

تابع های خطی

یاد آوری رسم خط

مثال ۱: با به دست آوردن چند نقطه از خط $y = 2x + 3$ نمودار آن را رسم کنید.

x	-1	0	1	2	3
y	1	3	5	7	9

$+2$ $+2$ $+2$ $+2$

$$y = 2 \times 0 + 3 = 3$$

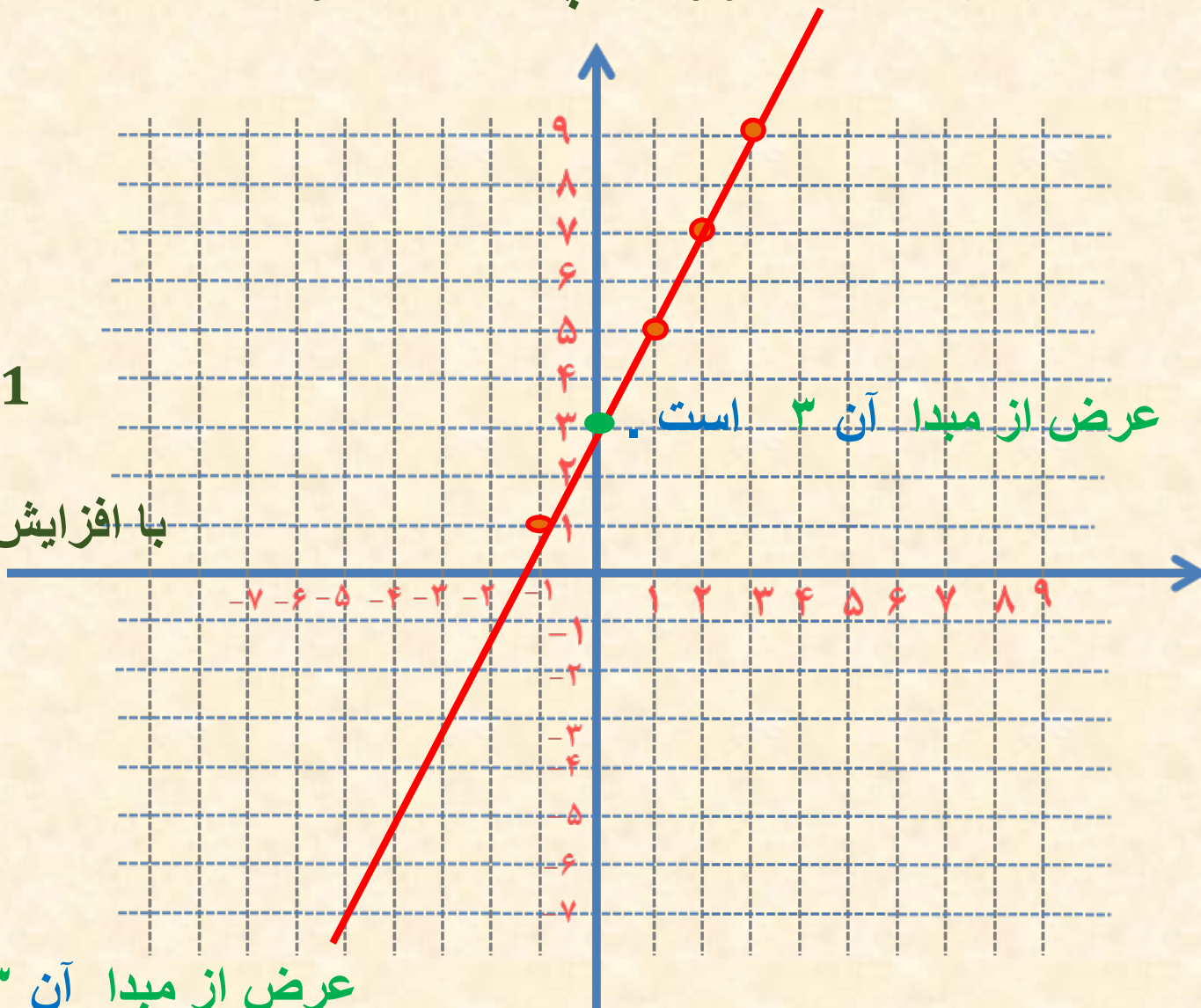
$$y = 2 \times (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

با افزایش هر واحد x مقدار y نیز دو واحد افزایش می یابد.

نمودار خطی با شیب $+2$ است.

$$y = 2x + 3$$

عرض از مبدا آن ۳ است.



مثال ۲: با به دست آوردن چند نقطه از خط $y = -2x + 1$ نمودار آن را رسم کنید.

