



مثلثات



$$\sin \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

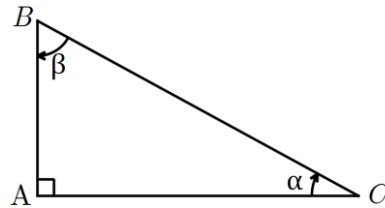
$$\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{AC}{AB}$$

ابتدا یک یادآوری کوتاه از فصل مثلثات داشته باشیم.

در هر مثلث قائم الزاویه برای زاویه حاده α داریم:



و همواره داریم: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ و $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ و $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

زوایای مهم مثلثاتی:



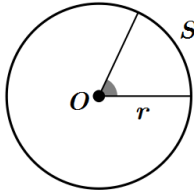
x	۳۰	۴۵	۶۰
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$		۱	$\sqrt{3}$
$\cot x$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$





دایره مثلثاتی: در دایره مثلثاتی شعاع ۱ واحد است

قبلا برای اندازه گیری زاویه با واحد درجه آشنا شدیم. یکی دیگر از واحد های اندازه گیری زاویه ، رادیان نام دارد. برای اندازه گیری زاویه مرکزی O بر حسب رادیان کافی است طول کمان روبه رو به آن زاویه را به طول شعاع دایره تقسیم



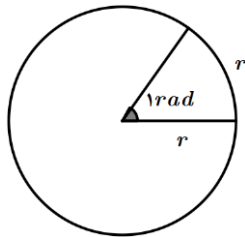
کنیم:

$$\theta(\text{rad}) = \frac{S}{r}$$

با توجه به تعریف رادیان نتیجه می گیریم که یک رادیان اندازه زاویه ای مرکزی است که طول کمان روبه رو به آن



برابر با طول شعاع در هر دایره دلخواه است.



$$1 \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$$

تبدیل نسبت های مهم در دایره مثلثاتی:

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ$$

توابع مثلثاتی متناوب



تابع f را **متناوب** گوئیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر x از دامنه داشته

$$f(x + T) = f(x) \text{ باشیم}$$

کوچک ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دوره تناوب** f مینامیم.

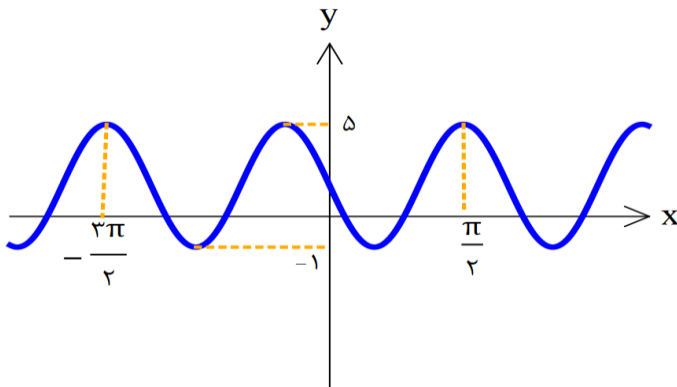
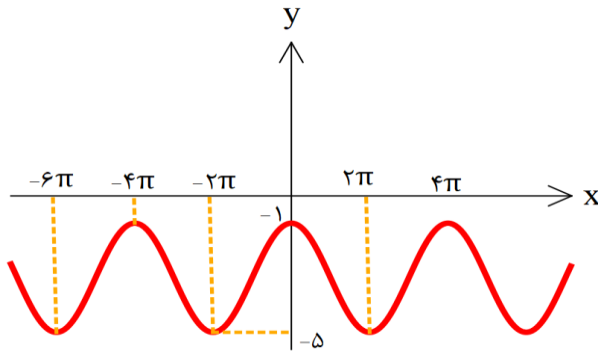
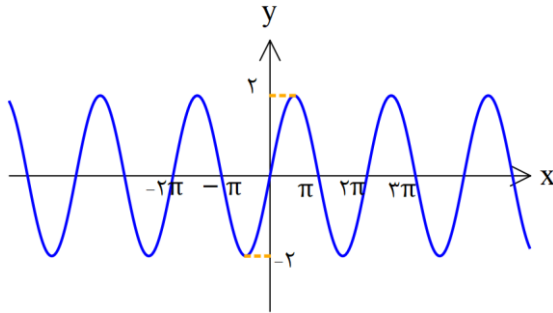




♦ دوره تناوب توابع به صورت: $y = a \sin bx + c$ یا $y = a \cos bx + c$ برابر با: $T = \frac{2\pi}{|b|}$

♦ مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع بالا از رابطه های روبرو به دست می آید: $\max = |a| + c$, $\min = -|a| + c$

📖 مثال: در شکل های زیر مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب را بیابید.





