

تابع نمایی



تابع نمایی

مثال تابع $f(x) = 4^x$ با دامنه \mathbb{R} یک تابع نمایی است.

$$f(2) = 4^2 = 16$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$f(0) = 4^0 = 1$$

$$f(-1) = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

تعریف

برای یک عدد حقیقی مثبت a که $a \neq 1$ ، تابع‌هایی با قانون $f(x) = a^x$ را که دامنه آن می‌تواند هر زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد، تابع نمایی با پایه a می‌نامند.

همچنین، تابع‌های با قانون $f(x) = ka^x$ ، $(k \neq 0)$ نیز تابع نمایی نامیده می‌شوند.

تابع $f(x) = 5 \times 2^x$ با دامنه \mathbb{R} را در نظر بگیرید، مقادیر زیر را به دست آورید و در صورت امکان ساده کنید.

ت) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

پ) $f(-1)$

ب) $f(0)$

الف) $f(2)$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{3}\right) &= 5 \times 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 5 \times \sqrt[3]{2} \\ &= 5\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 5 \times 2^{-1} \\ &= 5 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 5 \times 2^0 \\ &= 5 \times 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \times 2^2 \\ &= 5 \times 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

تابع‌های نمایی ویژگی‌های مشترک و رفتارهای خاصی دارند. برای آشنایی بیشتر

با خواص و ویژگی‌های تابع‌های نمایی، فعالیت را انجام دهید.

فعالیت ۵

تابع $f(x) = 3^x$ را با دامنه \mathbb{R} در نظر بگیرید و سپس جدول زیر را کامل کنید.

x	-3	-2	-1	۰	۱	۲	۲/۱
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	۳	۹	۱۰

سه برابر

۱ با افزودن ۱ واحد به مقدار x ، مقدار $f(x+1)$ چند برابر $f(x)$ خواهد شد؟

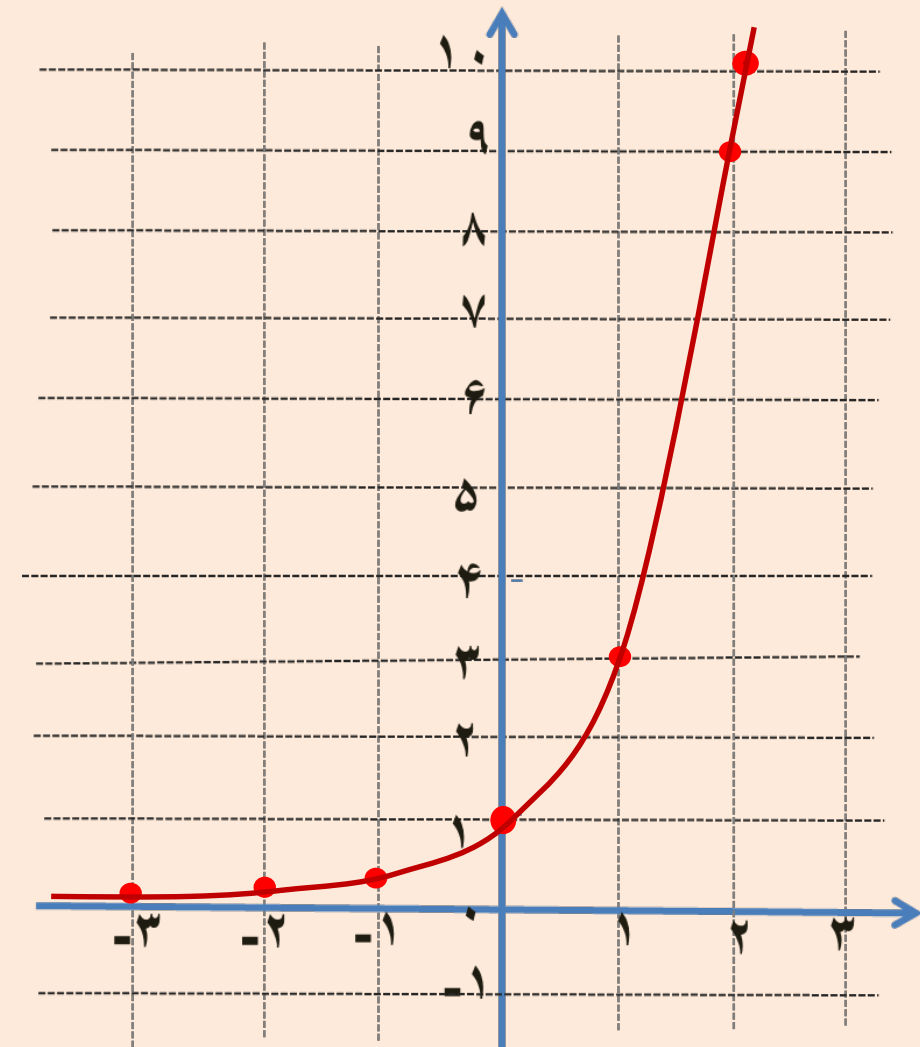
افزایش می‌یابد.