x	-1	0	1	2	3
y	3	1	-1	-3	-5

\swarrow \swarrow \swarrow \swarrow
 -۲ -۲ -۲ -۲

$$y = -2 \times (0) + 1 = 1$$

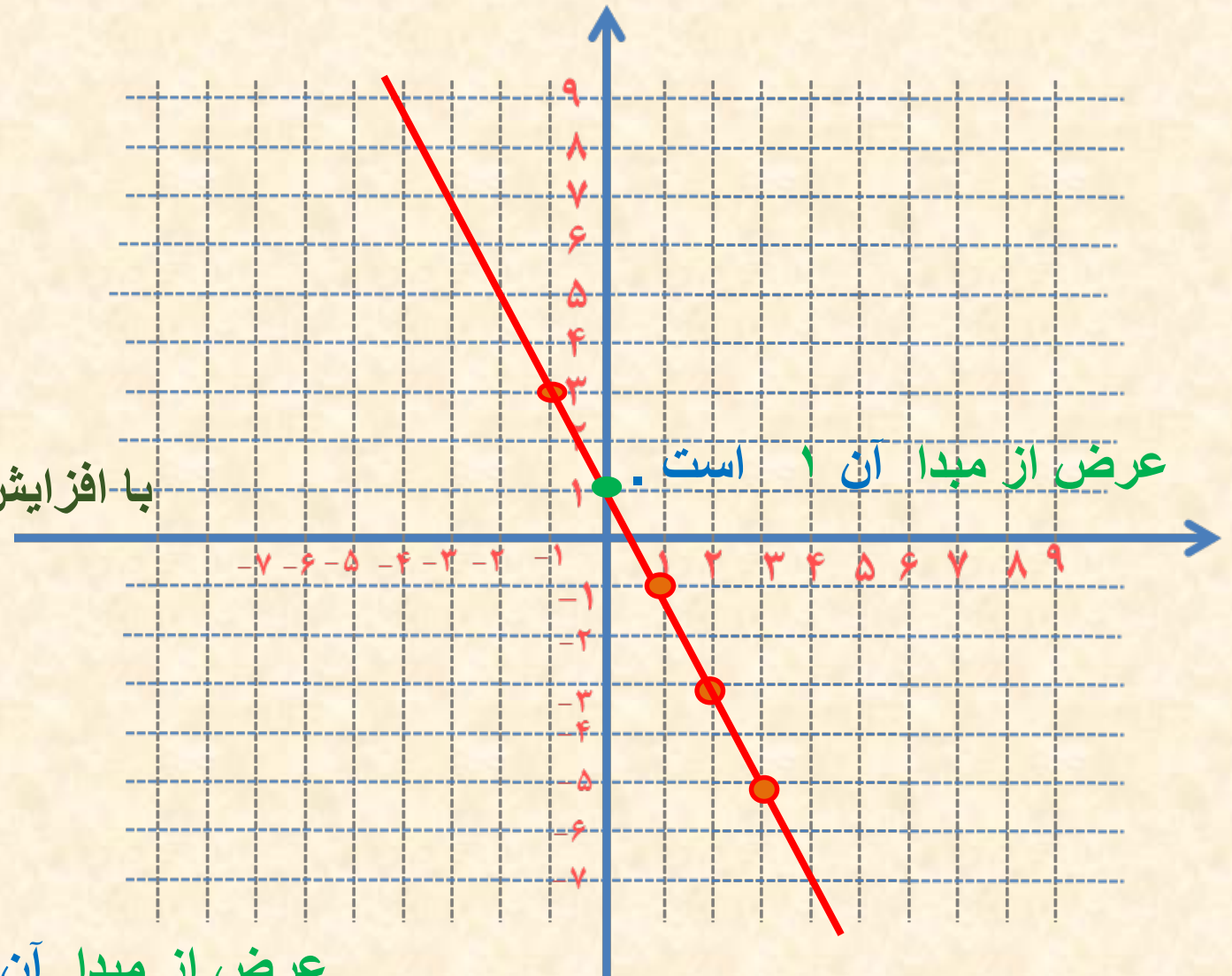
$$y = -2 \times (1) + 1 = -1$$

با افزایش هر واحد x مقدار y نیز دو واحد کاهش می یابد.

نمودار خطی با شیب -۲ است.

$$y = -2x + 1$$

عرض از مبدا آن ۱ است.



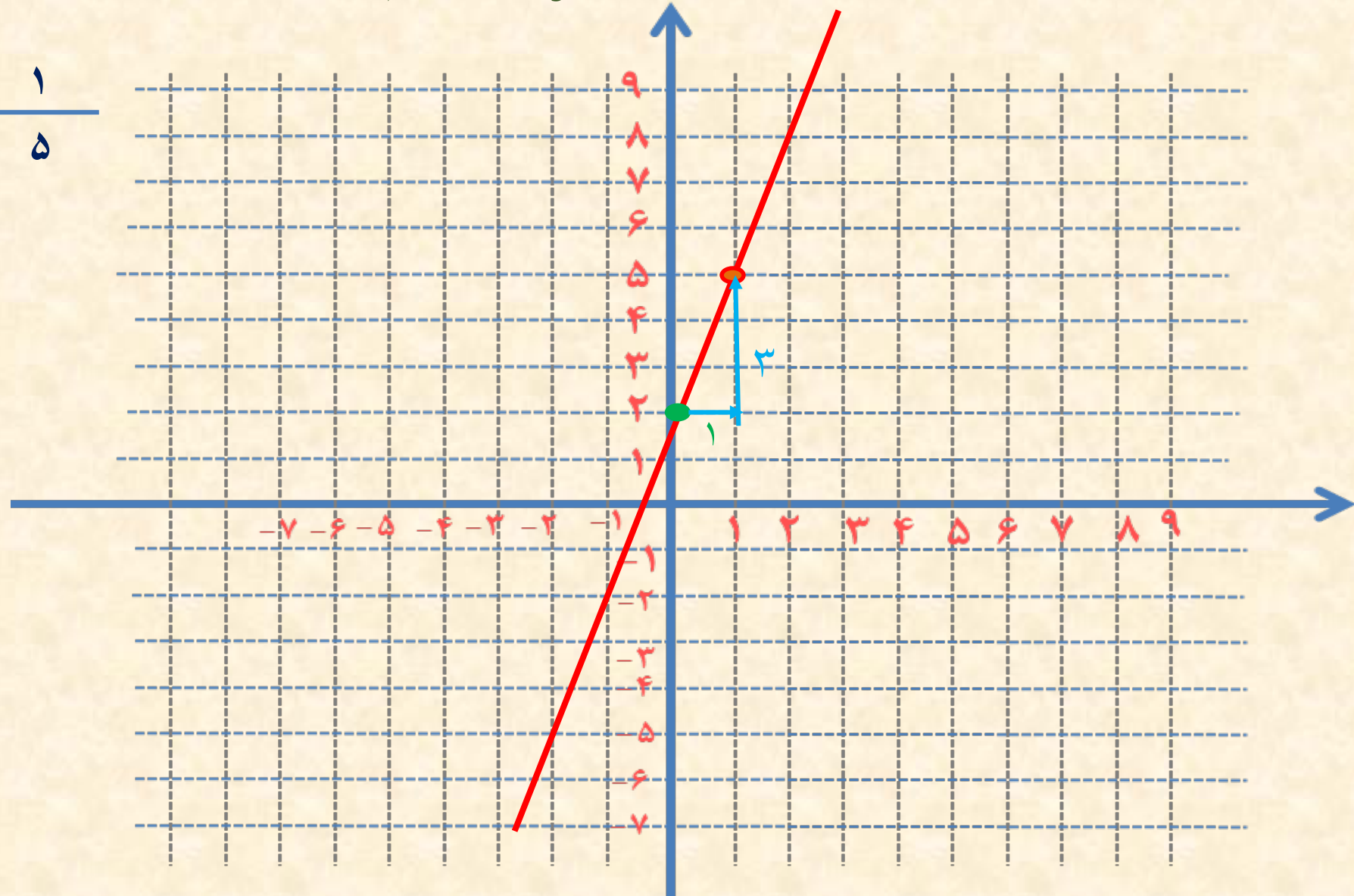
برای رسم یک خط دو نقطه کافی است.

