. برای رسم تابع $y=f(x+k)$ باید تابع $y=f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت چپ منتقل کنیم و برای رسم $y=f(x-k)$ باید تابع $y=f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت راست بیاوریم. در واقع همیشه با y موافق هستیم.

پس تغییرات تابع جدید فقط روی طول نقاط تابع قبلی است و این تغییرات مخالف با چیزی است که سوال داده است. یعنی وقتی در سوالی گفته میشود $f(x+۲)$ ما باید ۲− را روی طول ها اعمال کنیم.در واقع همیشه با x لج میکنیم. ☺

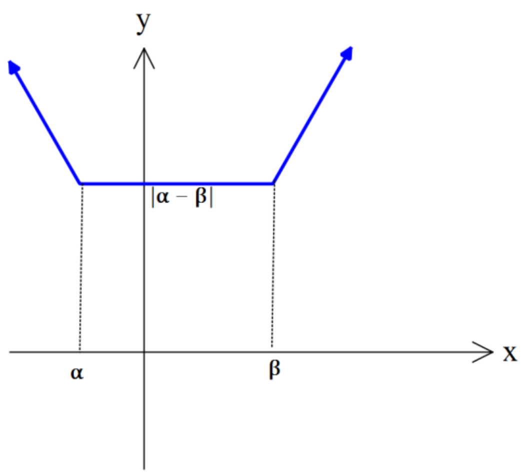
2 تابع با ضابطه $y=\left|f\left(x\right)\right|$

در این حالت تابع $y=f\left(x\right)$ را رسم می‌کنیم(بادقت،یعنی محل تلاقی نمودار تابع با محور x ها در صورت وجود، محل تلاقی نمودار تابع با محور y ها) سپس تمام قسمت هایی از منحنی که زیر محور x هاست را نسبت به محور x ها قرینه میکنیم و قسمت هایی که بالای محور x ها بوده را دست نمی‌زنیم.

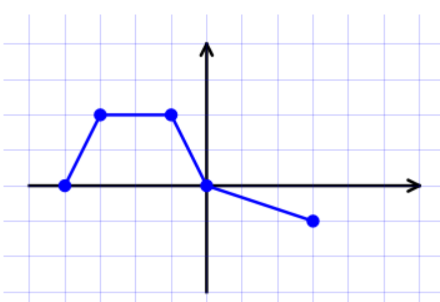




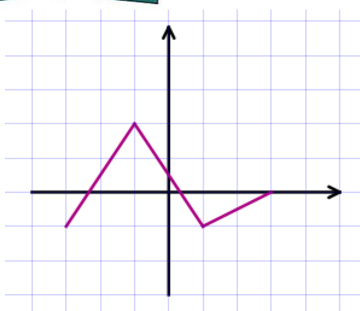
3 تابع با ضابطه $f\left(x\right)=\left|x-\alpha\right|+\left|x-\beta\right|$ **(تابع گلدانی)**



مثال : نمودار تابع f داده شده است. از روی آن تابع $g\left(x\right)=f\left(x-۱\right)$ را رسم کنید.

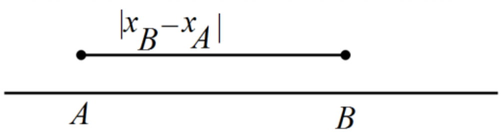


مثال: از روی نمودار تابع f نمودار تابع $y=f(x-۲)+۱$ را رسم کنید.

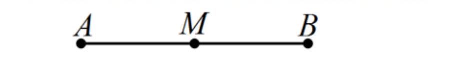


هندسه تحلیلی

❶ در روی هر محور مختصاتی فاصله دو نقطه B, A به صورت $AB=|x_B-x_A|$ تعریف میشود.



