
تابع های مثلثاتی

به تابع‌هایی که متغیر آنها زاویه است و در قانون آنها از نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه استفاده می‌شود، معمولاً از اصطلاح **تابع‌های مثلثاتی** استفاده می‌شود. طبق قرارداد، در تابع‌های مثلثاتی، متغیر (زاویه) همواره برحسب **رادیان** در نظر گرفته می‌شود.

مثال : تابع مثلثاتی $f(x) = 10 + 10 \times sinx$ در نظر بگیرید ، مقادیر زیر را حساب کنید.

$f(0) =$ | $f(1) =$ | $f\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$$f(0) = 10 + 10 \times sin(0) = 10 + 10 \times 0 = 10$$

$$f(1) = 10 + 10 \times sin(1) = 10 + 10 \times 0/84 = 10 + 8/4 = 18/4$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 + 10 \times sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 + 10 \times 1 = 10 + 10 = 20$$

مثال ۵ کتاب درسی: تابع مثلثاتی $f(x) = sinx + cosx$ در نظر بگیرید ، مقادیر زیر را حساب کنید.

$f(1) =$

$f(-3) =$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

$f(1) = sin1 + cos1$

$= 0,84 + 0,54$

$= 1/38$

$f(-3) = sin(-3) + cos(-3)$

$= -0,14 - 0,99$

$= -1,13$

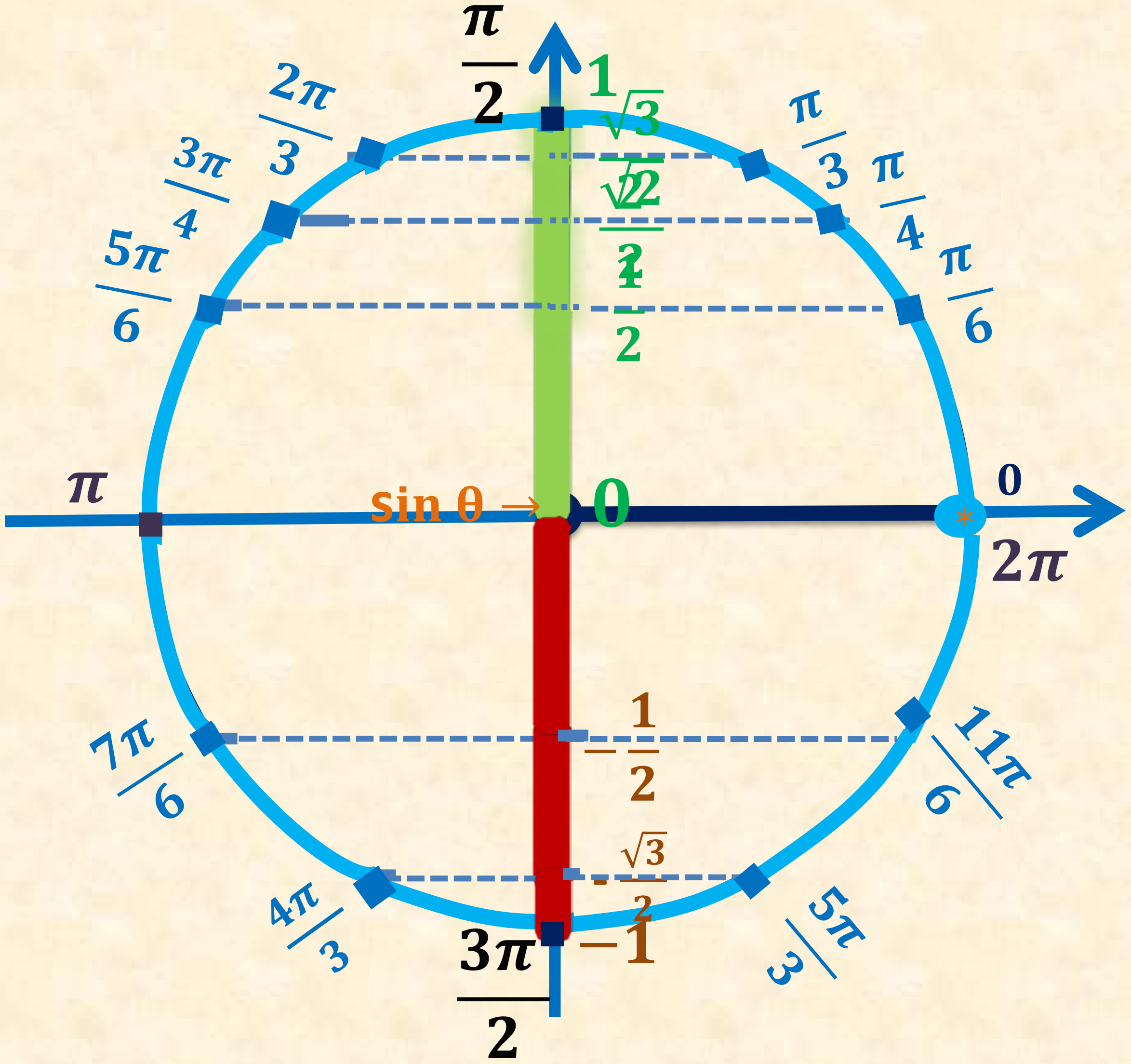
$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sin\frac{\pi}{6} + cos\frac{\pi}{6}$

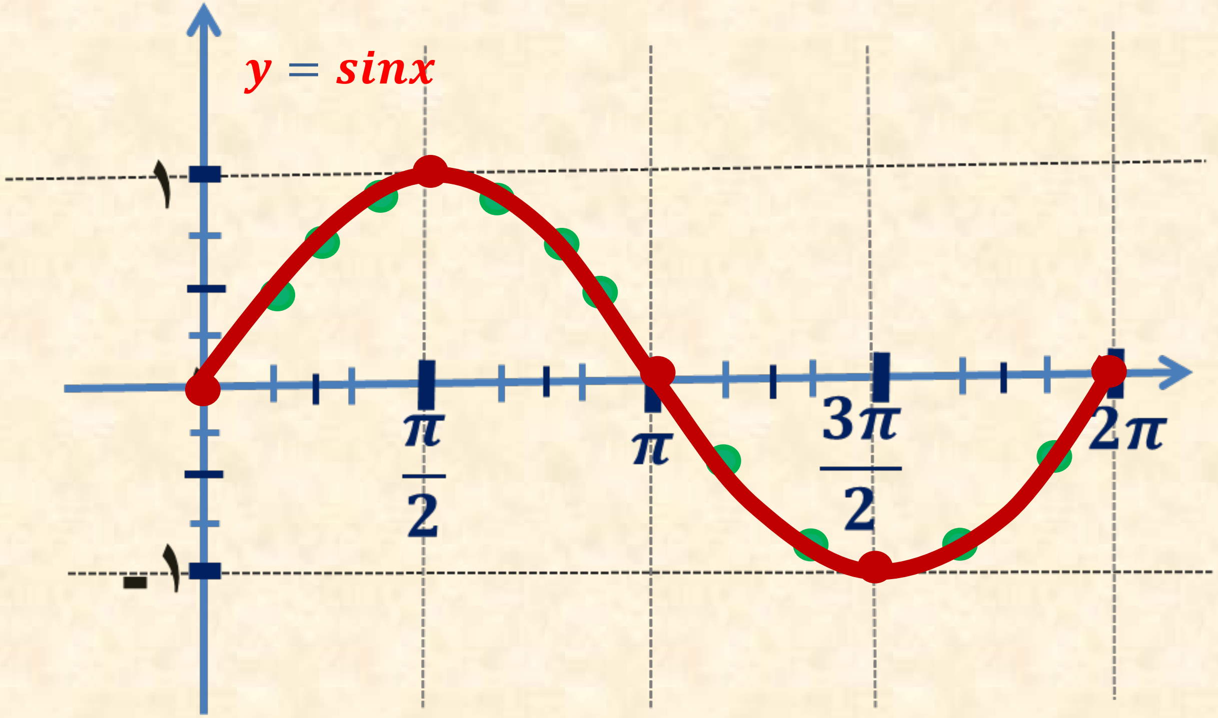
$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

تابع با قانون $f(x)=\sin x$ یکی از ساده‌ترین تابع‌های مثلثاتی است.