مثال ۳: نمودر خط $y = 3x + 2$ را رسم کنید.

x	۰	۱
y	۲	۵

$$y = 3x + 2$$

$$y = 3 \times 1 + 2 = 5$$



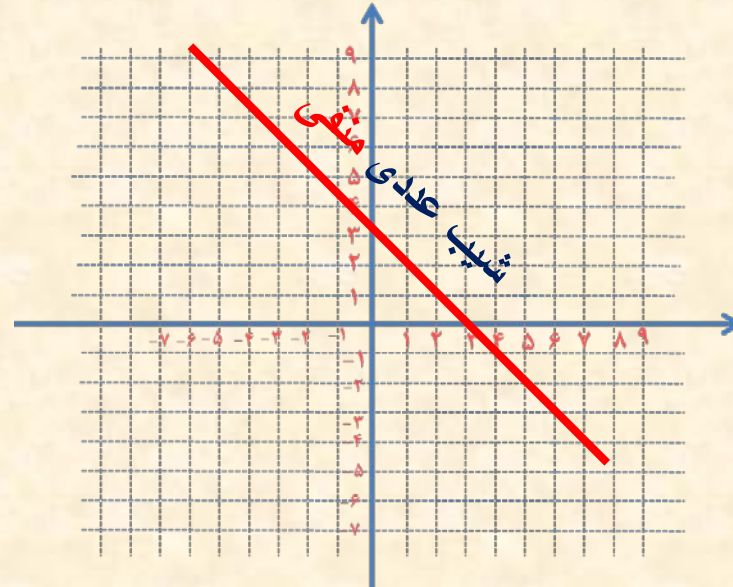
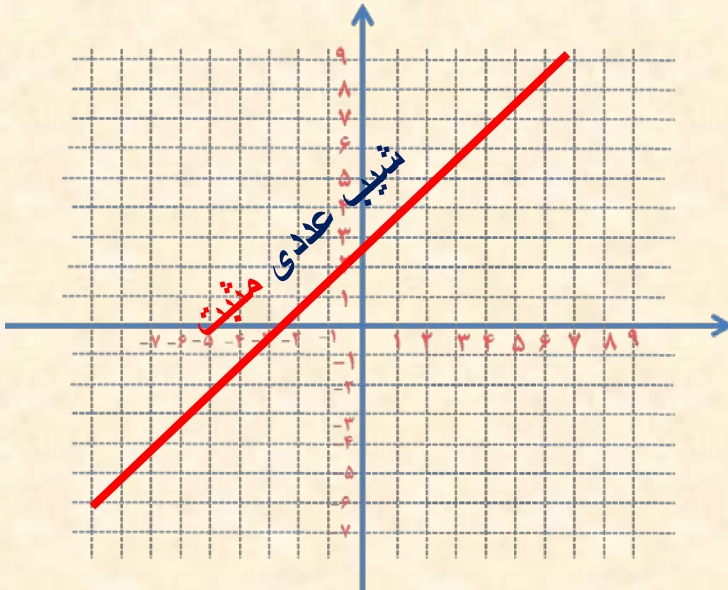
ویژگی اساسی تابع‌های خطی، آن است که به ازای هر ۱ واحد افزایش یا کاهش متغیر تابع، مقدار تابع

به اندازه ثابتی تغییر می‌کند. قانون تابعی که رابطه آنها را توصیف می‌کند، یک چند جمله‌ای درجه ۱ است.

در حالت کلی نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ خطی است با:

شیب

عرض از مبدا



فعالیت (۱)

نوعی بامبو پس از آنکه به ارتفاع ۲۰ سانتی متر می رسد، به طور تقریبی در هر ساعت $\frac{3}{8}$ سانتی متر رشد می کند. ارتفاع بامبو تابعی از زمان است و اگر ارتفاع بامبو را (بر حسب سانتی متر) پس از t ساعت با $h(t)$ نشان دهیم داریم: $h(t) = 20 + \frac{3}{8}t$.

۱ جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع ها بنویسید.

t (بر حسب ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (بر حسب سانتی متر)	20	23/8	27/6	31/4	35/2
	3/8	3/8	3/8	3/8	

$$\begin{aligned}
 h(4) &= 20 + \frac{3}{8} \times 4 = 20 + \frac{15}{2} = \frac{35}{2} \\
 h(2) &= 20 + \frac{3}{8} \times 2 = 20 + \frac{3}{4} = \frac{83}{4} \\
 h(0) &= 20 + \frac{3}{8} \times 0 = 20
 \end{aligned}$$

t (بر حسب ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (بر حسب سانتی متر)	20	$23/8$	$27/6$	$31/4$	$35/2$
		$3/8$	$3/8$	$3/8$	$3/8$

۲ به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t ، مقدار h چه تغییری می کند؟

با افزایش هر واحد t مقدار h نیز $3/8$ واحد افزایش می یابد.

