فصل ۱ درس ۳: تابع وارون

تابع وارون:

در نمایش زوج مرتبی یک تابع یک به یک (f) ،اگر جای مولفه های اول و دوم را عوض کنیم ،وارون تابع (f^{-1})به دست می آید.

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

مثال:

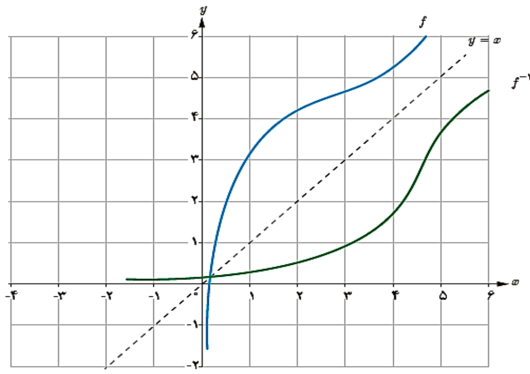
$$f=\{(۶,۴),(۵,۳),(۲,۱)\}\to f^{-1}=\{(۴,۶),(۳,۵),(۱,۲)\}$$

*دامنه و برد f, f^{-1} عکس هم هستند:

$$D_f=R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f=D_{f^{-1}}$$

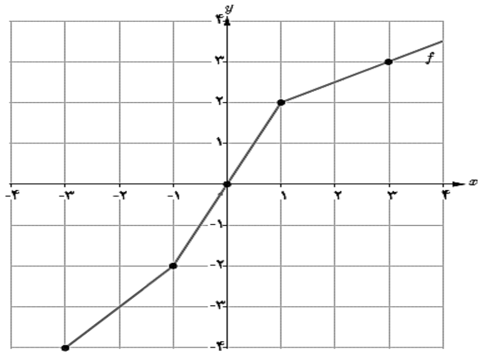
*نمودار تابع (f)و تابع وارون آن (f^{-1}) نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم)قرینه اند.

*برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است مختصات نقاطی را که روی (f)مشخص است پیدا کنیم و جای x,y را عوض کنیم و تابع وارون را رسم کنیم



(تمرین ۵ص۲۹)

⑤از نمودار (f) برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-1}(x)$	...	...	...	...

ترکیب تابع و تابع وارون:

اگر (f) تابعی وارون پذیر باشدترکیب f, f^{-1} تابعی همانی هست.

$$f(f^{-1}(x))=x \quad ; \quad x\in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x))=x \quad ; \quad x\in D_f$$

(مثال ص ۲۴)

اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$باشد حاصل $f\,o\,f^{-1}$ و $f^{-1}of$ را بیابید.

☑حل:

$$f^{-1}=\{(۴,۶),(۳,۵),(۱,۲)\}$$

$$\begin{cases}(fof^{-1})(۴)=f(f^{-1}(۴))=f(۱)=۴\\(fof^{-1})(۳)=f(f^{-1}(۳))=f(۲)=۳\\(fof^{-1})(۵)=f(f^{-1}(۵))=f(۳)=۵\end{cases}$$

$$\to fof^{-1}=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(۱)=f^{-1}(f(۱))=f^{-1}(۴)=۱\\(f^{-1}of)(۲)=f^{-1}(f(۲))=f^{-1}(۳)=۲\\(f^{-1}of)(۳)=f^{-1}(f(۳))=f^{-1}(۵)=۳\end{cases}$$

$$\rightarrow f^{-1}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$$

*اگر دوتابع $f\,,g$ در شرایط زیر صدق کنند حتما یک به یک و وارون یکدیگرند.

الف) $(fog)(x)=x\ ;\ x\in D_g$

ب) $(gof)(x)=x\ ;\ x\in D_f$

(مثال ص ۲۶)

نشان دهید توابع $f(x)=۳x-۴\,,g(x)=\dfrac{x+۴}{۳}$ وارون یکدیگرند

☑حل:

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع ،برابر تابع همانی است

$$f(g(x))=۳g(x)-۴=۳(\frac{x+۴}{۳})-۴=x$$
$(x\in D_g)$

$$g(f(x))=\frac{f(x)+۴}{۳}=\frac{۳x-۴+۴}{۳}=x$$
$(x\in D_f)$

(تمرین ۲ص۲۹)

نشان دهید توابع زیر وارون یکدیگرند

الف) $f(x)=\dfrac{-۷}{۲}x-۳\quad,\quad g(x)=-\dfrac{۲x+۶}{۷}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}\quad,\quad g(x)=۸+x^۲\ ;\ x\leq ۰$

به دست آوردن ضابطه تابع وارون:

اگرتابع یک به یک باشد برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون ابتدا xرا بر حسب y محاسبه می کنیم (یعنی xرا تنها می کنیم)سپس جای $x\,,y$را عوض می کنیم و ضابطه $f^{-1}(x)$را می یابیم. ودامنه و برد تابع و وارون تابع را مشخص می کنیم.