رسم تابع $f(x) = sinx$ در فاصله $[0$ و $2\pi]$.

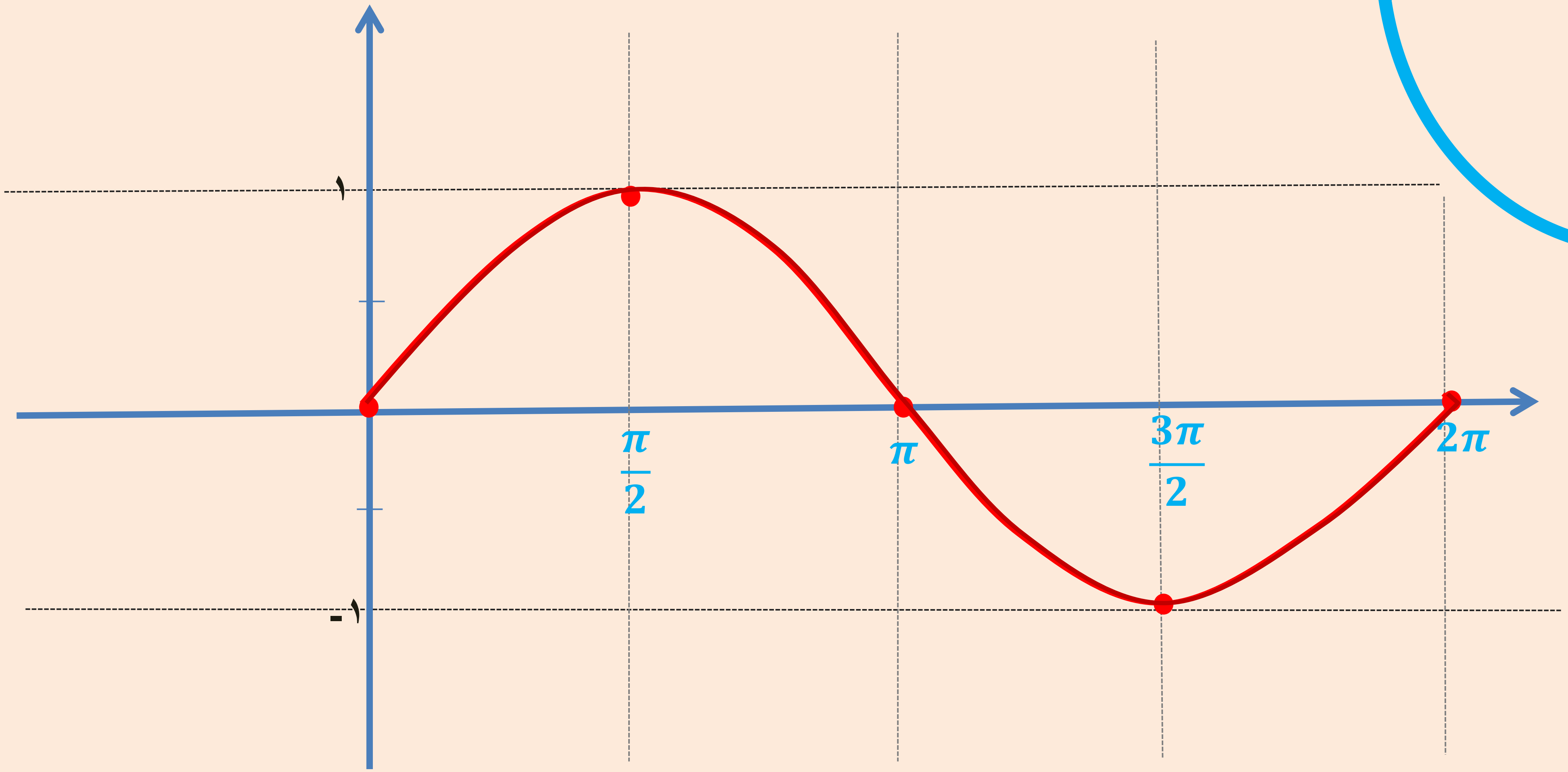


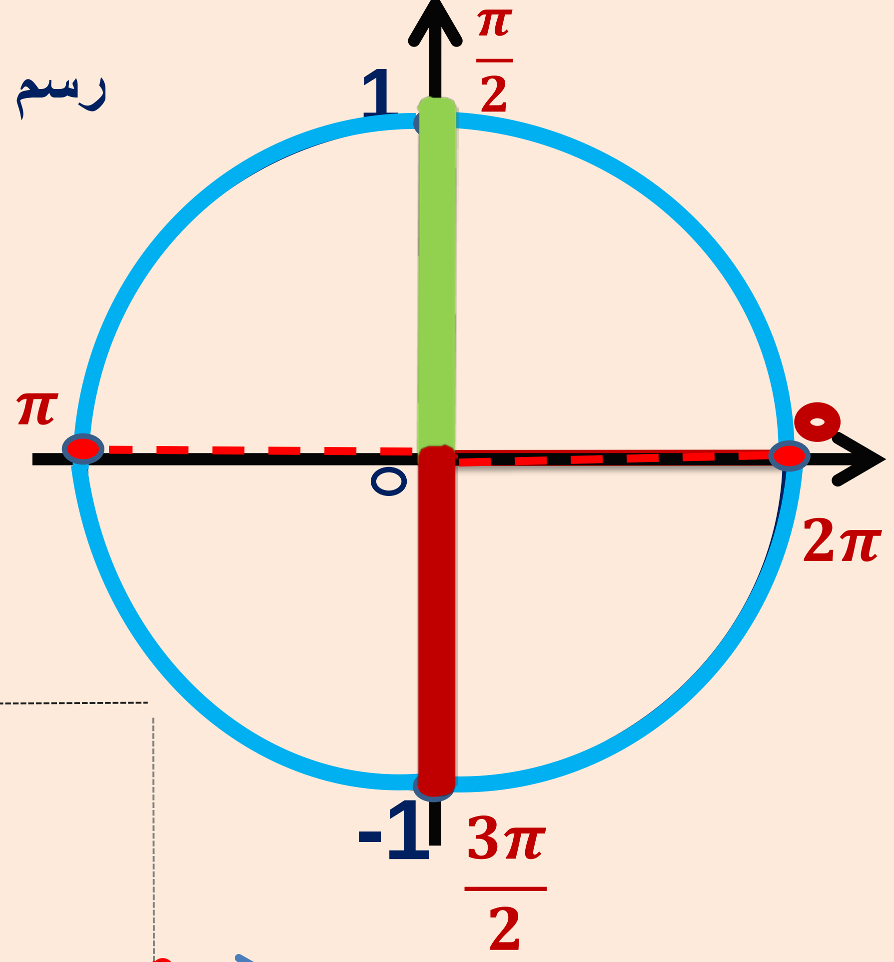


x	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$sinx$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

