



حد تابع



بخش پذیری چند جمله ای ها

ابتدا قبل از ادامه دادن حد از سال یازدهم کمی در مورد بخشپذیری چندجمله ای ها بر $x - a$ صحبت کنیم.

فرض کنید چند جمله ای $f(x)$ داده شده است و باقیمانده تقسیم آن بر $x - a$ را می‌خواهیم.

$$x - a = 0 \rightarrow x = a \rightarrow R = f(a) \text{ باقیمانده}$$

یعنی اگر ریشه مقسوم علیه را در چند جمله ای داده شده قرار دهیم باقیمانده به دست می آید.

نتیجه: اگر در تقسیم $f(x)$ بر $x - a$ داشته باشیم $f(a) = 0$ انگاه می‌گوییم چند جمله ای بر $x - a$ بخشپذیر است.

مثال: باقیمانده تقسیم چند جمله ای $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$ را بر $x - 1$ بیابید.

مثال: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دی ۹۸

چند جمله ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر دو جمله ای $x + 2$ بخش پذیر است.





مثال: چند جمله ای $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $f(x)$ بر $(x-1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید.

پ) $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل هایش بنویسید.

مثال: آیا چند جمله ای $x^3 + 3x^2 - 4x - 6$ بر $x+1$ بخش پذیر است؟

مثال: باقیمانده تقسیم $p(x) = x^4 - kx^2 + 2x^2 + 3$ بر $x-2$ برابر -5 است مقدار k را بیابید.

مثال: اگر باقیمانده تقسیم $p(x+1) = 4x^2 - mx^2 - 3x + 2$ بر $x+1$ برابر 4 باشد، مقدار m چقدر است؟





مثال: در تقسیم چند جمله ای $x^4 - 3x^2 + 4x^2 + 1$ بر $x - 1$ خارج قسمت $q(x)$ و

باقیمانده برابر ۳ است. باقی مانده تقسیم $q(x)$ بر $x + 2$ چقدر است؟

حد توابع جبری به صورت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام آن



هر گاه در محاسبه حد به حالتی رسیدید که هم صورت و هم مخرج صفر شده بود این حالت را مبهم نامیده و سعی می کنیم این حالت را رفع کنیم. برای این کار باید عاملی که باعث صفر شدن صورت و مخرج شده است را پیدا کرده و آن را از صورت و مخرج حذف کنیم. در بیشتر مواقع وقتی $x \rightarrow a$ عبارت $x - a$ را عامل صفر کننده ی صورت و مخرج میدانیم. پس باید سعی کنیم $x - a$ را از صورت و مخرج بیرون بکشیم. در چند جمله ای ها این کار را با تقسیم بر $x - a$ انجام میدهیم.

مثال: حدهای خواسته شده زیر را بیابید.

الف)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2}$$

ب)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$$





پ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{3 - 4x + x^2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$

حد توابع رادیکالی به صورت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام آن



در توابع رادیکالی برای از بین بردن رادیکال که بتوانیم $x - a$ را بیرون بیاوریم باید به فرجه دقت کنیم. اگر فرجه زوج باشد اتحاد مزدوج و اگر با فرجه ۳ مواجه بودید از اتحاد چاق و لاغر کمک بگیرید تا عامل $x - a$ بیرون بیاید.

مثال: حدهای خواسته شده را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}$

شهریور ۹۸





$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x^2 - x - 3}{4x^2 - 4x - 3}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{1-x}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}}$$





$$ج) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2x + \sqrt{x} - 1}{4x - 1}$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$$

مثال: حد زیر را حساب کنید. دی ۹۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$$

مثال: حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. خرداد ۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$$

مثال: حد تابع روبرو را در صورت وجود بیابید. تیر ۹۸





$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$$

مثال: حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. ۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x + 6}}$$

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. تیر ۹۹

حد بی نهایت



فرض کنید تابع f در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده باشد. مفهوم $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ این است که مقدار تابع

f میتواند از هر عدد مثبتی بیشتر شود هر گاه x بتواند از سمت راست به مقدار دلخواه به a نزدیک شود.

و مفهوم این است که $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ این است که مقدار تابع میتواند از هر عدد منفی کمتر شود هر گاه x بتواند از

سمت چپ به مقدار دلخواه a به نزدیک شود.