مثال: دوره تناوب هریک از توابع زیر را محاسبه کنید.

$$y = 5 + 2 \cos \frac{\pi}{4} x \quad \text{الف)}$$

$$y = 3 \sin \left(\frac{-1}{2} x + 4 \right) - 1 \quad \text{ب)}$$

مثال: نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = 3 \sin x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید و دامنه و برد را مشخص کنید.

مثال: دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \sin \frac{\pi}{8} x$ و $y = 2 + \cos 3x$ را به دست آورید.

مثال: تابع مثلثاتی با دوره تناوب $T = 2$ و مقادیر ماکزیمم $\max = 8$ و مینیمم $\min = 3$ بنویسید.





مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 4 \sin(-2\pi x) + 1$

ب) $y = 1 + 2 \cos 4x$

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید. دی ۹۷

مثال: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin\left(\frac{-\pi}{3} x\right)$ را به دست آورید. خرداد ۹۸

مثال: یک تابع مثلثاتی با دوره تناوب $T = \pi$ و مقادیر ماکزیمم $\max = -1$ و مینیمم $\min = -5$ رسم کنید و

سپس ضابطه آن را بیابید.





مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بنویسید.

الف) $y = \pi \cos 3x - \pi$

ب) $y = \frac{2}{3} \sin 4\pi x + 3$

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 \cos(3\pi x) - 1$ را بدست آورید. تیر ۹۸

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos(2\pi x) + 1$ را بدست آورید. شهریور ۹۸

مثال: دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y = 3 \sin 2\pi x$

ب) $y = -2 \cos \pi x + 3$

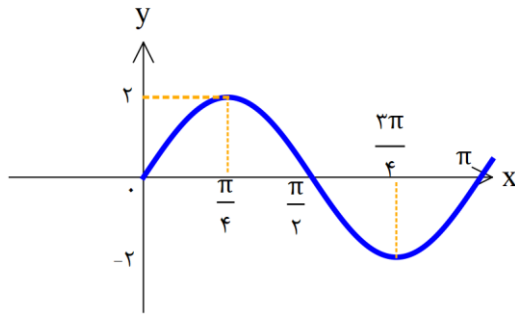
مثال: دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ را بیابید. تیر ۹۹





مثال: دوره تناوب و ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{2} x$ را بیابید. دی ۹۸

مثال: معادله ی منحنی روبه رو را به صورت $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ بیان کنید.

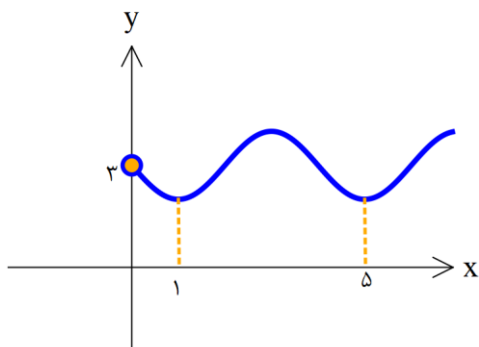


مثال: معادله یک تابع سینوسی را بنویسید که ماکزیمم آن ۶ و مینیمم آن ۱ و دوره تناوب آن ۲ باشد. این تابع را رسم کنید.

کاربرد دوره تناوب در مسائل:



مثال: شکل روبه رو قسمتی از نمودار تابع $y = a + \sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطه ی $x = \frac{25}{3}$ کدام است؟



۳/۵ (۴)

۳ (۳)

۲/۵ (۲)

۲ (۱)



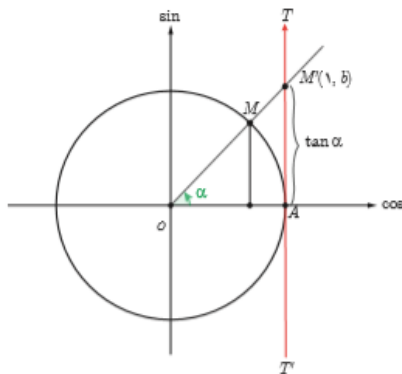


مثال: دوره تناوب دو تابع زیر با هم برابرند. مقادیر ممکن برای b را بیابید.

$$y = -\sin\left(\frac{3\pi x}{b-1}\right), \quad y = -\cos((3b+3)\pi x) + 2$$



تابع تانژانت :



در سال دهم و یازدهم با محورهای \sin و \cos در دایره مثلثاتی آشنا شدیم. امسال قصد داریم با محور \tan در دایره آشنا شده و دوره تناوب و شکل این تابع را به طور مختصر یاد بگیریم. در شکل روبرو

محور موازی با محور \sin را محور \tan مینامیم و طبق شکل داریم:

$$\tan \alpha = AM = b$$



نکات مهم در مورد تابع تانژانت

(۱) تابع تانژانت در نقاط $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تعریف نشده است. (۲) در تمام ربع های مثلثاتی تابع \tan صعودی است.