(کاردرکلاس ص ۲۶)

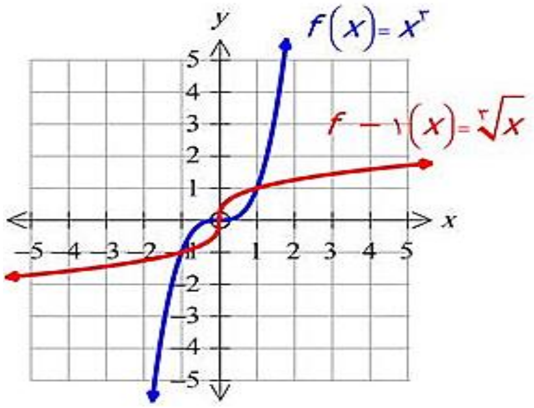
-آیاتابع $f(x)=x^۳$ یک به یک است؟چرا؟

☑حل:

در نمایش مختصاتی تابع یک به یک، هر خط افقی(موازی محور x ها)، نمودار راحداکثر در یک نقطه قطع می کند به عبارتی y تکراری نداریم

-در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x)=x^۳$ و وارون آن را رسم کنید .

☑حل:



-ضابطه تابع وارون چیست؟

☑حل:

$$\underbrace{f(x)=x^۳}_{D_{f^{-1}}=R\ ,\ R_{f^{-1}}=R}=y=x^۳$$

$$\xrightarrow{x \text{ بر حسب } y} x=\sqrt[۳]{y}\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt[۳]{x}$$

$$\rightarrow \underbrace{f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x}}_{D_{f^{-1}}=R\quad,\quad R_{f^{-1}}=R}$$

(مثال و کاردر کلاس ص ۲۷تمرین ۱ص۲۹)

ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید .دامنه و برد هر تابع و وارون آن را مشخص کنید.

$1)\, f(x)=\sqrt{x+3}$

☑حل:

$$\underbrace{f(x)=\sqrt{x+3}}_{D_f=[-3,+\infty)\ ,\ R_f=[0,+\infty)} \to y=\sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{۲طرف به توان ۲}}$$

$$y^2=x+3 \xrightarrow{x \text{ بر حسب } y} x=y^2-3 \xrightarrow{x\leftrightarrow y}$$

$$y=x^2-3 \to \underbrace{f^{-1}(x)=x^2-3}_{D_{f^{-1}}=[0,+\infty),\ R_{f^{-1}}=[-3,+\infty)}$$

$2)\, f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3$

$3)\, g(x)=1+\sqrt{x-2}$

$4)\, v(x)=\dfrac{-8x+3}{2}$

$5)\, g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$

- **نکته:توابع خطی غیر ثابت** $(y=\underset{a\neq 0}{a}\,x+b)$ ،
توابع رادیکالی و توابع گویا ،تابع یک به یک هستند.
- **توابع خطی ثابت** $(y=\underset{a=0}{a}\,x+b)$، **توابع سهمی وتوابع قدر مطلقی،تابع یک به یک نیستند. مثل:**

$h(x)=x^2+1$

☑حل: تابع یک به یک نیست و وارون ندارد

(تمرین ۳ص۲۹)

3رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه گیری دما استفاده می شوند به صورت $f(x)=\dfrac{9}{5}x+32$ **است که در آن** x **میزان درجه سانتی گراد و** $f(x)$ **میزان درجه فارنهایت است .** $f^{-1}(x)$ **را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می دهد.**

وارون ترکیب دو تابع:

*اگر ترکیب دوتابع را وارون کنیم ،تک تک تابع ها وارون و جای آنها عوض می شود.

$$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1} \quad , \quad (gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$$

*برای پیدا کردن مقدار تابع ، ابتدا مقدار x را در تابع داخلی قرار می دهیم.سپس حاصل را در تابع خارجی جایگزین می کنیم

(تمرین ۷ ص۲۹)

اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3, g(x)=x^3$ مقادیر زیر را بدست آورید .

$1)(fog)^{-1}(5)=$

☑حل: ابتدا وارون دو تابع را می یابیم.

$$f(x)=\frac{1}{8}x-3 \to y=\frac{1}{8}x-3 \to y+3=\frac{1}{8}x$$

$$\xrightarrow{x \text{ بر حسب } y} x=8y+24 \xrightarrow{x\leftrightarrow y}$$

$$y=8x+24 \to \underline{f^{-1}(x)=8x+24}$$

$$g(x)=x^3 \to \underline{g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}}$$

حالا مقدار خواسته شده را می یابیم:

$$(fog)^{-1}(5)=(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))=$$

$$\sqrt[3]{8(5)+24}=\sqrt[3]{64}=\boxed{4}$$

$2)(f^{-1}of^{-1})(6)=$

☑حل:

$$(f^{-1}of^{-1})(6)=f^{-1}(f^{-1}(5))=$$

$$8(8(6)+24)+24=\boxed{600}$$

$3)(g^{-1}of^{-1})(5)=$

محدود کردن دامنه یک تابع غیر یک به یک وتبدیل آن به تابع یک به یک:

*اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست .اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد.