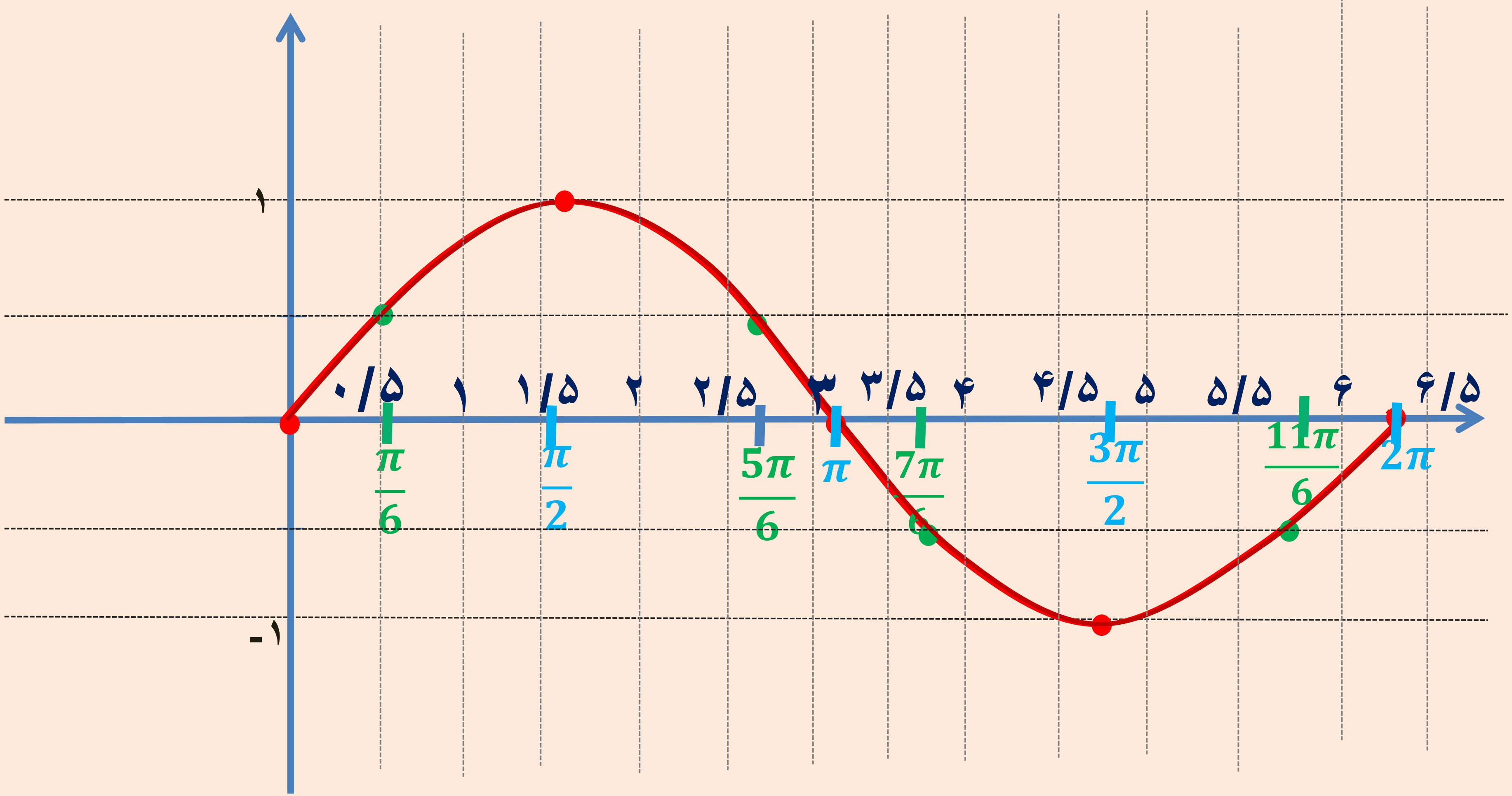
رسم تابع $f(x) = sinx$ با حداقل نقاط در فاصله $[0$ و $2\pi]$.

x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = sinx$	0	1	0	-1	0

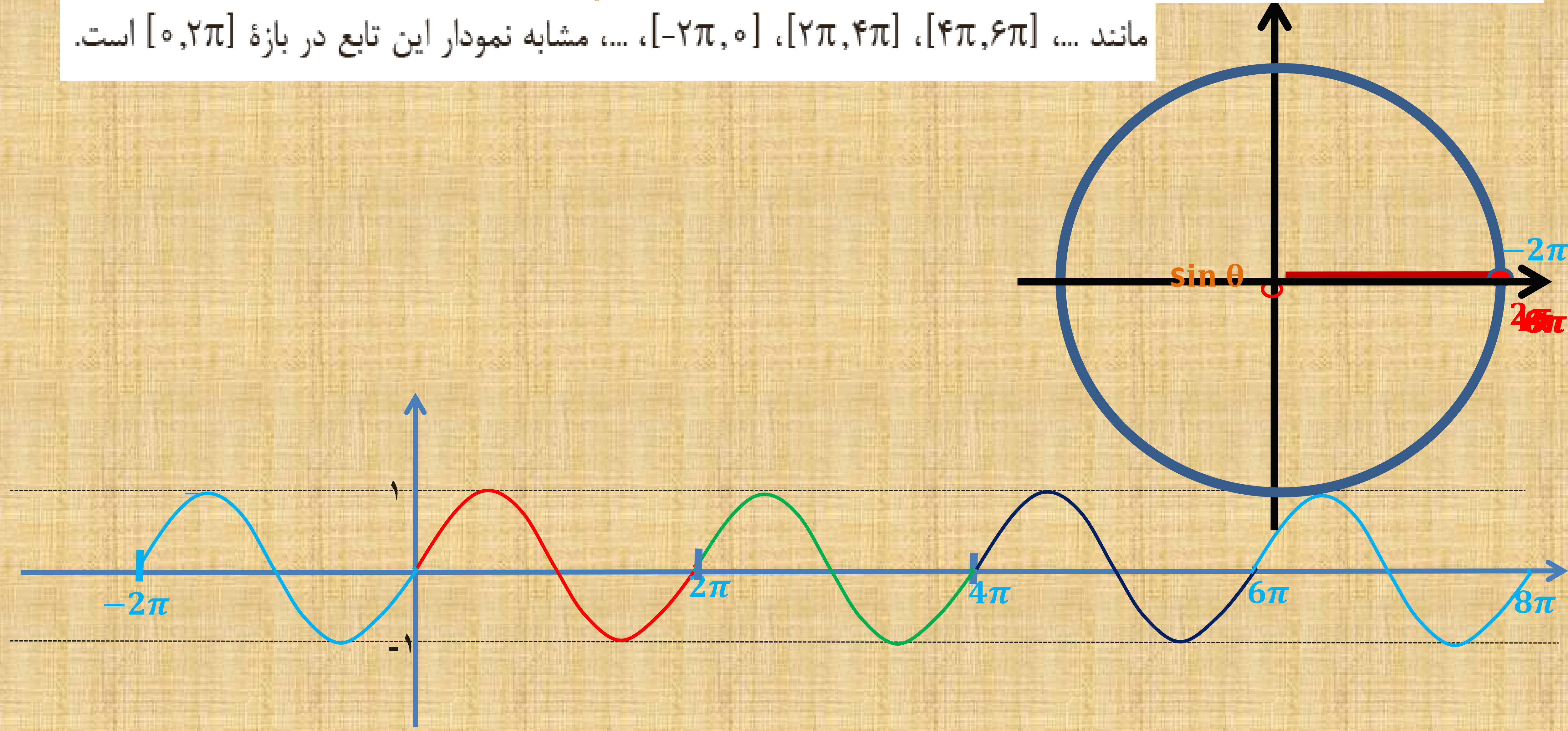




توجه داشته باشید که مقادیر x روی محور طول‌ها، اندازهٔ زاویه‌ها برحسب رادیان است. برای مثال، π **رادیان یعنی تقریباً ۳/۱۴ رادیان و ۲π رادیان تقریباً ۶/۲۸ رادیان** است؛ بنابراین دامنهٔ [۰,۲π] تقریباً همان [۰,۶/۲۸] است.



با ادامهٔ حرکت، پس از یک دور کامل روی دایرهٔ مثلثاتی، تغییرات سینوس زاویهٔ چرخش در بازهٔ [۲π,۴π]، همانند تغییرات آن در بازهٔ [۰,۲π] است. نمودار این تابع در بازه‌های دیگر، مانند ...، [۴π,۶π]، [۲π,۴π]، [-۲π,۰]، ...، مشابه نمودار این تابع در بازهٔ [۰,۲π] است.

