

فصل ۱ درس ۲: ترکیب توابع

(تعمیرین ۱ ص ۲۲)

① اگر $f = \{(7, 8), (5, 3), (9, 8), (11, 4)\}$

تابع $g = \{(5, 7), (3, 5), (7, 9), (9, 11)\}$

$f \circ g, g \circ f$ را بیابید

محاسبه مقدار تابع مرکب از روی جدول و نمودار:

برای پیدا کردن مقدار تابع، ابتدا مقدار x را در تابع داخلی قرار می دهیم. سپس حاصل را در تابع خارجی جایگزین می کنیم

(کاردرگلابی ص ۱۴ و تعمیرین ۸ ص ۲۳)

با توجه به جدول های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

| x | $f(x)$ | x | $g(x)$ |
|-----|--------|-----|--------|
| -۳ | -۷ | -۳ | ۸ |
| -۲ | -۵ | -۲ | ۳ |
| -۱ | -۲ | -۱ | ۰ |
| ۰ | -۱ | ۰ | -۱ |
| ۱ | ۳ | ۱ | ۰ |
| ۲ | ۵ | ۲ | ۳ |
| ۳ | ۵ | ۳ | ۸ |

$(f \circ g)(1)$ الف)

☑ حل:

$$f \circ g(1) = f(g(x)) \xrightarrow{x=1} f\left(\begin{matrix} g(1) \\ \circ \end{matrix}\right) = 1$$

ترکیب توابع (تابع مرکب):

* تابع نوعی ماشین است که به ازای هر ورودی دقیقا یک

خروجی تولید می کند $x \xrightarrow{f} f(x)$

* هرگاه خروجی یک تابع را به عنوان ورودی تابع دیگر استفاده کنیم در واقع دو تابع را باهم ترکیب کرده ایم.

① تابع $f \circ g$:

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

② تابع $g \circ f$:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

محاسبه تابع مرکب در زوج های مرتب:

(مثال ص ۱۳)

اگر $f = \{(\circ, -1), (5, 2), (3, 5), (-2, 4)\}$

$g = \{(1, 2), (3, -1), (2, \circ), (-1, 4), (5, -7)\}$

تابع $g \circ f$ را بیابید.

☑ حل:

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 4 \\ 5 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} \circ \\ 3 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -7 \\ -2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} \times \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{g \circ f} \{(\circ, 4), (5, \circ), (3, -7)\}$$

محاسبه تابع مرکب با استفاده از ضابطه:

اگر دو تابع $f(x)$, $g(x)$ داشته باشیم و به جای x یکی از تابع ها، ضابطه یا مقدار تابع دیگر را قرار دهیم، می گوئیم دو تابع را ترکیب کرده ایم.

| روش محاسبه | ضابطه تابع | تابع مرکب |
|-------------------------------|------------|------------------|
| در f به جای x بذار $g(x)$ | $f(g(x))$ | $(f \circ g)(x)$ |
| در g به جای x بذار $f(x)$ | $g(f(x))$ | $(g \circ f)(x)$ |
| در f به جای x بذار $f(x)$ | $f(f(x))$ | $(f \circ f)(x)$ |

*معمولا توابع $f \circ g$, $g \circ f$ با هم برابر نیستند.

دامنه تابع مرکب:

*دامنه تابع مرکب $f \circ g$ مجموعه x هایی است که هم زمان

در دو شرط زیر صدق کنند:

(۱) در دامنه g قرار داشته باشد.

(۲) در دامنه f قرار داشته باشد.

$$D_{f \circ g} = \left\{ \underbrace{x \in D_g}_1 / \underbrace{g(x) \in D_f}_2 \right\}$$

*به طور مشابه دامنه $g \circ f$ هم به صورت زیر است:

$$D_{g \circ f} = \left\{ \underbrace{x \in D_f}_1 / \underbrace{f(x) \in D_g}_2 \right\}$$

✓ نکته:

الف) شرط تشکیل تابع $f \circ g$: $R_g \cap D_f \neq \emptyset$

ب) شرط تشکیل تابع $g \circ f$: $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

*دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می آوریم نه از روی ضابطه آن.

