به نام خدا   ریاضی ۳ - فنی و حرفه‌ای   دبیر: حسین سهراب   مهرماه ۹۷

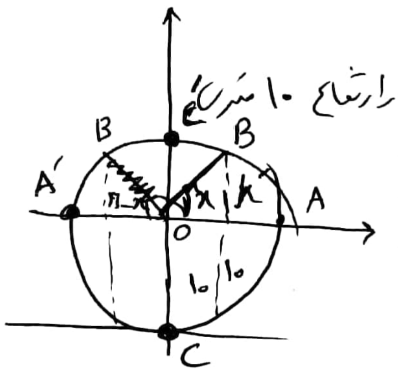
ص ۱

درس دوم فصل اول ← تابع های مثلثاتی

در این درس ابتدا به کاربرد توابع مثلثاتی اشاره شده است و سپس محاسبه مقدار توابع مثلثاتی در یک نقطه و رسم نمودار $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ در یک نقطه یابی و هم چنین رسم نمودار توابعی هم چون

$$\boxed{\begin{array}{lll} f(x)=\sin x \pm K, & f(x)=\sin ax & f(x)=a\sin x \\ f(x)=\cos x \pm K & f(x)=\cos ax & f(x)=a\cos x \end{array}}$$

در ابتدا یک مثال کاربردی که به صورت زیر است، را بررسی می‌کنیم.



فرض کنید شعاع دایره چرخ و فلکی ۱۰ متر باشد و نقطه شروع کابین را در ارتفاع ۱۰ متری از سطح زمین مانند شکل روبه رو در نظر بگیرید. مقدار زاویه چرخش برحسب رادیان را با x و ارتفاع کابین از سطح زمین برحسب متر را با h نشان می‌دهیم.

می‌خواهیم h را برحسب تابع مثلثاتی بیان کنیم.

$\cancel{\sin(\pi - x) = \sin x}$

$$\sin x = \frac{h'}{OB} \Rightarrow h' = OB \sin x \Rightarrow h' = 10 \sin x$$

$$h = 10 + h' \Rightarrow h = 10 + 10 \sin x$$

$$f(x) = 10 + 10 \times \sin x$$

$$f(180^\circ) = 10 + 10 \times \underbrace{\sin 180}_{0} = 10$$ یعنی نقطه A'

$$f(270) = 10 + 10 \times \underbrace{\sin 270}_{-1} = 10 - 10 = 0$$ ← سطح زمین نقطه C

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 + 10 \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} = 10 + 10 = 20$$ ← نقطه C'

رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
θ درجه	0	30	45	60	90	180	270	360
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞ ت.ن	0	∞ ت.ن	0

نکته: جدول نسبت های مثلثاتی

← حفظ شود.

مثال) در تابع مثلثاتی $f(x)=\sin x+\cos x$ مقادیر زیر را بیابید.

$$f(1)=\sin 1+\cos 1 \simeq 1/38$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1+0=1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$f(\pi)=\sin\pi+\cos\pi=0+(-1)=-1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

مثال) تابع $f(x)=20+20\sin x$ ارتفاع کابین چرخ و فلکی را برحسب زاویه چرخش آن (x برحسب رادیان) نشان می‌دهد. این چرخ فلک ۱۰ دور چرخیده است.

الف) دامنه این تابع را بنویسید. زاویه چرخش از ۰ تا $20\pi=10\times 2\pi$

هر دوره چرخش 2π است ← $D_f=[0, 20\pi]$

ب) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ مقدار آن را بیابید.

ارتفاع کابین چرخ و فلک را برحسب زاویه چرخش $\frac{\pi}{6}=30^\circ$ نشان می‌دهد.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=20+20\times\sin\frac{\pi}{6}=20+20\times\frac{1}{2}=20+10=30\ m$$

پ) به ازای چه زاویه‌هایی، کابین در پایین‌ترین نقطه قرار دارد؟ $f(x)=0$ یعنی

$$20+20\sin x=0 \Rightarrow 20\sin x=-20 \Rightarrow \sin x=-1$$

یعنی باید زاویه‌هایی پیدا کنیم که سینوس آن‌ها منفی یک (۱-) باشد اولین زاویه که از جدول صفحه قبل به دست می‌آید ← ۲۷۰

270 و $270+360$ و $270+2\times360$ و ... و $270+9\times360$

دور اول، دور دوم، دور سوم، ...، دور دهم

ت) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ را بیابید. در این حالت وضعیت کابین از لحاظ ارتفاع چگونه است؟

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=20+20\sin\frac{\pi}{2}=20+20\times1=40$$

h_{max} در بیشترین ارتفاع خود از سطح زمین قرار دارد.

رسم تابع $f(x)=\sin x$:

دامنه‌ی تابع $\sin x$ برابر تمام اعداد حقیقی است $D_f=R$ و برای x هیچ محدودیتی وجود ندارد.