۳ رابطه بین دو کمیت t و h ، خطی است یا غیر خطی؟ چرا؟

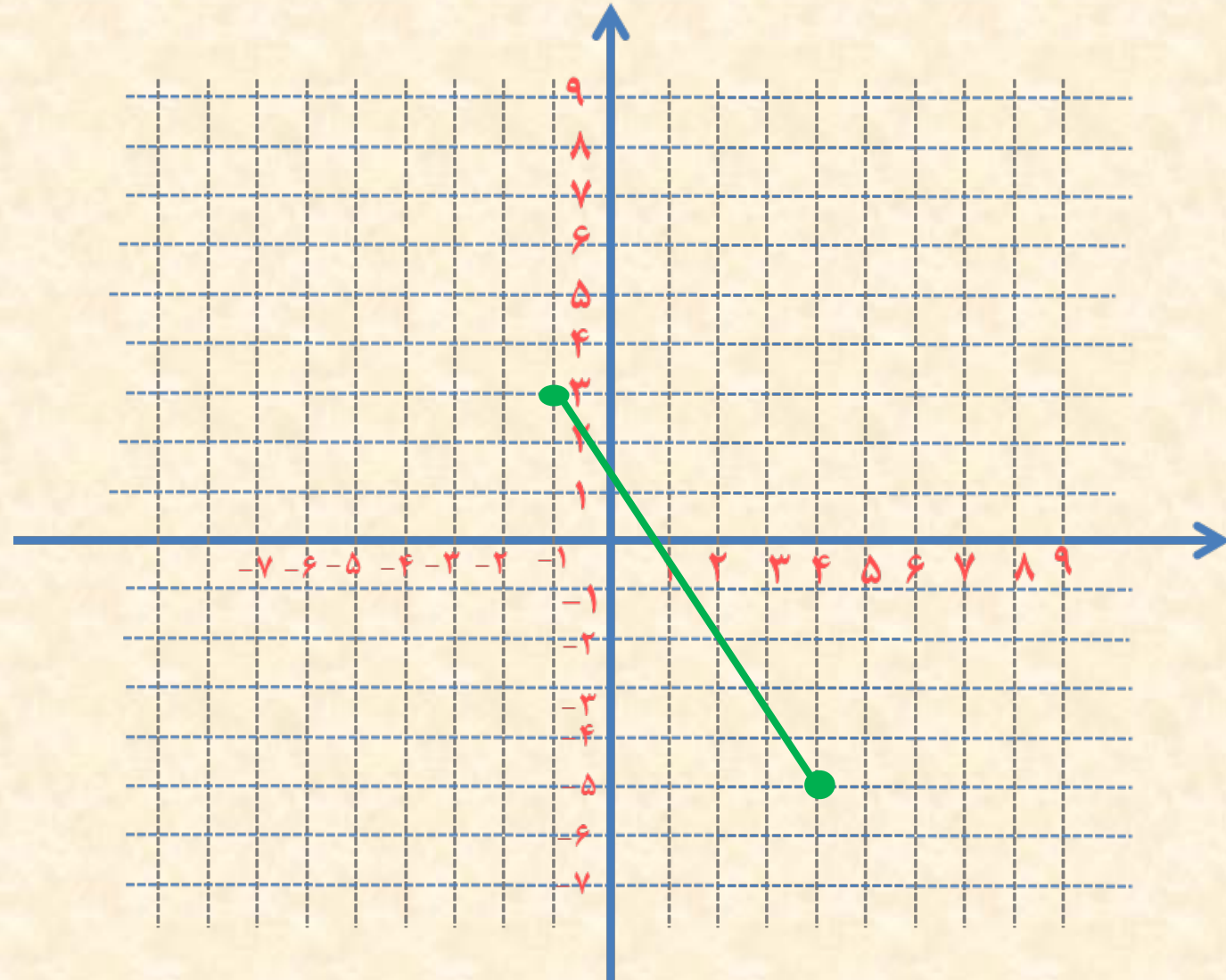
نمودار خطی با شیب $3/8$ است.

رسم تابع خطی در یک بازه

مثال ۴: نمودار تابع $f(x) = -2x + 1$ را در بازه $[-1, 3]$ رسم کنید.

x	-1	3
y	3	-5

نمودار یک پاره خط است.



رضا علاقه زیادی به طراحی داشت. او تا سال قبل، ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد.

۱ رضا قبل از این تصمیم، چند طرح داشت؟ او در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

$$\text{تعداد طرح ها در آخر ماه اول} = 2 \times 1 + 5 = 7$$

$$\text{تعداد طرح ها در آخر ماه پنجم} = 2 \times 5 + 5 = 15$$

۲ اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با $f(x)$ نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنه آن را بنویسید.

$$f(x) = 2x + 5$$

$$0 \leq x \leq 12$$

۳ مقادیر $f(0)$, $f(10)$ را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا $f(-1)$ معنایی دارد؟