(۳) تابع \tan در کل دامنه اش صعودی نیست.

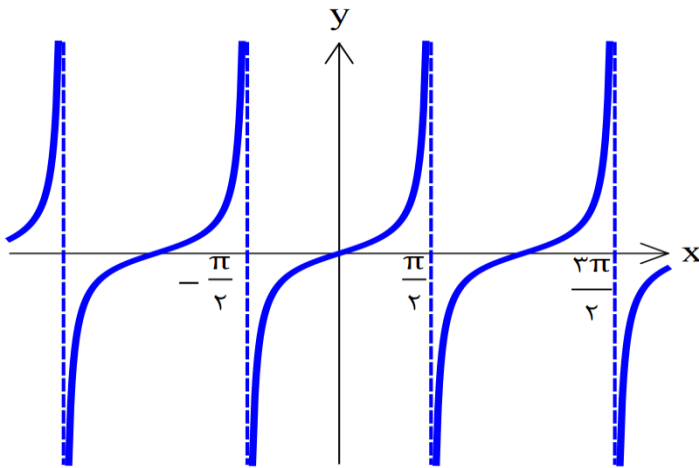




۴) با توجه به نمودار تابع \tan میتوان نتیجه گرفت که دامنه تابع $y = \tan(f(x))$ برابر است با

$$f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۵) نمودار تابع \tan :



۶) دوره تناوب تابع $y = \tan x$ با توجه به شکل بالا $T = \pi$ میباشد.

با توجه به قوانین انبساط و انقباض افقی که در فصل اول آموختید دوره تناوب تابع تانژانت $T = \frac{\pi}{|b|}$ است. یعنی با تابع

مشابه خودش از لحاظ \sin و \cos دوره تناوب آن نصف شده است.

مثال: دوره تناوب تابع $y = 2 \tan 3x + 5$ را بیابید.

مثال: الف) نمودار $y = \tan 2x$ را رسم کنید. دی ۹۷

ب) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خرداد ۹۸

دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر با است. (درست - نادرست)





مثال: صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ بیابید.

مثال: صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید.

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ (الف)}$$

$$g(x) = 2 \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (ب)}$$

$$h(x) = 2 - 3 \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \text{ (پ)}$$





مثال: درستی یا نادرستی هر کدام را مشخص کنید.

الف) تابع تانژانت در ربع چهارم از $\frac{3\pi}{4}$ تا رسیدن به زاویه 2π مقدار کاهشی دارد.

ب) بازه ای وجود دارد که تانژانت در آن بازه صعودی است.

پ) تابع تانژانت تابعی غیر متناوب است.

ت) دوره تناوب تابع $y = -2 \cos\left(\frac{\pi x}{8}\right) + 1$ برابر ۱۶ است.

ث) دامنه تانژانت برابر $D = \mathbb{R} - \left\{x = k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ است.

ج) دوره تناوب تانژانت برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

چ) در نمودار تابع $y = a \cos bx + c$ مقدار بیشینه نمودار ۵ و کمینه ی نمودار ۲ است. در این صورت مقدار a برابر $\frac{3}{5}$ و مقدار c برابر $\frac{1}{5}$ است.

ح) دامنه تابع $y = \tan(x)$ برابر با $\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ است. شهریور ۹۸

خ) در جای خالی عبارت ریاضی مناسب بنویسید.

دوره تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر است. دی ۹۸





نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان:



فرمول های مثلثاتی کتاب دوازدهم تجربی که بدون اثبات آنها را میپذیریم عبارتند از:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad (\text{الف}) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (\text{ب})$$

از فرمول الف فرمول $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ پرکاربرد نتیجه میشود.