۲ با افزایش مقدار x ، مقدار تابع چه تغییری می‌کند (افزایش می‌یابد/ کاهش می‌یابد)؟

۳ نقاطی از نمودار تابع را که در جدول به دست آورده‌اید، در صفحه مختصات زیر مشخص کنید و به کمک آنها نمودار تقریبی تابع را رسم کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۲/۱
y	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	۱	۳	۹	۱۰

فعالیت بالا نشان می‌دهد تابع $f(x) = 3^x$ با دامنه \mathbb{R} رفتاری افزایشی دارد، یعنی با افزایش مقدار x مقدار $f(x)$ نیز افزایش می‌یابد. میزان افزایش مقادیر تابع به گونه‌ای است که با ۱ واحد افزایش x ، مقدار $f(x+1)$ سه برابر $f(x)$ می‌شود.



مثال ۱۲

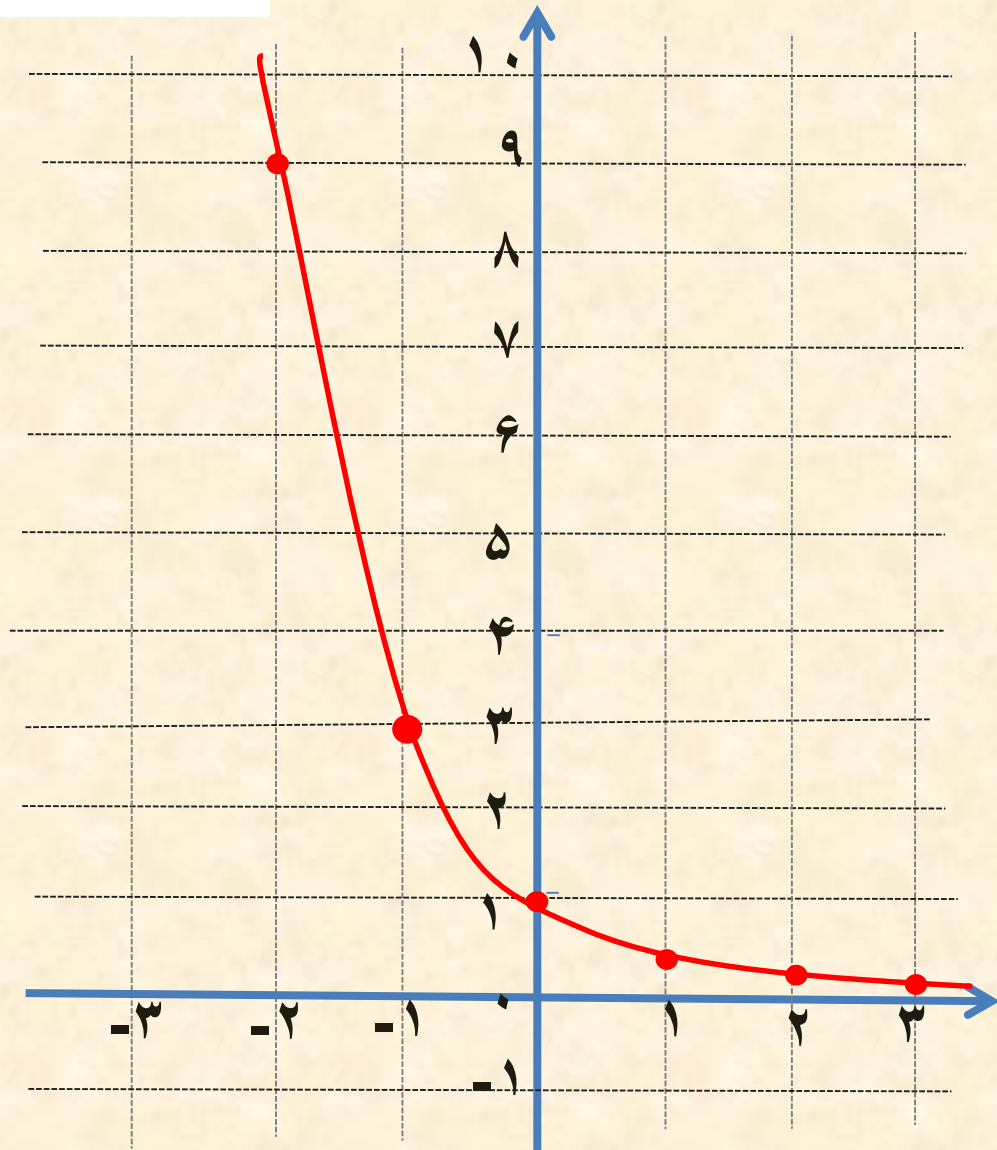
تابع $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ با دامنه \mathbb{R} یک تابع نمایی با پایه $\frac{1}{3}$ است.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	۹	۳	۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