ب) $(f \circ g)(-1)$

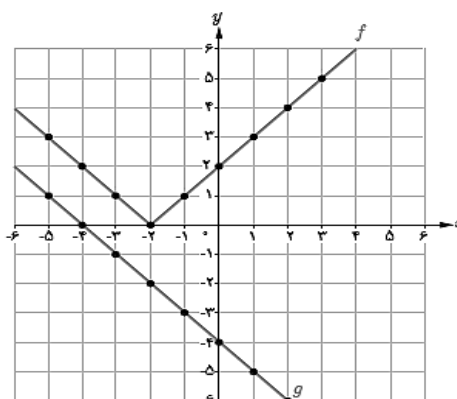
پ) $(g \circ f)(0)$

ت) $(g \circ g)(-2)$

ث) $(g \circ f)(2)$

ج) $(f \circ f)(1)$

⑧ با توجه به نمودارهای f , g توابع مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(f \circ g)(-1)$

ب) $(g \circ f)(0)$

پ) $(f \circ g)(1)$

ث) $(g \circ f)(-1)$

(کاردر کلاسی ص ۱۴)

اگر $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = \frac{3}{x}$ دامنه و ضابطه ی تابع fog, gof را بیابید

(مثال ص ۱۴)

الف) اگر $f(x) = x - 2$, $g(x) = x^2 - 1$ دامنه و ضابطه ی تابع gof را بیابید

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}$$

✓ حل:

دامنه تابع gof :

$$D_{gof} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / (x - 2) \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{\cap} \mathbb{R}$$

ضابطه ی تابع gof :

$$(gof)(x) = g(f(x)) \xrightarrow[\text{در } g \text{ به جای } x \text{ بنذار } f(x)]{g(x)=x^2-1} (x-2)^2 - 1$$

ب) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = 2x^2 - 1$ دامنه و ضابطه ی تابع fog, gof را بیابید

(تمرین ۲ ص ۲۲)

② در هر قسمت دامنه و ضابطه ی تابع fog را بیابید

$$\text{الف) } f(x) = x^2 - 5 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x+6}$$

(تمرین ۴ و ۳ و ۵ ص ۲۲)

④ الف) اگر $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه

$$f \circ g(5) = -25$$

ب) برای هر دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی
 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ وقت برقرار نیستاگر $f(7) = 5$, $g(4) = 7$, $f(7) = 5$ آن گاه $f \circ g(4) = 35$.پ) اگر $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 1$ آن گاه
 $(f \circ g)(5) = g(2)$ ③ اگر $f(x) = 3x - 4$, $f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14$ ضابطه ی تابع $g(x)$ را بیابید☑ حل: در f به جای x بذار $g(x)$

$$\begin{cases} f(g(x)) = 3g(x) - 4 \\ f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14 \end{cases} \rightarrow$$

$$3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14 \rightarrow$$

$$3g(x) = 3x^2 - 6x + 18 \rightarrow$$

$$g(x) = \boxed{x^2 - 2x + 6}$$

ب) $f(x) = \sqrt{3-2x}$; $g(x) = \frac{6}{3x-5}$

② در هر قسمت دامنه و ضابطه ی تابع $g \circ f$ را بیابید

پ) $f(x) = \sqrt{x+2}$; $g(x) = \sqrt{x^2-16}$

ت) $f(x) = \sin x$; $g(x) = \sqrt{x}$

(تمرین ۷ و ۷ ص ۲۲)

⑦ هر یک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید.

الف) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

☑ حل:

$$h(x) = \sqrt[3]{\boxed{x^2} + 1} = f(x) = \sqrt[3]{x + 1} \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{g(x)=x^2}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x + 1}, \quad g(x) = x^2$$

ب) $l(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

⑥ تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع

زیر است.

الف) $f(x) = \sqrt[5]{x}, \quad g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

ب) $k(x) = x^5, \quad l(x) = 3x^2 - 4x + 1$

⑤) الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

نوشتن یک تابع به صورت ترکیب دو تابع:

* همیشه دو تابع را ترکیب می کردیم و تابع مرکب می ساختیم حالا می خواهیم عکس این کار را انجام دهیم برای این کار، قسمتی از تابع مرکب (تابع مرکب را $f \circ g$ در نظر میگیریم) را جدا می کنیم و به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می گیریم و در جای خالی، حرف x قرار می دهیم و تابعی که به دست می آید تابع $f(x)$ است.