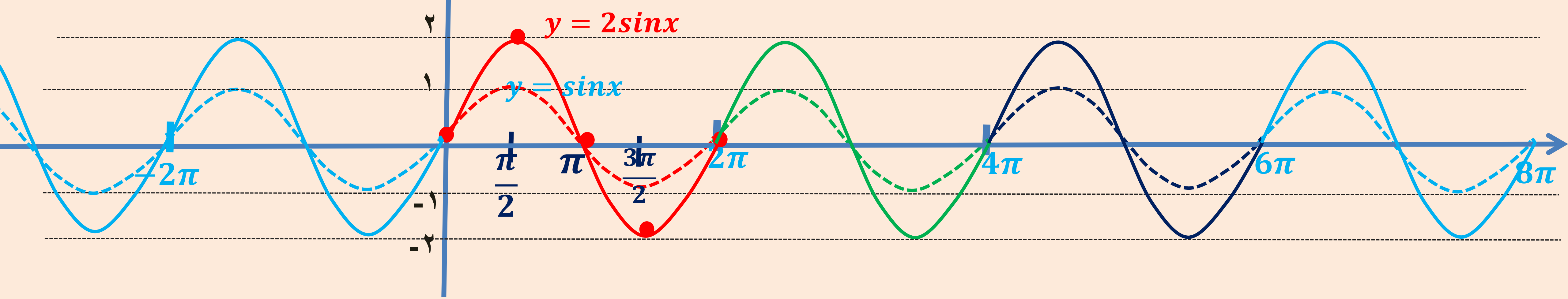


مثال ۶

تابع مثلثاتی $h(x) = ۲\sin x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

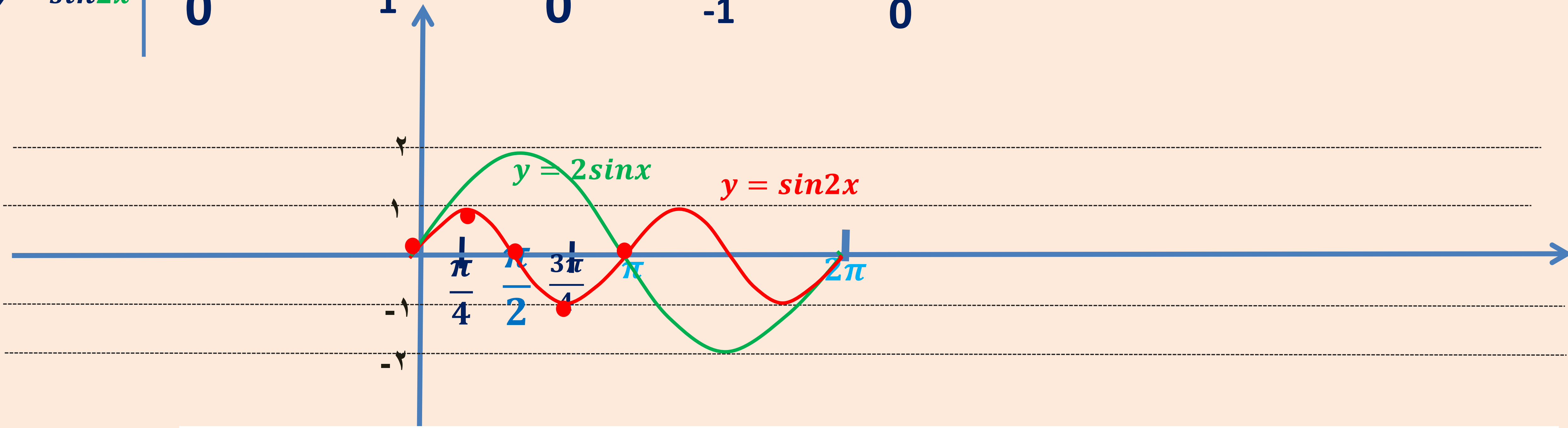
x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = sinx$	0	1	0	-1	0
$y = 2sinx$	0	2	0	-2	0

همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، عرض نقاط نمودار تابع $۲\sin x$ با ضرب ۲ در عرض نقاط نمودار تابع $\sin x$ به‌دست می‌آیند.



مثال ۷ تابع‌های $\sin(2x)$ و $2\sin x$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید و تفاوت آنها را توضیح دهید.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin 2x$	0	1	0	-1	0



همان‌طور که مشاهده می‌شود این دو تابع تفاوت‌های مهمی با هم دارند و با هم مساوی نیستند.

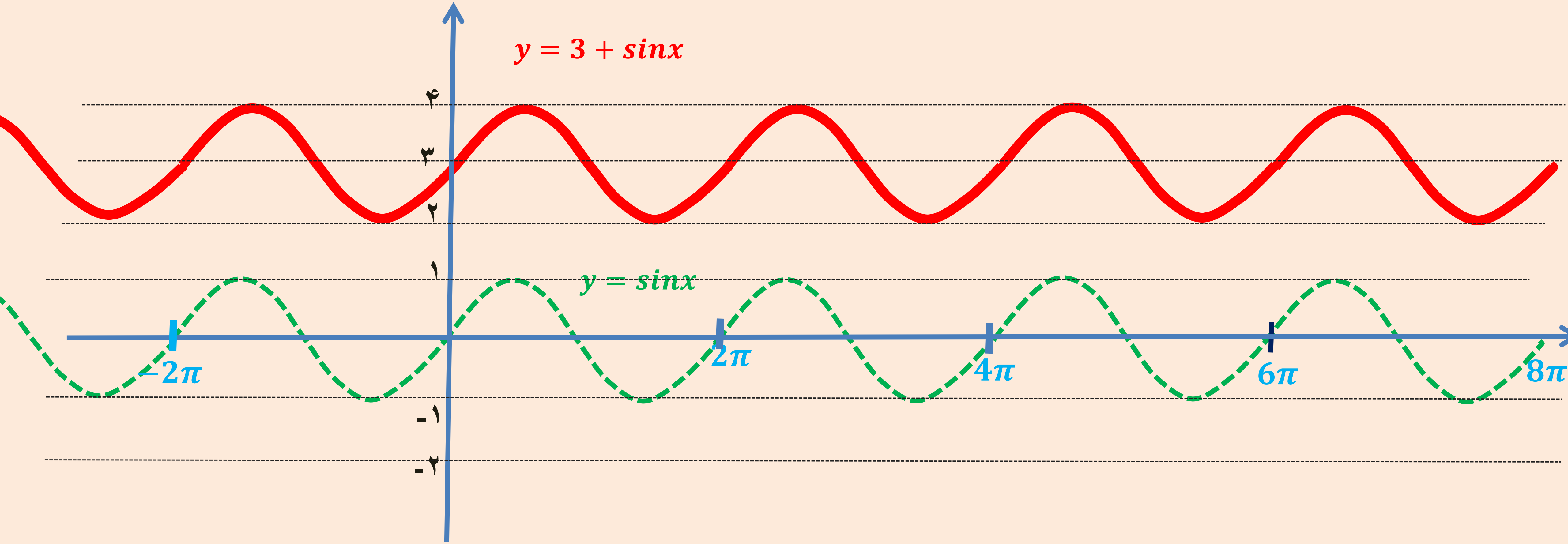
مقادیر تابع $2\sin x$ از ۲ تا ۲- تغییر می‌کنند ولی مقادیر تابع $\sin(2x)$ از ۱ تا ۱- تغییر می‌کنند.