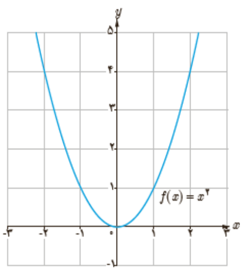
*توابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ در هر یک از بازه های $\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right),\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right]$ یک به یک است.

(مثال ص ۲۷ و۲۸)

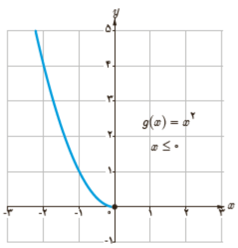
توابع زیر یک به یک نیستند .با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آنها را به دست آورید.(با رسم شکل)

$1)f(x)=x^2$

☑حل:

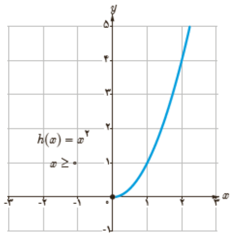


باتوجه به شکل تابع را به دو تابع $g(x),h(x)$ که ضابطه های آنها همان ضابطه $f(x)$ است. محدود می کنیم وتابعی یک به یک می سازیم دامنه بازه $(-\infty,0]$ یا $[0,+\infty)$ است



$$g(x)=x^2 \quad , \quad D_g=(-\infty,0]$$

$h(x)=x^2 \ , \quad D_h=[0,+\infty)$



حالا ضابطه وارون آنها را به دست می آوریم:

ضابطه وارون $g(x)$:

$g(x)=x^2 \ , \quad D_g=(-\infty,0]$

$\underbrace{g(x)=x^2}_{D_g=(-\infty,0],\ R_g=[0,+\infty)} \to y=x^2 \xrightarrow{x \text{ بر حسب } y} x=\pm\sqrt{y}$

$\xrightarrow{x\le 0} x=-\sqrt{y} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=-\sqrt{x}$

$\to \underbrace{g^{-1}(x)=-\sqrt{x}}_{D_{g^{-1}}=[0,+\infty),\ R_{g^{-1}}=(-\infty,0]}$

ضابطه وارون $h(x)$:

$h(x)=x^2 \ , \quad D_h=[0,+\infty)$

$\underbrace{h(x)=x^2}_{D_h=[0,+\infty),\ R_h=[0,+\infty)} \to y=x^2 \xrightarrow{x \text{ بر حسب } y} x=\pm\sqrt{y}$

$\xrightarrow{x\ge 0} x=\sqrt{y} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt{x}$

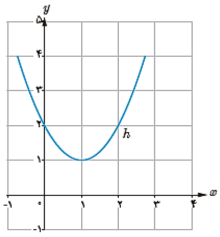
$\to \underbrace{h^{-1}(x)=\sqrt{x}}_{D_{h^{-1}}=[0,+\infty),\ R_{h^{-1}}=[0,+\infty)}$

2) $h(x)=x^2-2x+2$

☑حل:

$h(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$

تابع را به دو تابع $k(x),l(x)$ که ضابطه های آنها همان ضابطه $h(x)$ است. محدود می کنیم وتابعی یک به یک می سازیم .دامنه بازه به صورت زیر است:



$[1,+\infty)$ یا $(-\infty,1]$

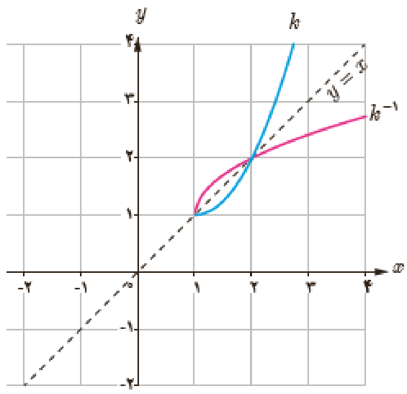
$k(x)=(x-1)^2+1 \ , \quad D_g=(1,+\infty]$

$\underbrace{k(x)=(x-1)^2+1}_{D_k=(1,+\infty],\ R_k=[1,+\infty)} \to y=(x-1)^2+1$

$\xrightarrow{x \text{ بر حسب } y} (x-1)^2=y-1 \to x-1=\pm\sqrt{y-1}$

$\xrightarrow{x\ge 0} x=\sqrt{y-1}+1 \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt{x-1}+1$

$\to \underbrace{k^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+1}_{D_{k^{-1}}=[1,+\infty),\ R_{k^{-1}}=[1,+\infty)}$



بازه $(-\infty,1]$ رابه صورت بالا می توان نوشت

(تمرین ۴ و ۶ص ۲۹)

4 توابع زیر یک به یک نیستند .با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک بسازید و ضابطه وارون آنها را به دست آورید.

۱) $f\left(x\right)=\left|x\right|$

۲) $g\left(x\right)=-x^{۲}$

۳) $h\left(x\right)=x^{۲}+۴x+۳$

5 با محدود کردن دامنه ی تابع $f\left(x\right)=x^{۲}-۴x+۵$ **یک تابع یک به یک بدست آورید و دامنه و برد** f **و وارون آن را بدست آورید . و این دو شکل را رسم کنید.**