$$f(x) = 2x + 5$$

$$0 \leq x \leq 12$$

$$f(0) = 2 \times 0 + 5 = 5$$

تعداد طرح‌ها در ابتدای ماه اول

$$f(10) = 2 \times 10 + 5 = 25$$

تعداد طرح‌ها در آخر ماه دهم

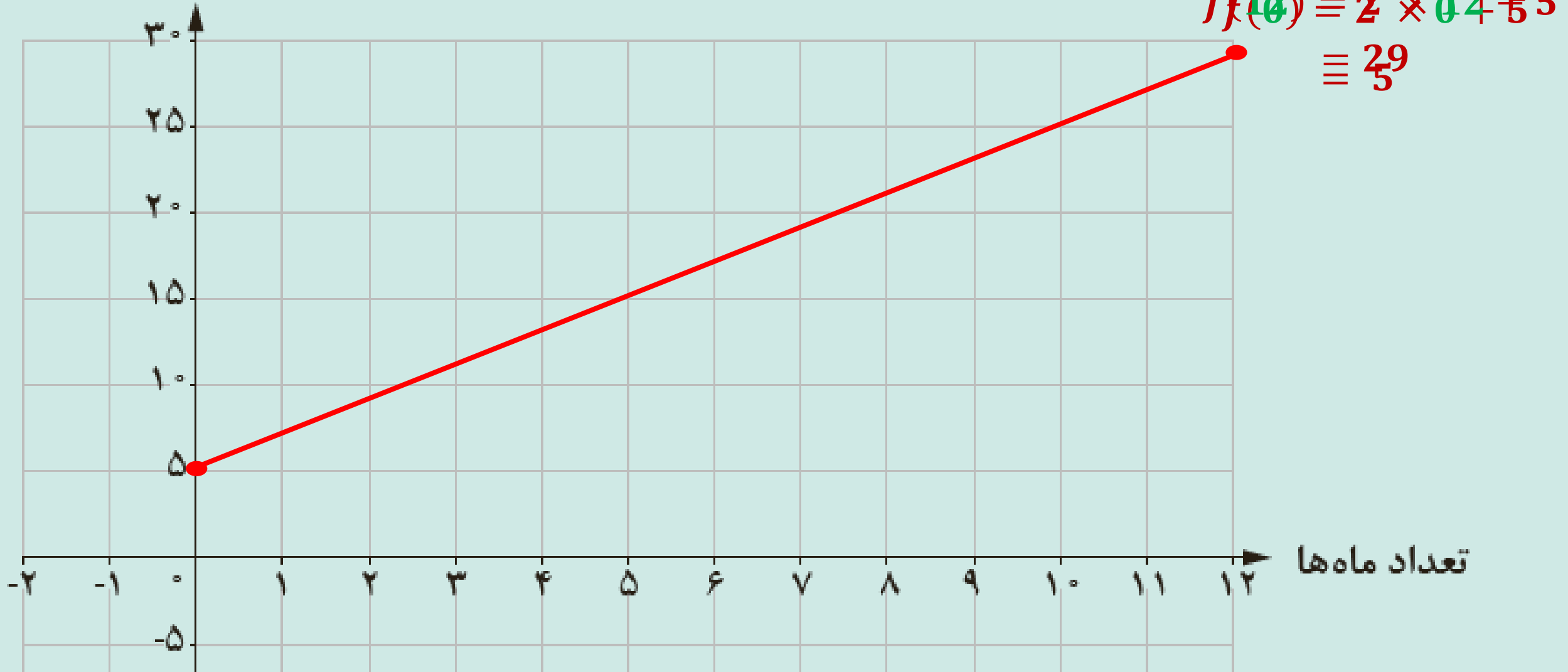
$f(-1)$ معنا ندارد چون -1 در دامنه قرار ندارد.

۴ اگر دامنه تابع را بازه $[0, 12]$ در نظر بگیریم، نمودار تابع را رسم کنید.

x	0	12
y	5	29

$$f(x) = 2x + 5$$

تعداد طرحها



۵ اگر $f(a) = 17$ مقدار a را به دست آورید و معنای آن را بیان کنید.