مثال ۸

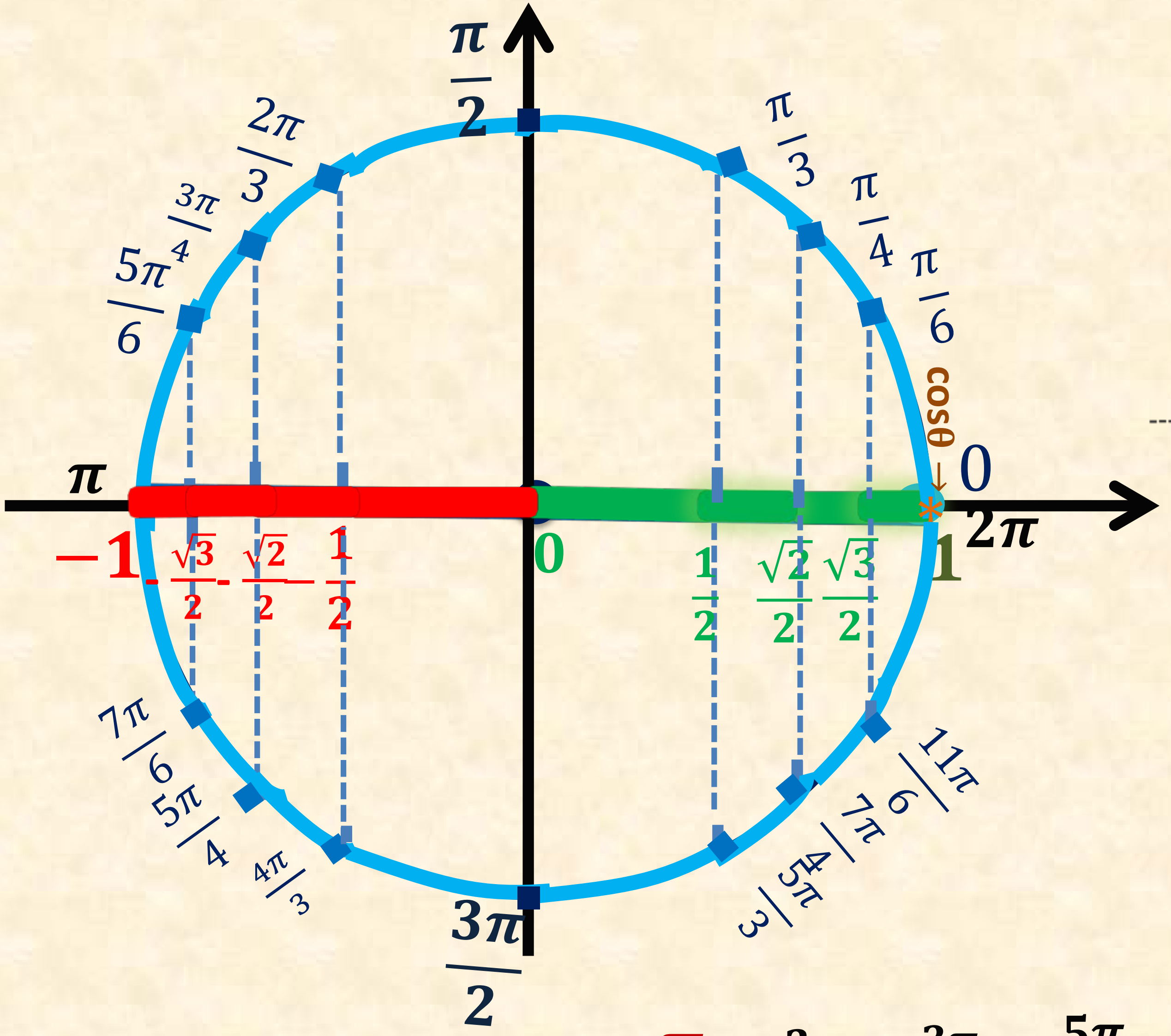
تابع مثلثاتی $f(x) = ۳ + \sin x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

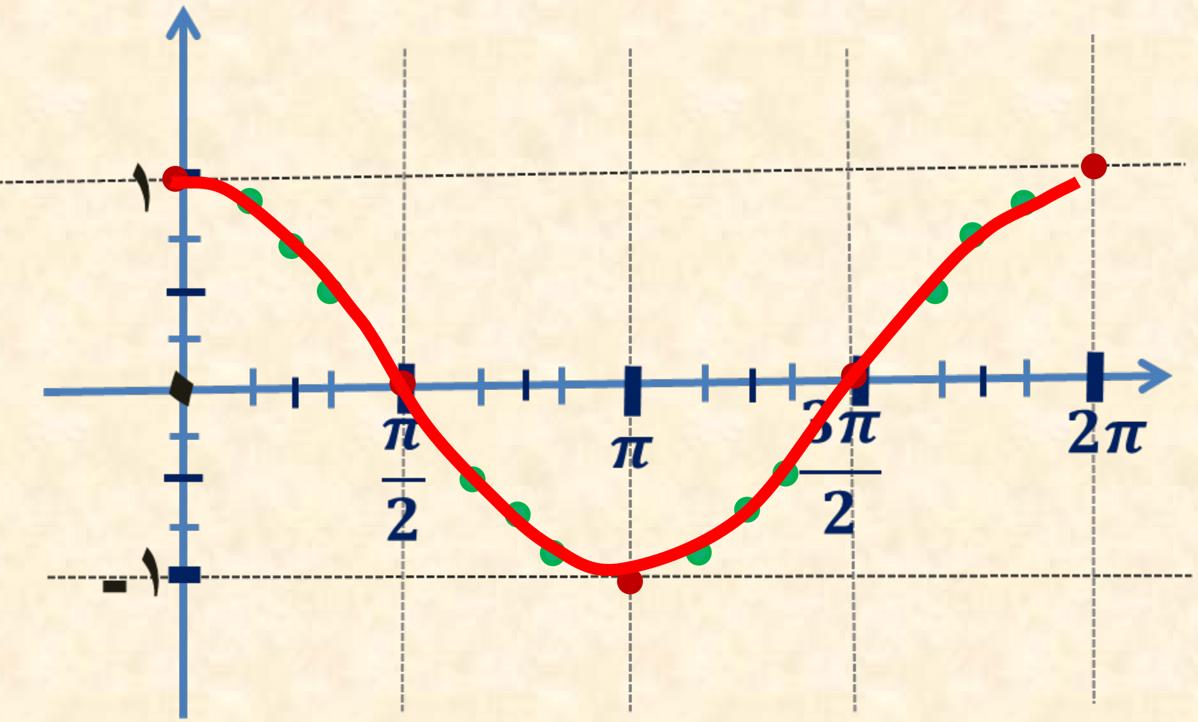
برای رسم نمودار این تابع، ابتدا نمودار $\sin x$ را رسم می‌کنیم.

سپس با انتقال این نمودار به اندازهٔ ۳ واحد به بالا نمودار تابع f به‌دست می‌آید.