از فرمول ب چندین فرمول پرکاربرد میتوان نتیجه گرفت:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \underline{1 - \sin^2 x} - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \quad (1)$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \underline{\sin^2 x} = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \quad (2)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

از شماره ۱ و ۲ نتیجه های مهم نتیجه میشود. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ و $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

مثال: مقدار $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.





مثال: مقدار $\cos \frac{22}{5}$ را محاسبه کنید

مثال: مقدار $\sin \left(\frac{22}{5} \right)^\circ$ را به دست آورید. شهریور ۹۸

مثال: فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای تند باشد، حاصل $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را بیابید.

مثال: α زاویه ای حاده و β زاویه ای منفرجه است. میدانیم: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ مقدار $\cos 2\alpha$ و

$\sin 2\beta$ را محاسبه کنید.





مثال: حاصل عبارت $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$ را بیابید.


مثال: حاصل $\sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sin 4x}{4}$

(۳) $\sin 4x$

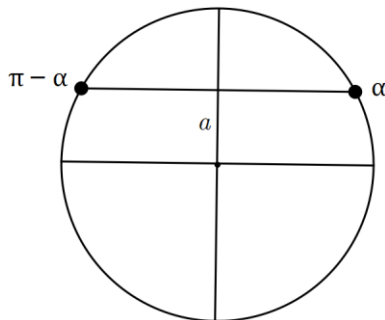
(۲) $\frac{\cos 4x}{4}$

(۱) $\cos 4x$

معادلات مثلثاتی 

الف) معادلات به صورت $\sin x = a$ در این سوالات ابتدا باید مطمئن باشیم عدد a در بازه $[-1, 1]$ قرار داشته باشد. در غیر این صورت معادله جواب ندارد.

حال فرض کنید $a \in [-1, 1]$ باید فکر کنیم $a = \sin ?$ یعنی در حافظه تان به دنبال زاویه ای بگردید که سینوس آن a میشود.




$$\sin x = \sin \alpha$$


$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$


همان طور که در شکل میبینید هر دو نقطه مشخص شده دارای سینوس برابر a هستند.







مثال: معادله ی $\sin x = \frac{1}{2}$ را حل کنید. 

مثال: معادله $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید. 


مثال: معادله ی $\sin 3x = 1$ را حل کنید. 


مثال: معادله $2 \sin^2 5x - \sin 5x = 0$ را حل کنید. 


مثال: معادله $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید. 






مثال: معادله $\sin 4x = \sin x$ را حل کنید. 

مثال: معادله ی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید. شهریور ۹۸ 

مثال: معادلات زیر را حل کنید. 

الف) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

دی ۹۷) ب) $\sin x - \cos 2x = 0$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos 2x - \sin x$ را حل کرده و جواب های کلی آن را بنویسید. خرداد ۹۸ 



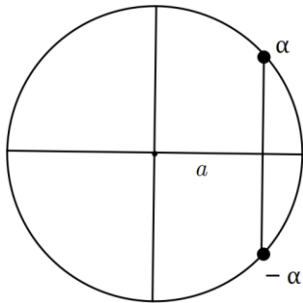


مثال: معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ را حل کنید. تیر ۹۸

ب) معادلات به صورت $\cos x = a$ در این سوالات ابتدا باید مطمئن باشیم عدد a در بازه $[-1, 1]$ قرار داشته باشد.

در غیر این صورت معادله جواب ندارد.

حال فرض کنید $a \in [-1, 1]$ باید فکر کنیم $a = \cos \alpha$ یعنی در حافظه تان به دنبال زاویه ای بگردید که کسینوس آن



a میشود. $\cos x = \cos \alpha$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

همان طور که در شکل میبینید هر دو نقطه مشخص شده دارای


کسینوس برابر a هستند.

مثال: معادله $\cos x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

مثال: معادله $\cos 2x = 1$ را حل کنید.






مثال: معادلات زیر را حل کنید. 


الف) $2 \cos x + 1 = 0$

ب) $\cos 3x = \cos 2x$


$\cos 2x - 3 \cos x + 2 = 0$

مثال: معادله زیر را حل کنید. 

دی ۹۸ $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$


مثال: معادله زیر را حل کنید. 

$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$


مثال: معادله روبرو را حل کنید. 





مثال: معادله روبرو را حل کنید. 

$$\cos x (2 \cos x - 9) = 0$$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید. تیر ۹۹ 

مثال: اندازه دوزلع مثلثی ۴ و ۵ سانتیمتر است. اگر مساحت این مثلث $5\sqrt{2}$ باشد، چند مثلث با این ویژگی وجود 

دارد؟