$$f(x) = 2x + 5$$

$$f(a) = 2a + 5$$

$$2a + 5 = 17$$

$$2a = 17 - 5$$

$$2a = 12$$

$$a = \frac{12}{2}$$

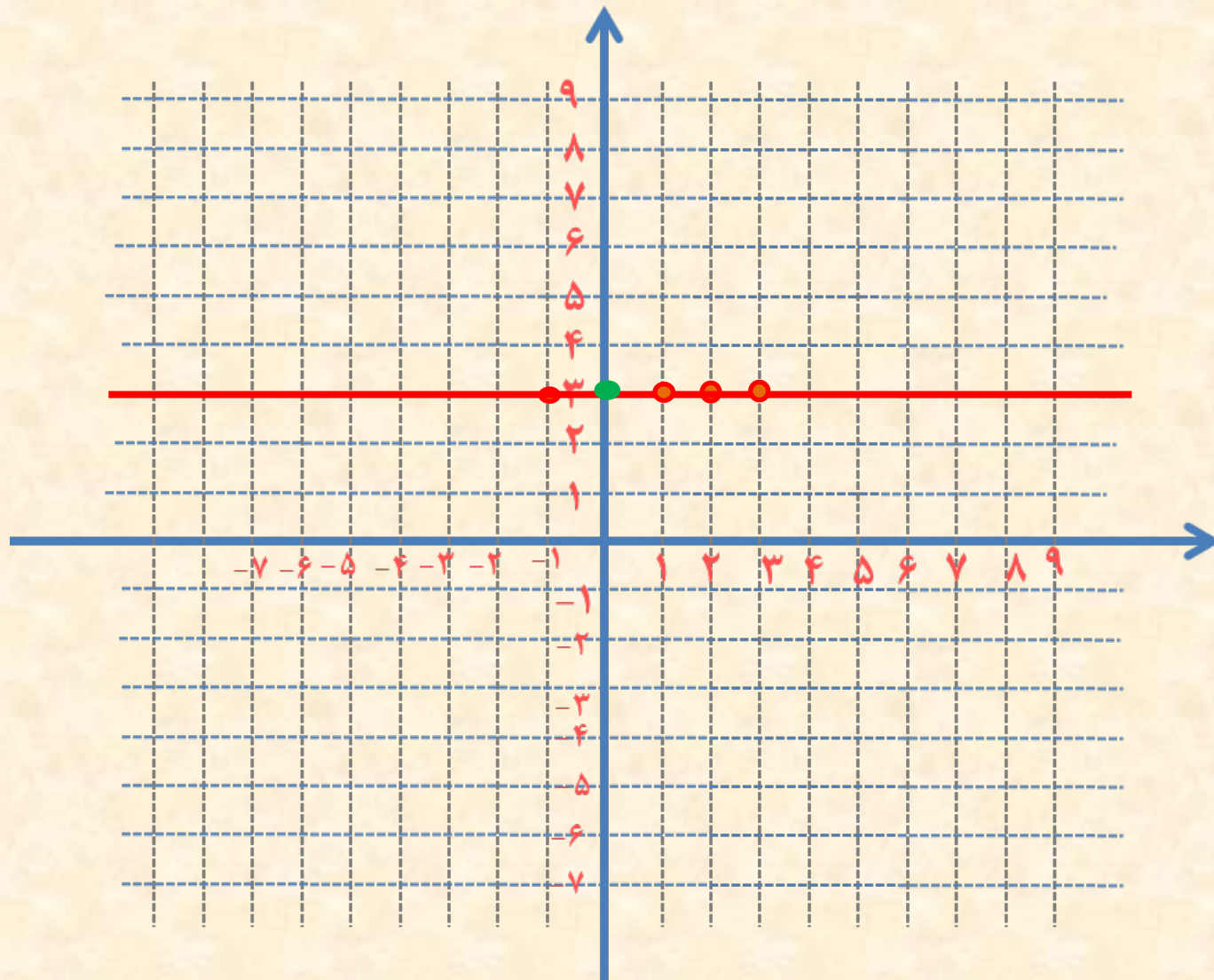
$$a = 6$$

تعداد طرح ها در آخر ماه ششم برابر ۱۷ است

رسم تابع ثابت در مجموعه اعداد حقیقی

مثال ۵: با به دست آوردن چند نقطه از $f(x) = 3$ نمودار آن را رسم کنید.

x	-1	۰	۱	۲	۳
y	3	3	3	3	3



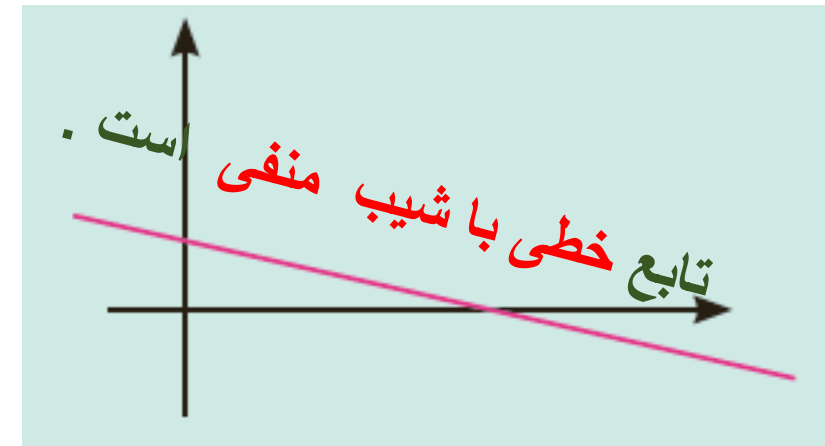
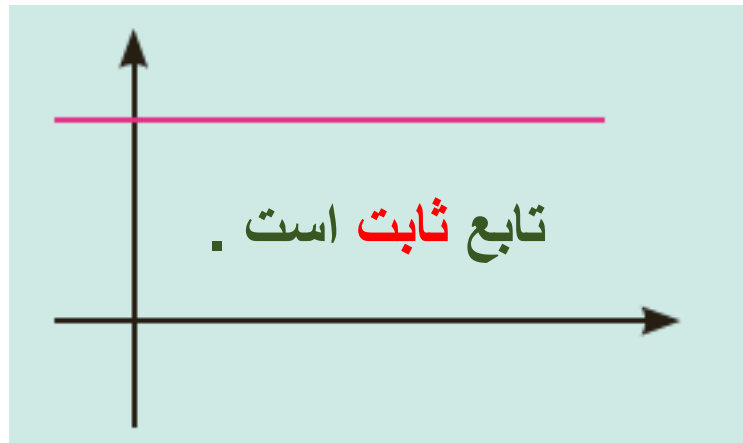
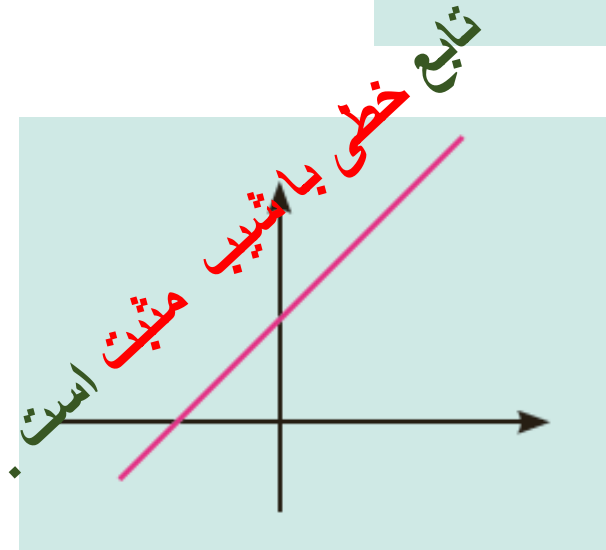
تابع ثابت

تابعی را که به ازای تمام مقادیر متغیر، مقداری ثابت دارد، **تابع ثابت** می نامند.

اگر f یک تابع ثابت باشد قانون آن به صورت $f(x) = c$ می باشد که در آن c یک عدد مشخص است. نمودار تابع ثابت با دامنه \mathbb{R} خطی به موازات محور x ها (شیب صفر) است.