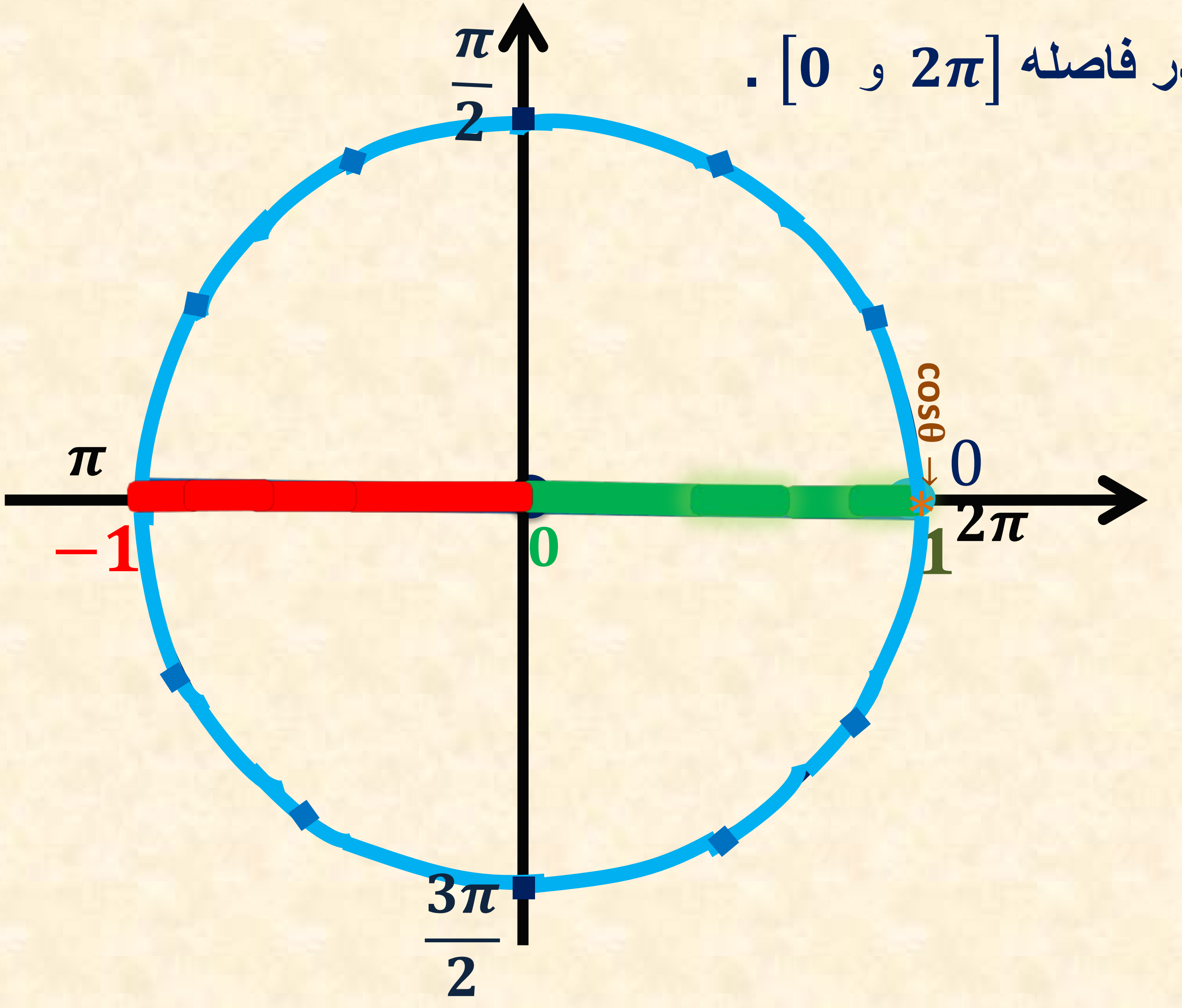
رسم تابع $f(x) = cosx$ در فاصله $[0$ و $2\pi]$.

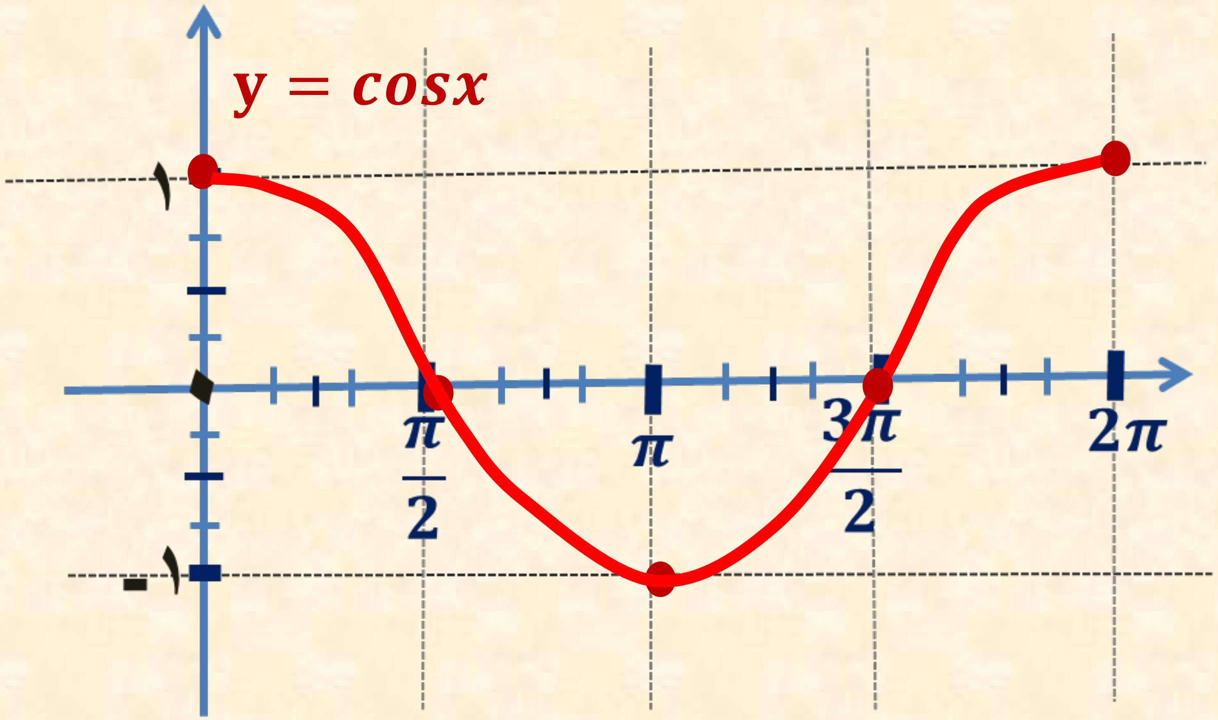




x	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$cosx$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

رسم تابع $f(x) = cosx$ با استفاده از **حداقل نقاط** در فاصله $[0$ و $2\pi]$.





x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = cosx$	1	0	-1	0	1

مسائل

۱ برای تابع $u(x) = ۴\sin x - ۳\cos\ (۲x)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، مقادیر $u(۲)$ و $u(\frac{\pi}{۶})$ و $u(۳\pi)$ را به‌دست آورید. (در صورت نیاز از ماشین‌حساب استفاده کنید.)

$$u(x) = 4sin(x) - 3 \times cos(2x)$$

$$u(2) = 4sin(2) - 3 \times cos(4)$$

$$=4 \times 0,91 - 3 \times 0,65$$

$$=3,64 - 1,95$$

$$=1,69$$

$$u\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 3 \times cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=4 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$u(3\pi) = 4sin(3\pi) - 3 \times cos(6\pi)$$

$$= 4 \times 0 - 3 \times 1$$

$$= -3$$

۲ سه تابع $f(x)=۳\cos x$ و $g(x)=\cos x+۲$ و $h(x)=۳\cos x-۲$ را با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ در نظر بگیرید.

نمودار هر یک از این تابع‌ها را به همراه نمودار تابع $\cos x$ در دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