* از یک تابع می توان بی شمار، ترکیب دو تابع ساخت

معادلات توابع مرکب:

*مراحل حل معادله $(f \circ g)(x) = a$:

۱. به دست آوردن جواب معادله $f(x) = a$

۲. جواب معادله $f(x) = a$ را مساوی عبارت $g(x)$

قرار داده و معادله را حل می کنیم

*مراحل حل معادله $(g \circ f)(x) = a$:

۱. به دست آوردن جواب معادله $g(x) = a$

۲. جواب معادله $g(x) = a$ را مساوی عبارت $f(x)$

قرار داده و معادله را حل می کنیم

(تمرین ۹ ص ۲۳)

⑨ با توجه به ضابطه های توابع f, g معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = x^2 - 3x + 8$, $f \circ g(x) = 7$

☑ حل:

۱) $f(x) = 7 \rightarrow 2x - 5 = 7 \rightarrow x = 6$

۲) $g(x) = 6 \rightarrow x^2 - 3x + 8 = 6 \rightarrow$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

ب) $g(x) = 1 - 2x$, $f(x) = 3x^2 + x - 1$, $g \circ f(x) = -5$

مراحل رسم توابع به کمک انتقال:

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = af(bx + c) + d$$

• a, d روی عرض نقاط (y) تاثیر مستقیم

دارند و انتقال به صورت آسانسوری است

-اگر $a > 1$ باشد نمودار انبساط عمودی یافته.-اگر $0 < a < 1$ باشد نمودار انقباض عمودی یافته.• b, c روی طول نقاط (x) تاثیر معکوس دارند

و انتقال قطاری است.

-اگر $b > 1$ باشد نمودار انقباض افقی یافته.-اگر $0 < b < 1$ باشد نمودار انبساط افقی یافته.

اولویت:

اول (x) یا (y) فرقی ندارد ولی:• در (x) ها اول c سپس b • در (y) ها اول a سپس d *دامنه تابع با ضابطه $y = kf(x)$ همان دامنه تابع $y = f(x)$ است، اما برد آنها لزوما یکسان نیست*دامنه تابع $y = f(kx)$ با دامنه تابع $y = f(x)$ الزامایکسان نیست، اما برد $y = f(kx)$ همان برد $y = f(x)$

است

(مثال ص ۱۵)

اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع

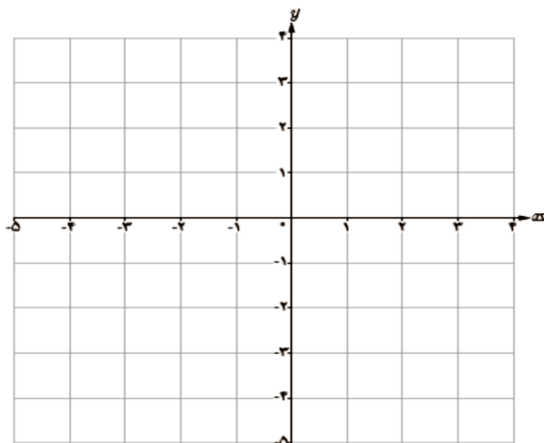
$$y = \frac{1}{2}f(x), y = -f(x), y = 2f(x)$$

کنید

(کاردر کلاسی ص ۱۶)

- نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع زیر را روی یک محور رسم کنید.

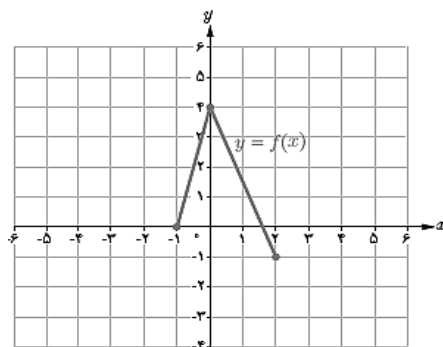
$$k(x) = -\frac{1}{3}|2-x|, h(x) = \frac{1}{2}|x-2|, g(x) = -|x-2|$$



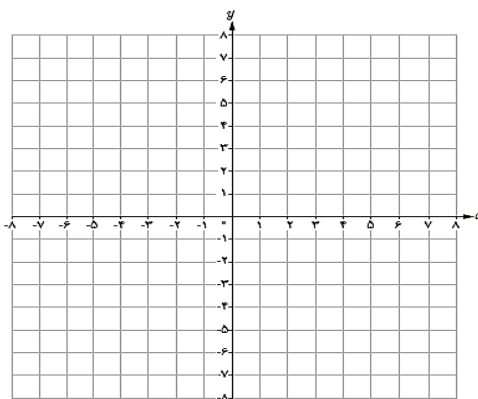
نمودار تابع $y = \sin x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع زیر را روی یک محور رسم کنید و با هم مقایسه کنید