۱ نمودارهای زیر چند تابع خطی را نشان می دهند. مشخص کنید کدام نمودار، مربوط به تابع ثابت است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

کار در کلاس ۲

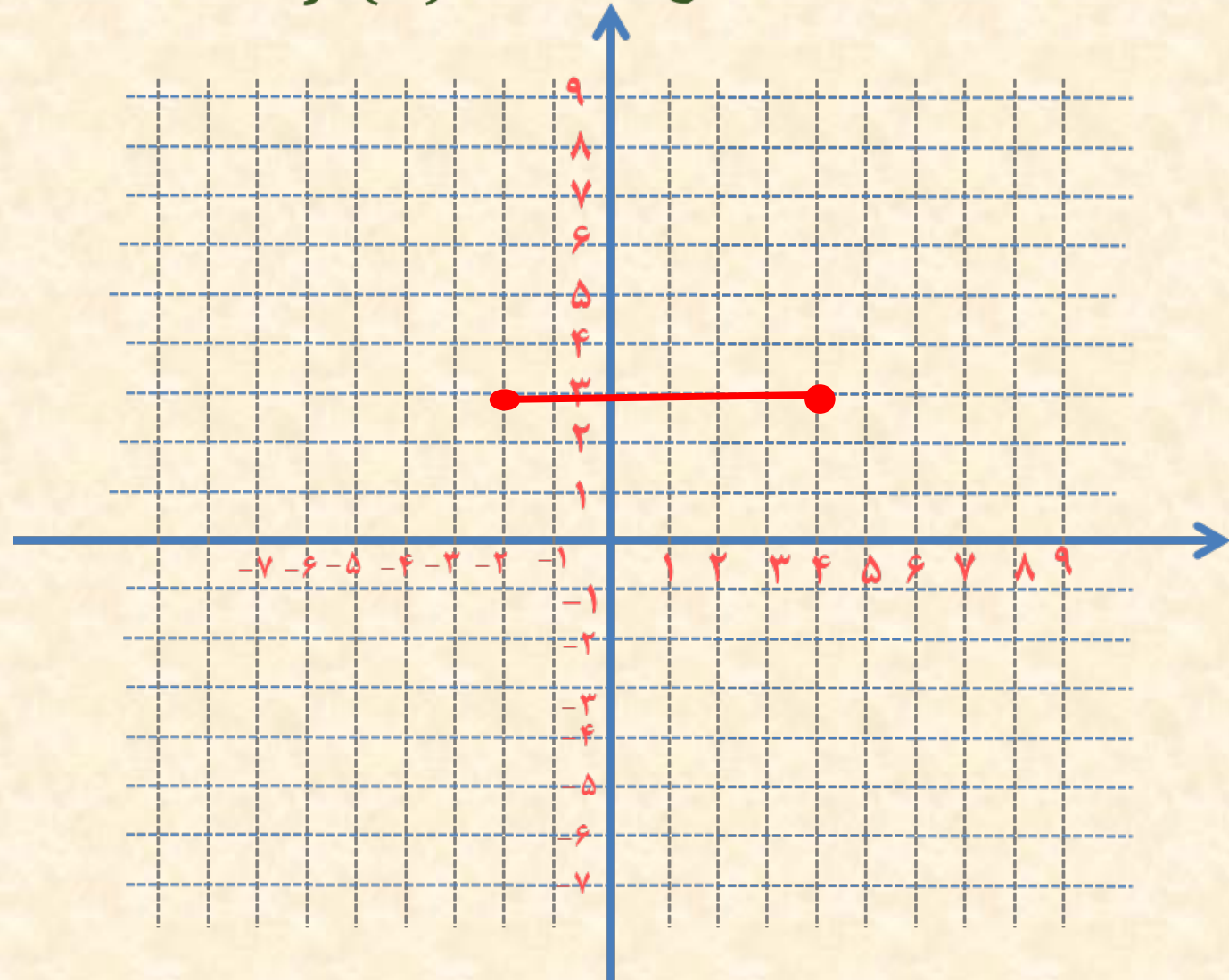


رسم تابع ثابت در یک بازه

مثال ۶: نمودار تابع $f(x) = 3$ را در بازه $[-2, 4]$ رسم کنید.

x	-2	4
y	3	3

نمودار یک پاره خط است.



مثال ۷ : نمودار همه تابع های خطی با قانون $f(x) = ax + 3$ ، در چه نقطه ای مشترک هستند؟