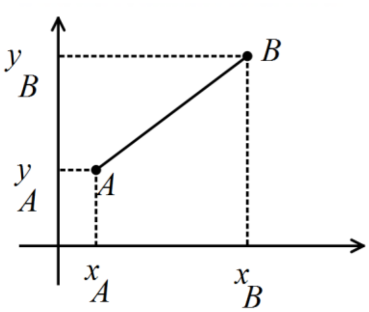
❷ برای یافتن **وسط یک پاره خط** روی محورها میانگین ابتدا و انتها را محاسبه می کنیم



$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

❸ **فاصله دو نقطه** در دستگاه مختصات دکارتی:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$



❹ **مختصات وسط** یک پاره خط $M\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)$

❺ **شیب** خط گذرنده از نقاط $B(x_۲,y_۲), A(x_۱,y_۱)$ $\Leftarrow$ $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

❻ اگر دو خط **موازی** باشند شیب آنها <u>برابر</u> است و اگر دو خط **عمود** بر هم باشند شیب آنها <u>قرینه و عکس</u> هم است.

❼ برای نوشتن معادله یک خط باید یکی از این دو شرط راداشته باشیم یا دو نقطه از خط را داشته باشیم و یا شیب و یک نقطه از خط

$$\left.\begin{matrix} m \\ A\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad y - y_۱ = m(x - x_۱)$$

❽ **فاصله نقطه** $A\begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ **تا خط** d : ❊ ابتدا معادله خط d را می نویسیم ❊ معادله خط را به صورت $ax+by+c=۰$ مرتب می کنیم. ❊ فاصله عبارت است از $AH = \dfrac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$

❾ **فاصله دو خط موازی:** فاصله دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با: $\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

ابتدا باید با روش های مناسب ضرایب y,x را یکی کنیم سپس فاصله را بیابید.

🕮 **مثال** : در مثلث ABC به رئوس $A(-۱,۷)$ و $B(-۶,-۲)$ و $C(۳,۳)$ ، طول ارتفاع AH را بدست آورید .

🕮 **مثال** : فاصله ی نقطه ی $A(۳,۵)$ از خط به معادله ی $۲x - y = ۳$ را به دست آورید.

مثال : اگر فاصله نقطه $A(۱,۲)$ از خط $ax+۴y=۱$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

مثال : خط l به معادله ی $۳y-x=۵$ و خط d به معادله $(m-۱)x+۲y-۲=۰$ مفروضند.

الف) مقدار m را چنان بیابید که که دو خط l,d با هم موازی باشند.

ب) مقدار m را چنان بیابید که دو خط l,d بر هم عمود باشند.

مثال: معادلهٔ عمود منصف پاره خط میان نقطه های $A(-۳,۱)$, $B(۵,۴)$ کدام است؟

مثال: طول ارتفاع وارد از راس B در مثلث با راس های $A(۱,۳)$, $B(-۲,۱)$, $C(۳,-۱)$ کدام است؟

مثال: اگر $M(a,b)$ نقطه ای روی سهمی $y=x^{۲}$ باشد که از دو نقطه $A(-۲,۱)$, $B(۱,-۲)$ به یک فاصله باشد، مختصات M را مشخص کنید.

مثال: در مثلث ABC به رئوس $A(-۱,۶)$ و $B(۵,-۱)$ و $C(۳,۱)$ ، طول میانه CM و معادله میانه BM' را بدست آورید .

مثال : مساحت مربعی را بیابید که یک راس آن به مختصات $A(-۱,۳)$ و یک ضلع آن واقع بر خط به معادله $۴y=۳x+۱$ باشد.

مثال: دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند. مساحت این مربع چقدر است؟

مثال: اگر فاصله نقطه $A(۱,۲)$ از نقطه $B(۲,m)$ برابر m است. مقدار m کدام است؟

مثال: دو نقطه ی $A(۴,۱۰)$, $B(-۲,۸)$ را در نظر بگیرید.

الف) فاصله ی نقطه ی $(۳,۲)$ از وسط پاره خط AB را به دست آورید.

ب) معادله ی عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

تابع

- هر تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقا یک عضو از B را نسبت میدهد.
- A را **دامنه** این تابع و B را **هم دامنه** این تابع می نامند.
- مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده اند **برد** این تابع می نامند.