$$y = 2 \sin x, y = -2 \sin x, y = \frac{1}{2} \sin x$$

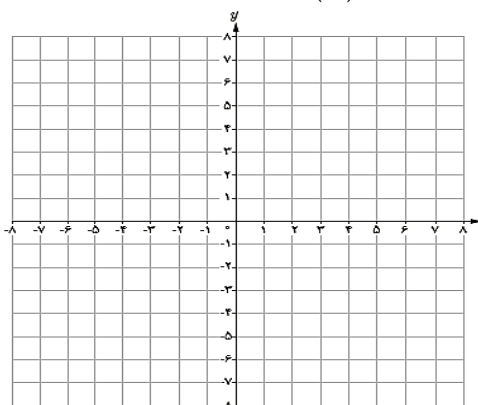
$$y = f(x)$$



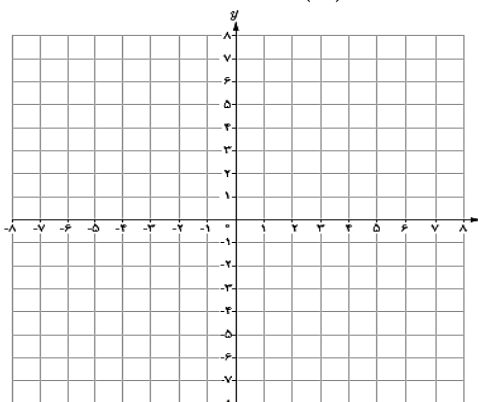
$$y = \frac{1}{2} f(x)$$



$$y = -f(x)$$



$$y = 2f(x)$$



(مثال صی ۱۹)

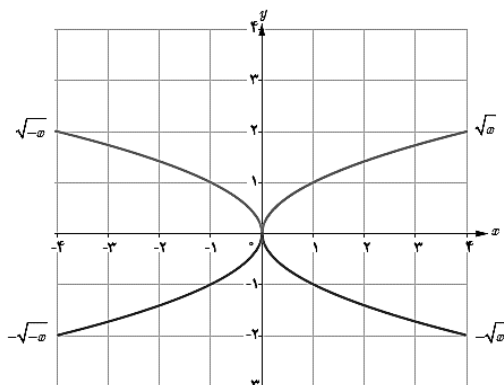
نمودار تابع $y = \sin x$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع زیر را روی یک محور رسم کنید و با هم مقایسه کنید

$$y = \sin 2x, y = \sin \frac{x}{2}$$

(گارد رگلاسی صی ۱۹)

نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع زیر را روی یک محور رسم کنید و دامنه و برد توابع را بنویسید.

$$y = \sqrt{-x}, y = -\sqrt{x}, y = -\sqrt{-x}$$



حل:

رسم نمودار $y = |f(x)|$:

نمودار $y = f(x)$ را رسم می کنیم و قسمت هایی را که منفی و زیر محور x است را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم زیرا قدر مطلق، مقادیر منفی را مثبت می کند

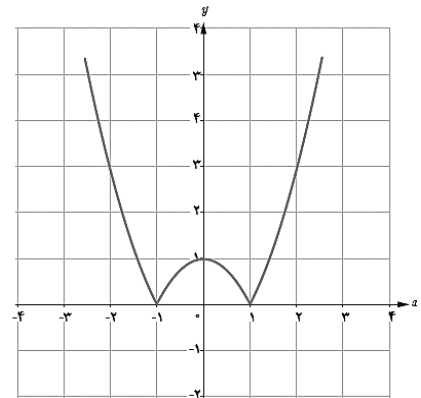
(مثال صی ۱۷)

نمودار تابع $y = |x^2 - 1|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $x^2 - 1$ را که یک سهمی است رسم می

کنیم سپس قسمت های منفی را نسبت به محور x قرینه می

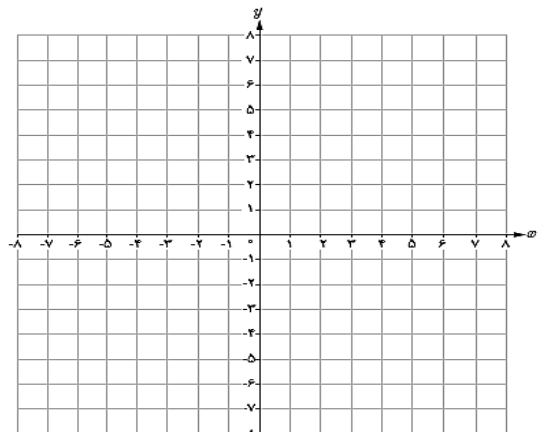
کنیم



(مثال صی ۱۸)