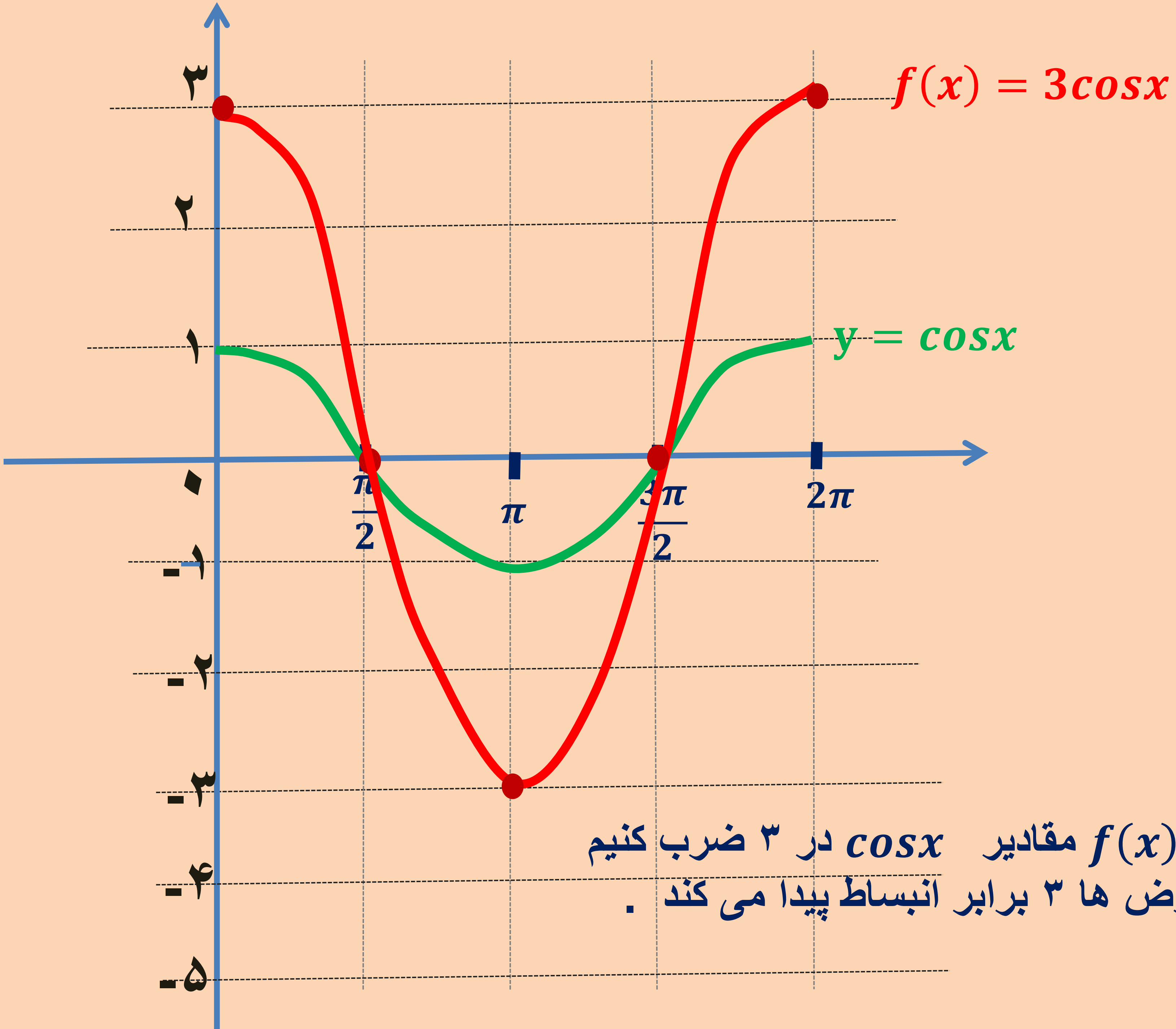
ابتدا تابع $f(x) = cosx$ را در فاصله $[2\pi$ و $0]$ رسم می کنیم.

برای رسم تابع $f(x) = 3cosx$ مقادیر $cosx$ در ۳ ضرب کنیم
نمودارآن در راستای محور عرض ها ۳ برابر انبساط پیدا می کند .

برای رسم تابع $g(x) = cosx + 2$ مقادیر $cosx$ با ۲ جمع کنیم
نمودارآن در راستای محور عرض ها ۲ واحد به بالا انتقال می یابد.

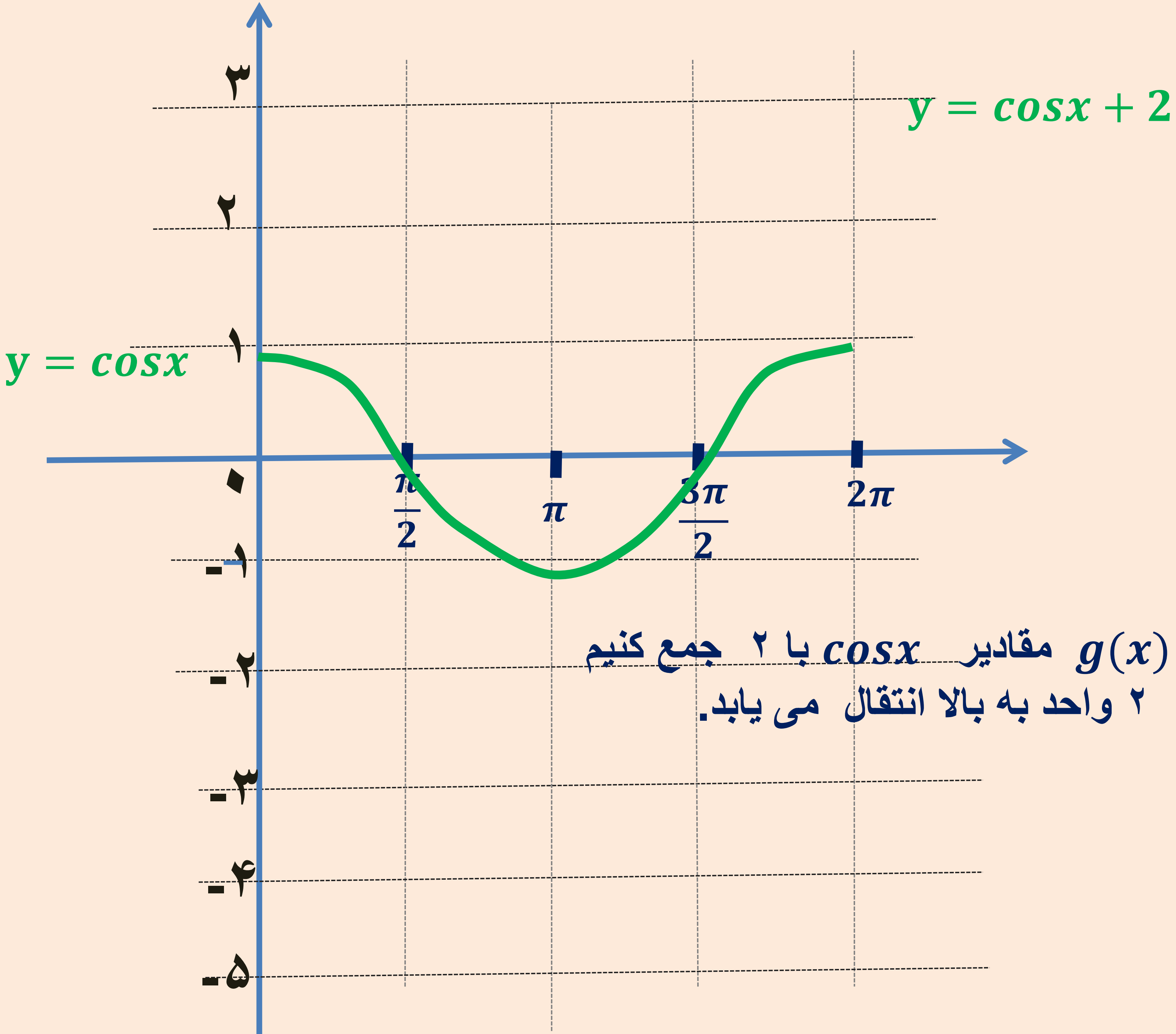
برای رسم تابع $h(x) = 3cosx - 2$ بعد از رسم $y = 3cosx$
نمودارآن در راستای محور عرض ها ۲ واحد به پایین انتقال می دهیم .

رسم تابع $f(x) = 3cosx$



برای رسم تابع $f(x) = 3cosx$ مقادیر $cosx$ در ۳ ضرب کنیم
نمودارآن در راستای محور عرض ها ۳ برابر انبساط پیدا می کند .