$a=1 \rightarrow f(x) = x + 3$

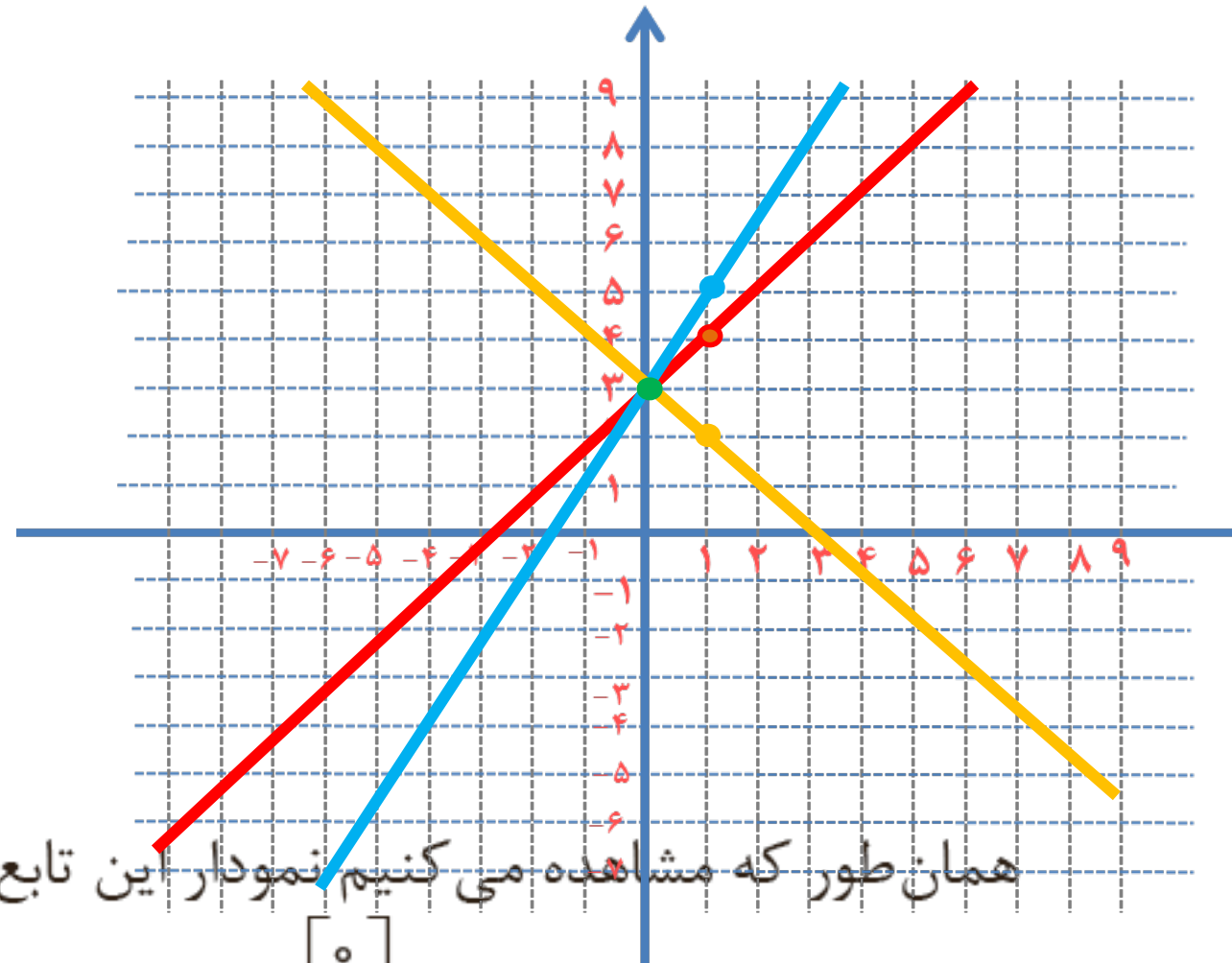
x	0	1
y	3	4

$a=2 \rightarrow f(x) = 2x + 3$

x	0	1
y	3	5

$a=-1 \rightarrow f(x) = -x + 3$

x	0	1
y	3	2



همان طور که مشاهده می کنیم نمودار این تابع ها، در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ همدیگر را قطع می کنند. پس تمام

این تابع های خطی از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ می گذرد.

مسائل

۱ در زیر، جدول مقادیر مربوط به چهار تابع داده شده است. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟

x	-۲	-۱	۰	۱
$g(x)$	۵	-۱۰	-۲۵	-۴۰

-۱۵ -۱۵ -۱۵

خطی است و شیب آن -۱۵ است

x	-۲	-۱	۰	۱
$f(x)$	-۸	-۱	۰	۱

$+۷$ $+۱$

خطی نیست

x	۰	۱	۲	۳
$k(x)$	۱	۳	۵	۷

$+۲$ $+۲$ $+۲$

خطی است و شیب آن $+۲$ است

x	-۲	-۱	۰	۱
$h(x)$	۵	۵	۵	۵

تابع ثابت است.

۲ علی در یک شرکت بیمه کار می کند. او ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان به عنوان حقوق پایه دریافت می کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می کند، ۵۰,۰۰۰ تومان به حقوقش اضافه می شود.

الف) قانونی برای حقوق علی به عنوان تابعی از تعداد مشتری هایی که ماهانه جذب می کند،

$$f(x) = 50000x + 1000000$$

بنویسید.

ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید برای شرکت جذب کرده باشد، میزان حقوق او در آن ماه چقدر خواهد بود؟

$$\begin{aligned} f(12) &= 50000 \times 12 + 1000000 = 600,000 + 1,000,000 \\ &= 1,600,000 \end{aligned}$$

پ) چرا این تابع خطی است؟

قانون تابع، درجه اول است، خطی است

ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟

$$f(x) = 50000x + 1000000$$

$$50000x + 1000000 = 2000000$$

$$50000x = 2,000,000 - 1,000,000$$

$$50000x = 1,000,000$$

$$x = \frac{1,000,000}{50,000} = 20$$

۳ آرمان سوار بر یک کشتی، در فاصله ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳ کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است.

الف) قانون و دامنه تابع مربوط به فاصله آرمان از ساحل (بر حسب کیلومتر) را بر حسب t (زمان بر حسب ساعت) بنویسید.

$$f(t) = 3t + 10 \quad 0 \leq t \leq 5$$

ب) آرمان پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟

$$f(2) = 3 \times 2 + 10 = 16$$

پ) چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

تابع درجه اول، خطی است و شیب آن $+3$ است

۴ دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما بر حسب درجه سانتی‌گراد)	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵

ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

$$\text{دامنه} = \{ ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۶ \text{ و } ۷ \}$$

$$f(t) = 35$$

پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟

تابع ثابت است چون مقادیر آن عدد ثابت ۳۵ است.

۵ رابطه بین دو واحد اندازه گیری دما، درجه سانتی گراد (C) و درجه فارنهایت (F) با قانون $F(C) = \frac{9}{5}C + 32$ بیان می شود.

الف) مقادیرهای $F(28)$ و $F(-40)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید.

$$F(28) = \frac{9}{5} \times 28 + 32 = \frac{252}{5} + 32 = \frac{252 + 160}{5} = \frac{412}{5} = 82/4$$

$$F(-40) = \frac{9}{5} \times (-40) + 32 = -72 + 32 = -40$$

ب) دمای صفر درجه سانتی گراد، معادل چند درجه فارنهایت است؟

$$F(0) = \frac{9}{5} \times 0 + 32 = 32$$

پ) اگر $F(c) = 212$ ، مقدار c را حساب کنید. c چه چیزی را نشان می‌دهد؟

$$F(c) = \frac{9}{5} \times c + 32$$

$$\frac{9}{5} \times c + 32 = 212$$

$$\frac{9c + 160}{5} = 212$$

$$9c + 160 = 1060$$

$$9c = 1060 - 160$$

$$9c = 900$$

$$c = \frac{900}{9} = 100$$

پایان درس اول پودمان دوم