$\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{3}$ $\times \frac{1}{3}$

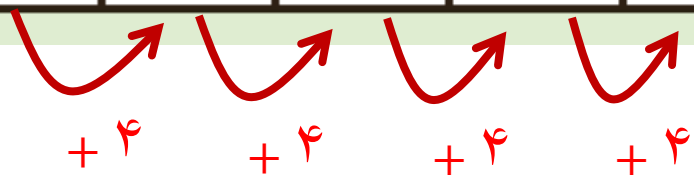
با افزودن ۱ واحد به متغیر x ، مقدار $f(x)$ ، $\frac{1}{3}$ برابر خواهد شد. بنابراین $f(x)$ کاهش می‌یابد.

نمودار این تابع در نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ محور y ها را قطع می‌کند و بالای محور x ها واقع است؛ زیرا مقادیر تابع مثبت است.



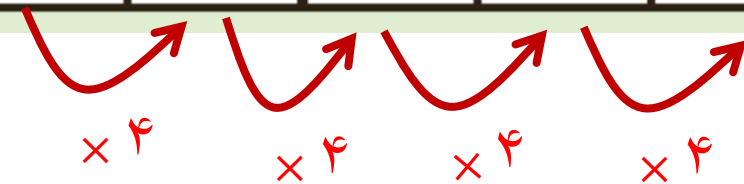
۱ دو جدول زیر نقاطی از صفحه مختصات را مشخص می کنند. تعیین کنید نقاط نمایش داده شده در کدام جدول می توانند نقاطی از نمودار یک تابع نمایشی باشند. دلیل خود را بیان کنید و در هر کدام قانون تابعی را بنویسید که نقاط جدول می توانند روی نمودار آن قرار گیرند.