- نمودار تابع $f(x) = x + 3$ را با دامنه $[-4, 0]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع زیر را روی یک محور رسم کنید.

$$y = f(2x), y = f\left(\frac{x}{2}\right)$$



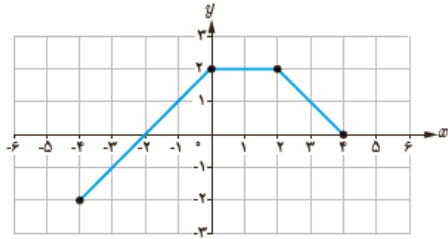
(تمرین ۱۲ و ۱۳ ص ۲۳)

(کاردرک کلاسی ص ۲۰)

۱۲) اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع زیر را

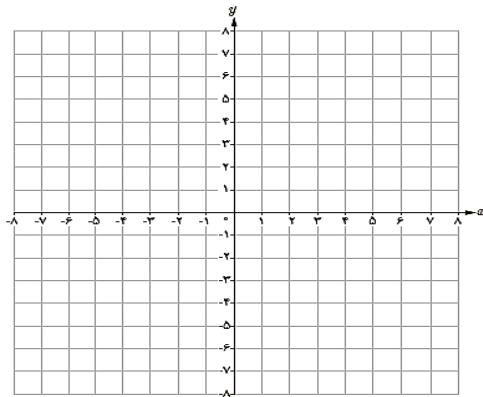
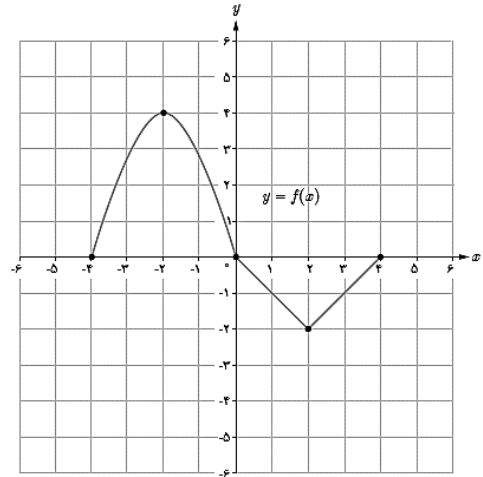
اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع