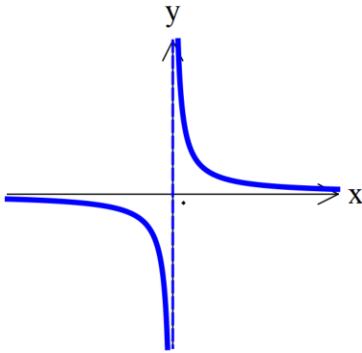
در شکل زیر میخواهیم حد تابع را اطراف $x = 0$ بررسی کنیم:





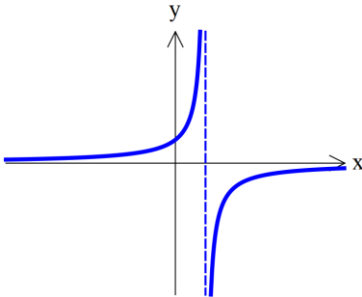
یعنی باید بررسی کنیم وقتی از سمت راست به $x = 0$ نزدیک میشویم چه اتفاقی برای $f(x)$ میفتد و

وقتی از سمت چپ به $x = 0$ نزدیک میشویم چه اتفاقی برای $f(x)$ میفتد.

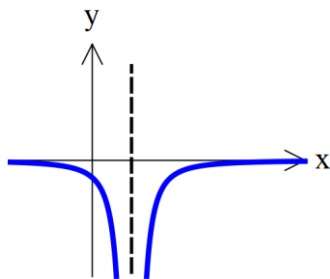


$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

مثال: در شکل زیر تابع f رسم شده است. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ را بیابید.



مثال: قسمتی از نمودار تابع f به صورت شکل زیر است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ؟





قضایای حدهای نامتناهی



$$(۱) \text{ اگر } n \text{ عددی طبیعی باشد آنگاه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n = \text{ج} \\ -\infty & n \neq \text{ج} \end{cases}$$

$$(۲) \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ آنگاه تابع } y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ در نقطه } a \text{ حد نامتناهی (بینهایت) دارد و}$$

علامت بی نهایت را با توجه به علامت L و علامت مقادیر تابع مخرج در همسایگی محذوف مورد نظر تعیین می کنیم.

مثال: حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+4}{2-x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x^2}$

تیر ۹۸

پ) $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+3)^2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{|x-2|}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x]-3}{x+2}$

چ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{|x-3|}$

دی ۹۸





نکته: در توابعی که مثلثاتی هستند حتماً باید دقت کنید که تابع مثلثاتی داده شده در کدام ربع مثلثاتی قرار

دارد و علامت منفرجه را از روی ربع دایره مشخص کنید.

مثال: حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x}$

شهریور ۹۸

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$

مثال: حد تابع زیر را بدست آورید. دی ۹۷ تیر ۹۹





مثال: حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. خرداد ۹۸

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{\sin x}$$

حد در بینهایت



هنگامی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ حد مورد نظر را حد در بینهایت میگوییم.

◆ منظور از $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ آن است که مقدار تابع در بازه ای مثل $(a, +\infty)$ تعریف شده است و $f(x)$ را میتوان به

هر مقدار دلخواه به L نزدیک کرد مشروط بر اینکه x بزرگ شود. (یعنی x به سمت مثبت ∞ میل کند)

◆ منظور از $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ آن است که مقدار تابع در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده است و $f(x)$ را میتوان به

هر مقدار دلخواه به L نزدیک کرد مشروط بر اینکه x به اندازه کافی کوچک شود. (یعنی x به سمت منفی ∞ میل کند)

در این نوع حدها میخواهیم رفتار تابع را در ∞ بررسی کنیم.

اگر عبارت داده شده چند جمله ای باشد، فقط جمله ای که بیشترین توان را دارد در اولویت قرار میدهم.

به طور مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x = -\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$





مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} \right)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{15x - 9}{12x + 2}$

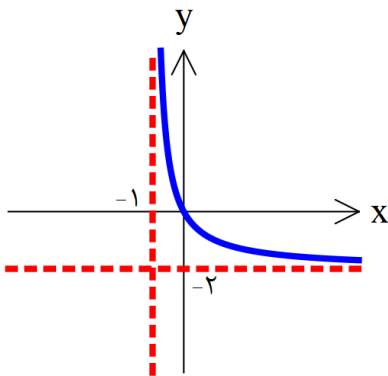
مثال: حد تابع $f(x) = \frac{-3x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ میل میکند برابر میباشد. شهریور ۹۸

مثال: جای خالی را کامل کنید. دی ۹۷

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$$

حد تابع وقتی $x \rightarrow -\infty$ برابر است.

مثال: با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

خرداد ۹۸

مثال: تابعی مثال بنویسید که حد آن در $+\infty$ برابر $10-$ باشد.