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۵	۹	۱۳	۱۷



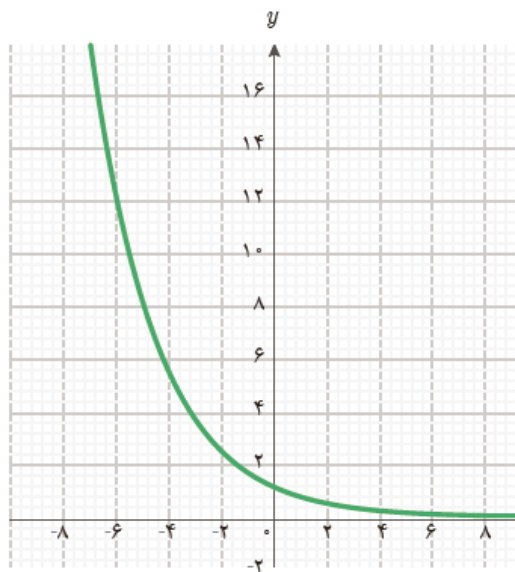
$$f(x) = 4x + 1 \quad \text{خطی}$$

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۴	۱۶	۶۴	۲۵۶



$$f(x) = 4^x \quad \text{نمایی}$$

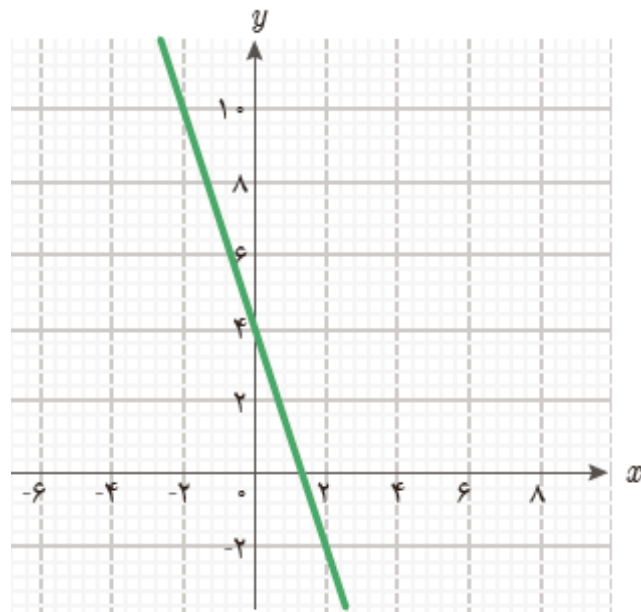
۲ در هر کدام از نمودارهای زیر نوع تابع (تابع نمایی، تابع خطی، تابع درجه دوم) را مشخص کنید. اگر تابع نمایی باشد، آیا پایه بین صفر و یک است یا بزرگتر از یک؟



(ت)