رسم تابع $g(x) = cosx + 2$

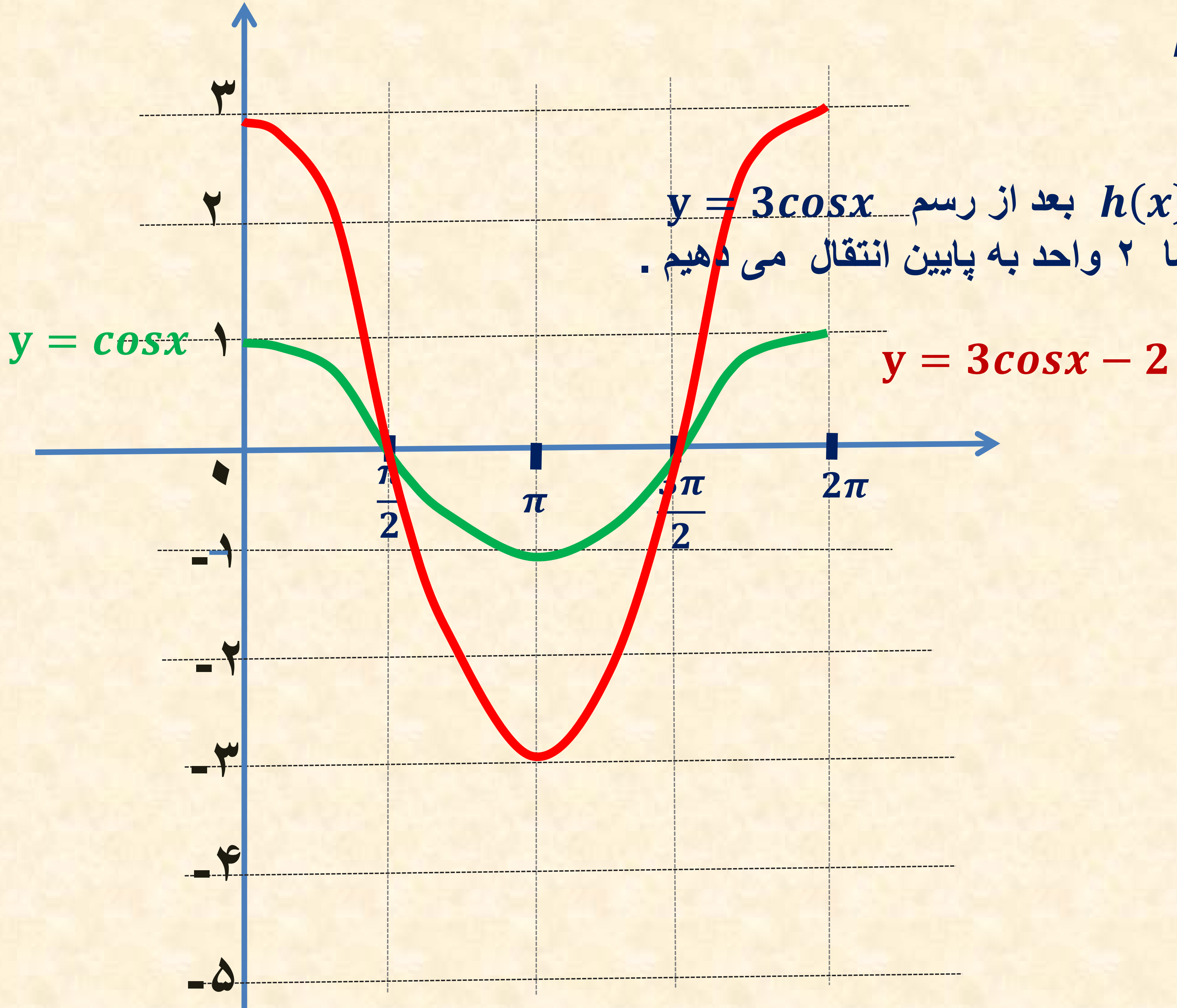


برای رسم تابع $g(x) = cosx + 2$ مقادیر $cosx$ با ۲ جمع کنیم

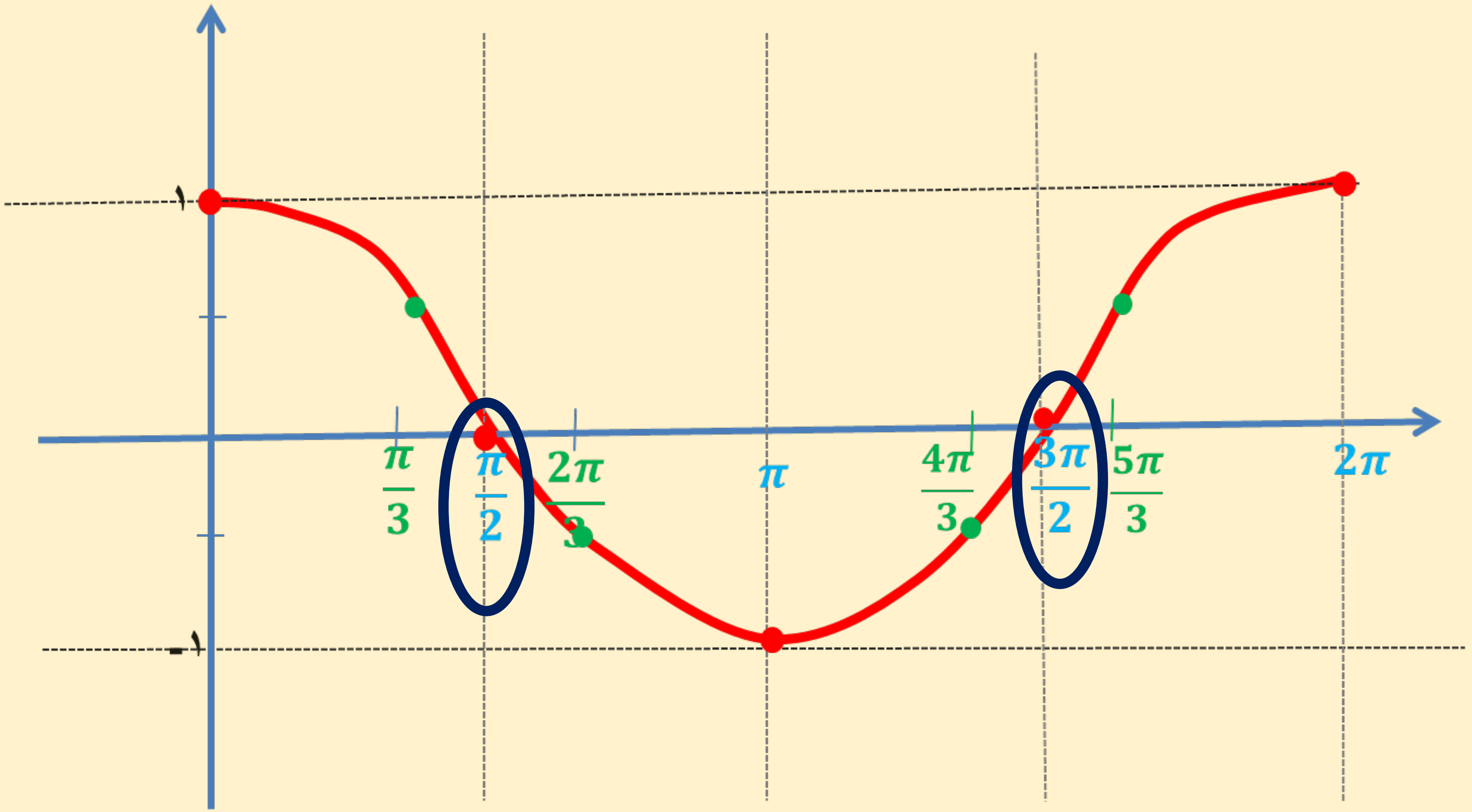
نمودارآن در راستای محور عرض ها ۲ واحد به بالا انتقال می یابد.

رسم تابع $h(x) = 3cosx - 2$

برای رسم تابع $h(x) = 3cosx - 2$ بعد از رسم $y = 3cosx$
نمودارآن در راستای محور عرض ها ۲ واحد به پایین انتقال می دهیم .



۴ به کمک نمودار تابع $f(x) = \cos x$ با دامنهٔ $[\circ,\text{۲}\pi]$، جواب‌های معادلهٔ $\cos x = \circ$ را در بازهٔ $[\circ,\text{۲}\pi]$ به‌دست آورید.



$$\frac{\pi}{2} \, , \, \frac{3\pi}{2}$$

پایان درس دوم ازپودمان اول