رسم کنید $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, $y = f(2x)$



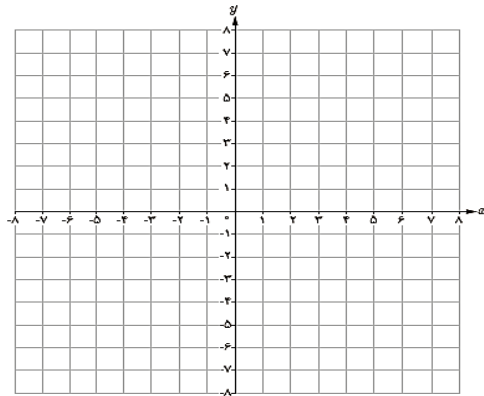
رسم کنید

$$y = \frac{1}{2}f(2x) - 1$$

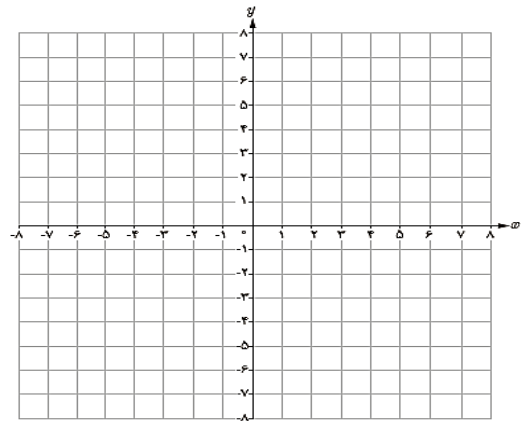


$$y = -f(-x) + 2$$

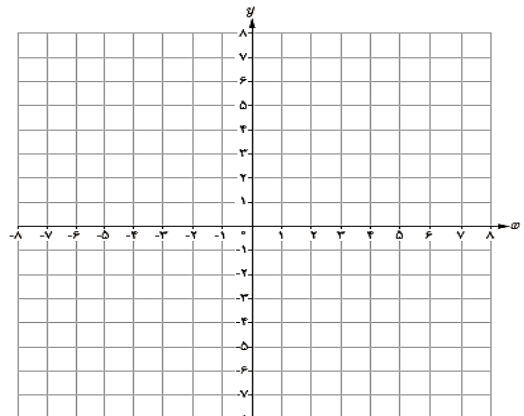
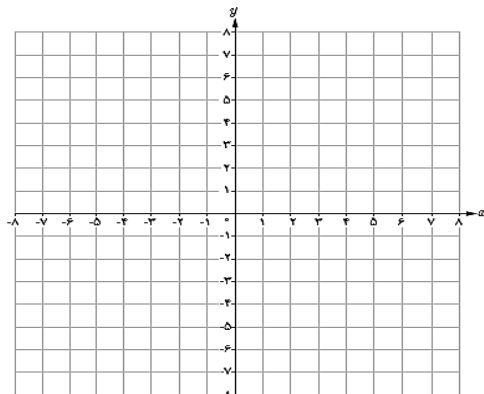
$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$



$$y = 2f(x-1) - 3$$



$$y = f(2x)$$

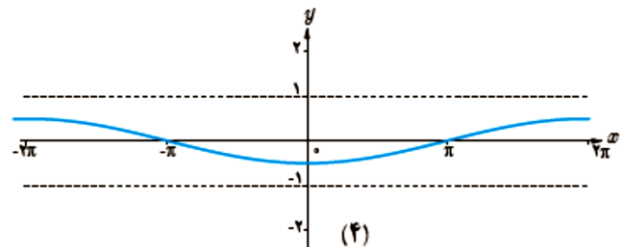
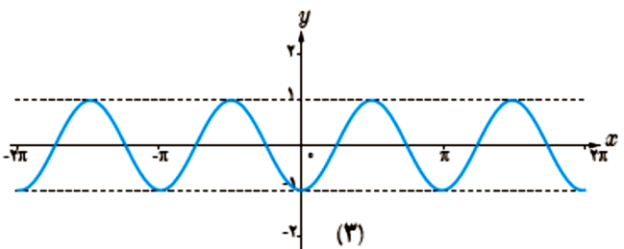
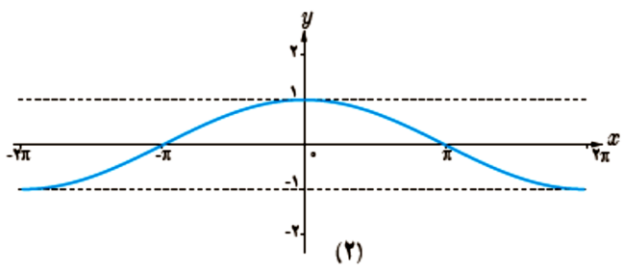
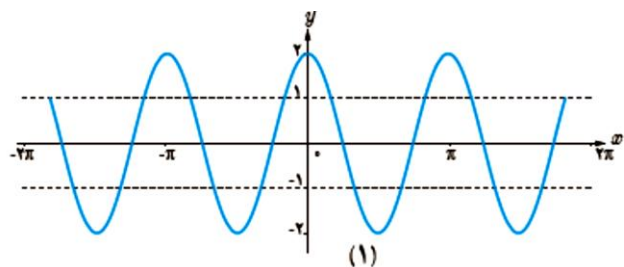


(تمرین ۱۰ ص ۲۳)

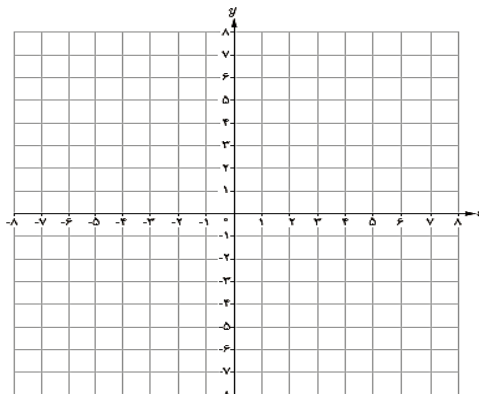
⑩ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{1}{2} \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$ ب) $y = 2 \cos 2x$

پ) $y = -\frac{1}{2} \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$ ت) $y = 2 \cos 2x$



$$y = 2f\left(\frac{1}{2}x\right)$$



⑪ نمودار تابع $y = \sin x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$y = -\sin 2x - 1, \quad y = 2 \sin\left(\frac{-1}{3}x\right)$$