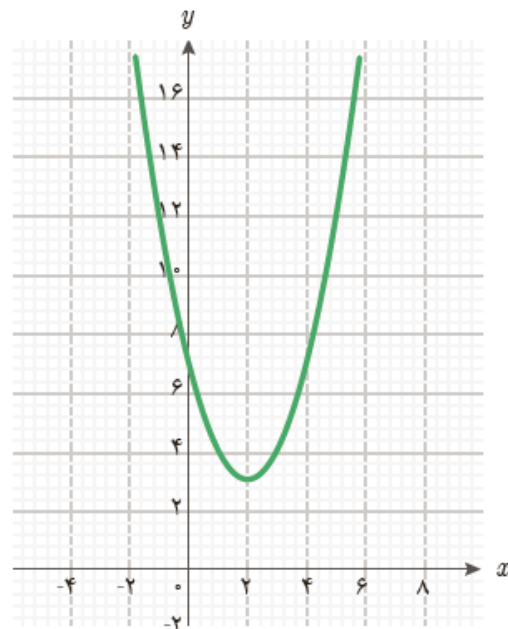
نمایی

پایه بین صفر و یک



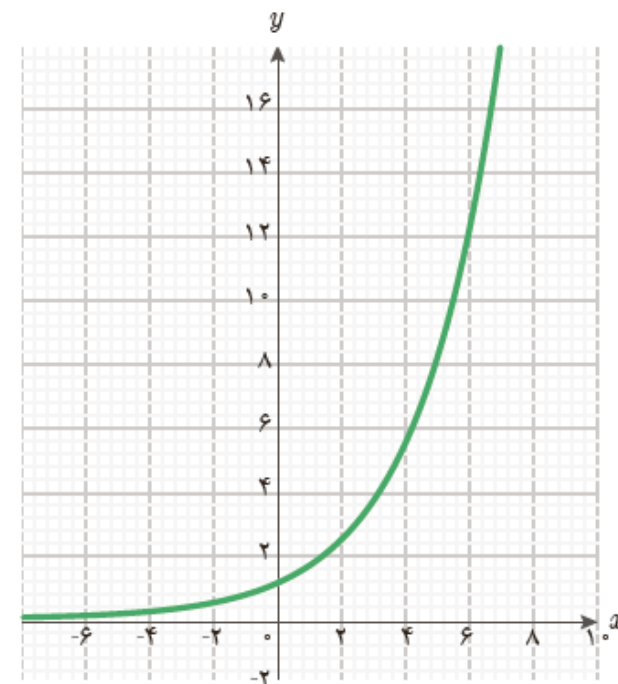
(پ)

خطی



(ب)

سهمی



(الف)

نمایی

پایه بزرگتر از یک

با توجه به مثال‌هایی که از تابع‌های نمایی بررسی کردیم، دربارهٔ رفتار این تابع‌ها می‌توان گفت:

$$f(x) = a^x \text{ در تابع نمایی}$$

با افزودن ۱ واحد به متغیر x ، مقدار $f(x)$ ، برابر خواهد شد.

با افزایش مقدار x ، مقدار $f(x)$ افزایش خواهد یافت

$$1 < a$$



با افزایش مقدار x ، مقدار $f(x)$ کاهش خواهد یافت.

$$0 < a < 1$$



نمودار این گونه تابع‌ها همواره در بالای محور x واقع است

نمودار این تابع از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ می‌گذرد؛ زیرا $f(0) = a^0 = 1$.

مثال : نرخ سودسالانه یک بانک ۱۰ درصد است شخصی ۸ میلیون در این بانک سپرده گذاری کرده است ضابطه تابعی را بنویسید که مقدار پس انداز این شخص را بعد از n سال حساب کند.

$$8 \times \frac{10}{100} = 8 \times 0/1$$

حل : سود در پایان سال اول

این سود، به موجودی او اضافه می شود. بنابراین،

$$8 + 8 \times 0/1 = 8 (1 + 0/1) = 8 \times 1/1$$

پس انداز در پایان سال اول

$$8 \times 1/1 + 8 \times 1/1 \times 0/1 = 8 \times 1/1 (1 + 0/1) = 8 \times (1/1)^2$$

پس انداز این فرد در پایان سال دوم

$$8 \times (1/1)^3$$

اگر با همین شیوه، پس انداز این فرد را در پایان سال سوم محاسبه کنیم

اگر این وضعیت تا سال n ادامه داشته باشد

$$f(n) = 8 \times (1/1)^n$$

مقدار پس انداز در پایان سال n ام

۱ اگر $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $g(x) = 5^x$ ، مقادیر زیر را به دست آورید و در صورت امکان ساده کنید.

ث $g\left(\frac{1}{3}\right)$

ت $f(-1)$

پ $f\left(\frac{1}{2}\right)$

ب $g(-1)$

الف $f(0)$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{5}$$

$$f(-1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

$$= 4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$g(-1) = 5^{-1}$$

$$= \frac{1}{5}$$

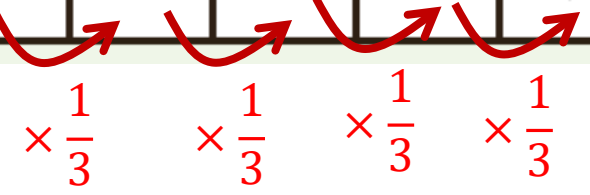
$$f(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^0$$

$$= 1$$

در جدول‌های زیر مقادیری از چهار تابع مشخص شده‌اند. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع نمایی باشد؟ در این حالت، قانون آن تابع نمایی را مشخص کنید.

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$

(ب)



$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

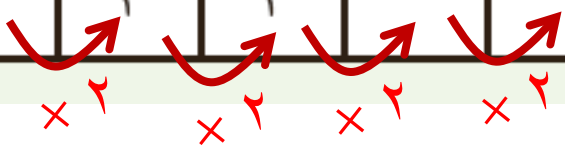
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۱	۳	۴

(الف)

نمایی نیست

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲

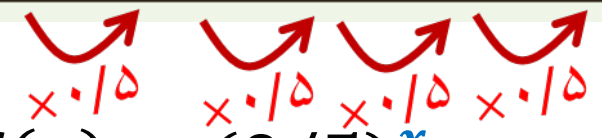
(ت)



$$f(x) = 2^x$$

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۲	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۶۲۵

(پ)



$$f(x) = (0/5)^x$$

۳ جدول زیر را طبق نمونه کامل کنید (دامنه همه تابع‌ها \mathbb{R} است).

ردیف	قانون تابع	تغییرات y به ازای ۱ واحد افزایش x	محل تقاطع با محور y ها
۱	$y = 6^x$	۶ برابر	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
۲	$y = (0/9)^x$	۰/۹ برابر	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
۳	$y = \frac{1}{4} \times 2^x$	۲ برابر	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
۴	$y = 3\left(\frac{1}{5}\right)^x$	$\frac{1}{5}$ برابر	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

۴ با افزایش مقادیر x ، مقادیر کدام تابع افزایش و مقادیر کدام تابع کاهش می‌یابند؟

$$h(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad \text{پ}$$

$$g(x) = 200 \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{ب}$$

$$f(x) = 2^x \quad \text{الف}$$

افزایش

کاهش

افزایش

پایه بزرگتر از یک

پایه بین صفر و یک

پایه بزرگتر از یک

۵ نرخ سود سالانه اعلام شده توسط یکی از بانک‌ها تا ۵ سال، ۱۲ درصد است. آقای بهرامی ابتدای سال ۱۳۹۶ در این بانک ۵ میلیون تومان پس‌انداز کرده است. الف) قانون تابعی را بنویسید که از طریق آن بتوان موجودی آقای بهرامی را در پایان سال n ام محاسبه کرد.

$$f(n) = 5 \times (1/12)^n$$

ب) موجودی حساب پس‌انداز آقای بهرامی را در پایان سال پنجم به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید و مقدار تقریبی آن را بر حسب تومان بنویسید.

$$f(5) = 5 \times (1/12)^5 = 8/811708416$$

$$8/811708416 \times 1000000 = 8811708/416$$

۶ تابع $f(x) = 3 \times 2^x$ را با دامنه \mathbb{R} در نظر بگیرید.

الف) جدول مقادیر این تابع را در نقاط به طول ۲ و -۱ و -۲ و ۰ و ۱ و ۲ تشکیل دهید.

$$f(1/2) = 3 \times 2^{1/2} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	3	6	12

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ب) نمودار این تابع، محور y ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

پ) با یک واحد افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع چه تغییری می‌کند؟

۲ برابر می‌شود.

۷ تابع نمایی $f(x) = ab^x$ را با دامنه \mathbb{R} در نظر بگیرید. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است.

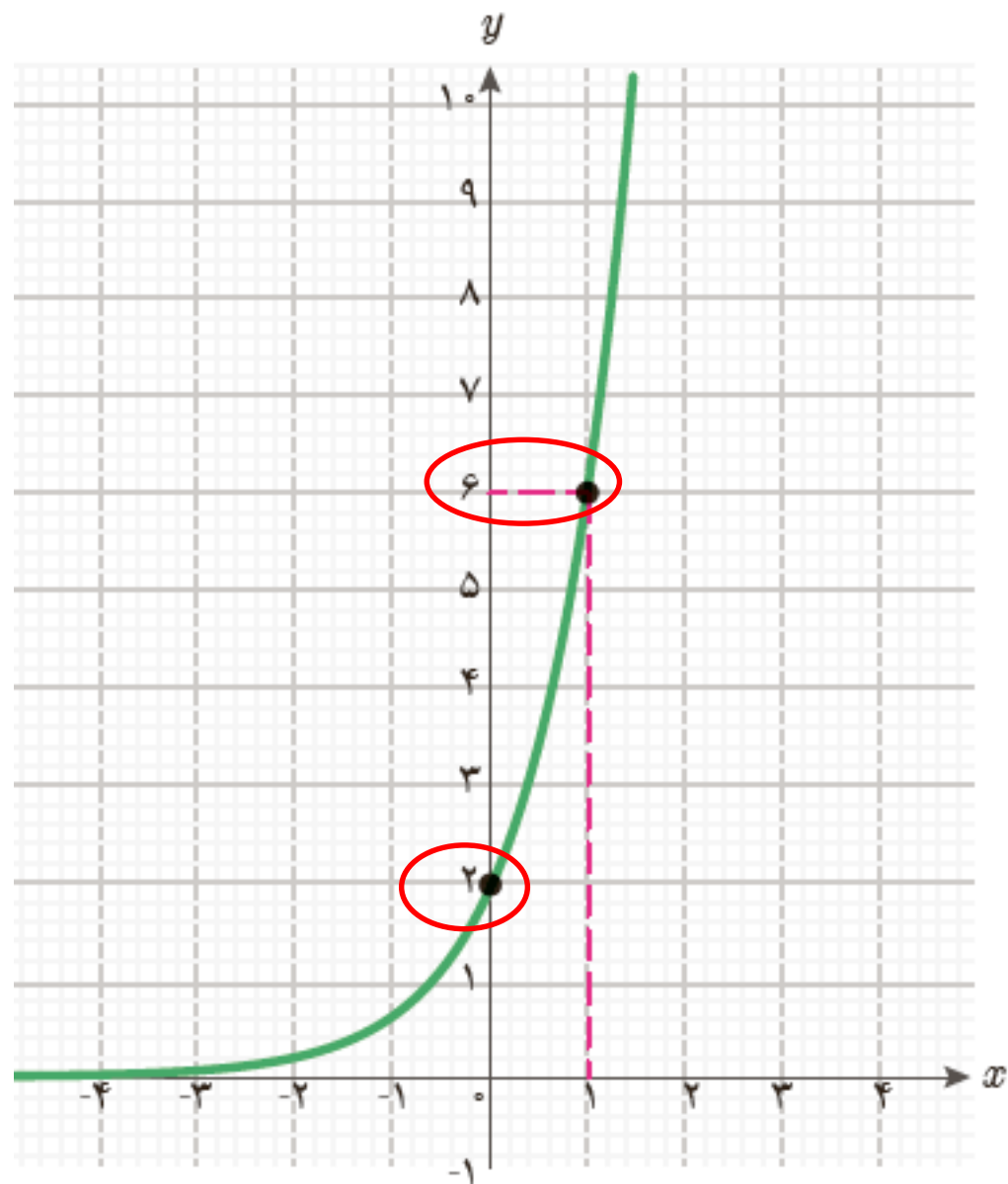
الف) قانون این تابع را بنویسید.

$$f(x) = 2 \times 3^x$$

ب) مقادیر $f(-1)$ و $f(2)$ را به دست آورید.

$$f(2) = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

$$f(-1) = 2 \times 3^{-1} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



پایان پودمان اول