برای رسم این تابع بر کاربرد از روش نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0

$\sin 0 = 0$

$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30 = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90 = 1$

$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin 120 = \sin(180-60) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

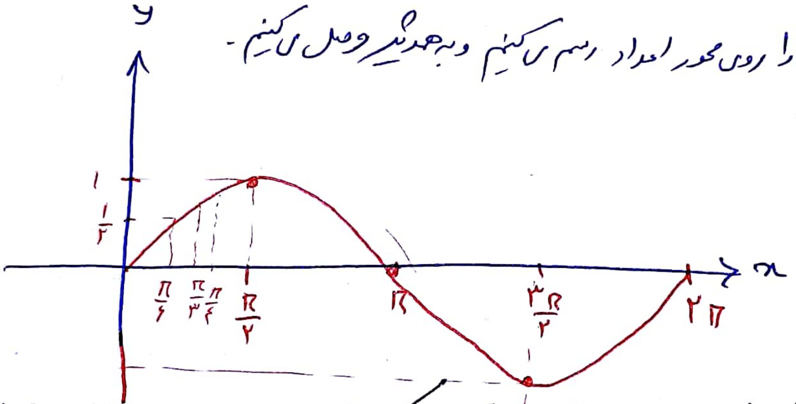
$\sin\pi = \sin 180 = 0$

$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin 225 = \sin(180+45) = -\sin 45 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270 = -1$

$\sin 2\pi = \sin 360 = 0$

اکنون نقاط بدست آمده را روی محور اعداد رسم می‌کنیم و به هم دیگر وصل می‌کنیم.



* ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sin x$ را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ رسم کرده‌ایم. یعنی x از ۰ تا 2π تغییر می‌کند.

* وقتی x از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ افزایش پیدا کند، $\sin x$ از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد.

* وقتی x از $\frac{\pi}{2}$ تا π افزایش پیدا کند، $\sin x$ از ۱ تا ۰ کاهش می‌یابد.

* وقتی x از π تا $\frac{3\pi}{2}$ افزایش پیدا کند، $\sin x$ از ۰ تا ۱- کاهش می‌یابد.

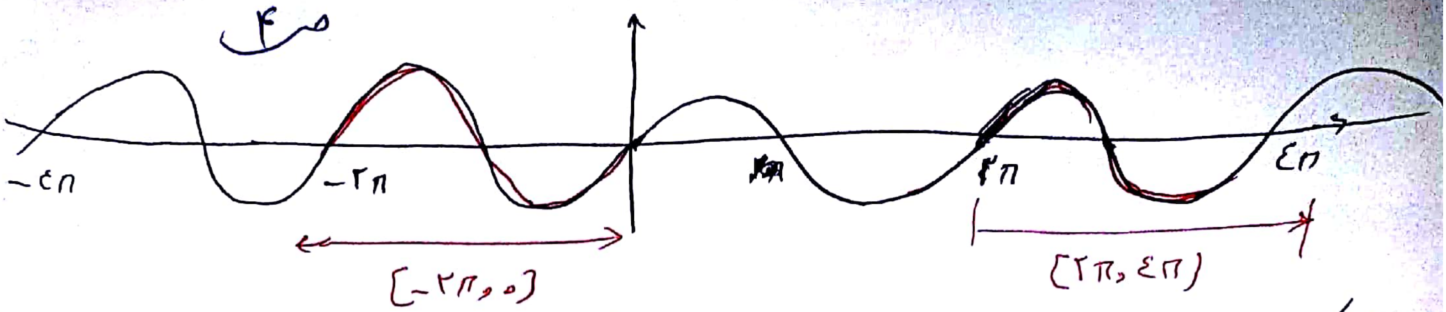
* وقتی x از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π افزایش پیدا کند، $\sin x$ از ۱- تا ۰ افزایش می‌یابد.

با ادامه رسم $\sin x$ مشاهده خواهیم کرد که نمودار $\sin x$ از $[2\pi,4\pi]$ همانند نمودار آن از $[0,2\pi]$ است

پس در حالت کلی نمودار $\sin x$ در بازه‌های زیر مشابه هم هست؟

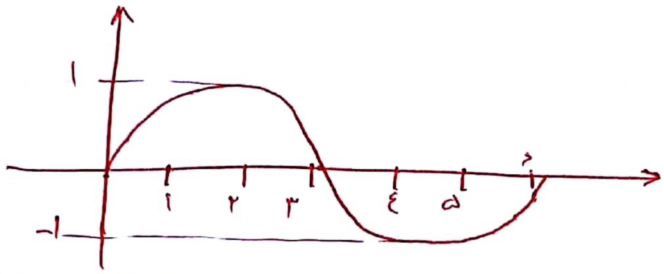
$\ldots$ و $[-4\pi,-2\pi]$ و $[-2\pi,0]$ و $[2\pi,4\pi]$ و $[4\pi,6\pi]$ و $\ldots$

یعنی برای رسم تابع $\sin x$ در هر بازه‌ای کافی است آن را به اندازه‌ی 2π به چپ یا راست منتقل کنیم $[2\pi,4\pi]$



تذکر: π رادیان تقریباً ۳٫۱۴ رادیان و ۲π رادیان تقریباً ۶٫۲۸ رادیان است پس دامنه [۰, ۲π] تقریباً همان [۰, ۶٫۲۸] است.

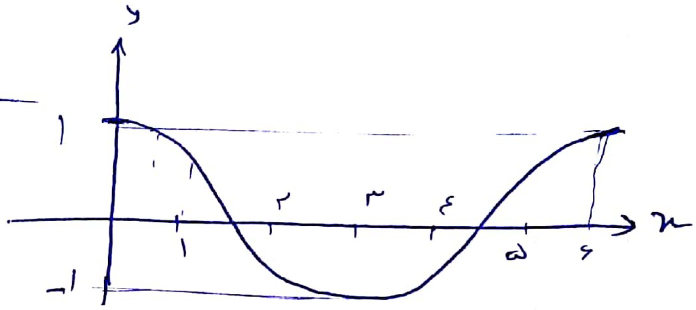
$f(x) = \sin x \qquad [0, 2\pi]$



در حالت کلی $D_f = R$

رسم نمودار $f(x) = \cos x$: $[0, 2\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	۱	۰	−۱	۰	۱



وقتی x از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ افزایش پیدا کند مقدار $\cos x$ از ۱ تا ۰ کاهش پیدا کند.

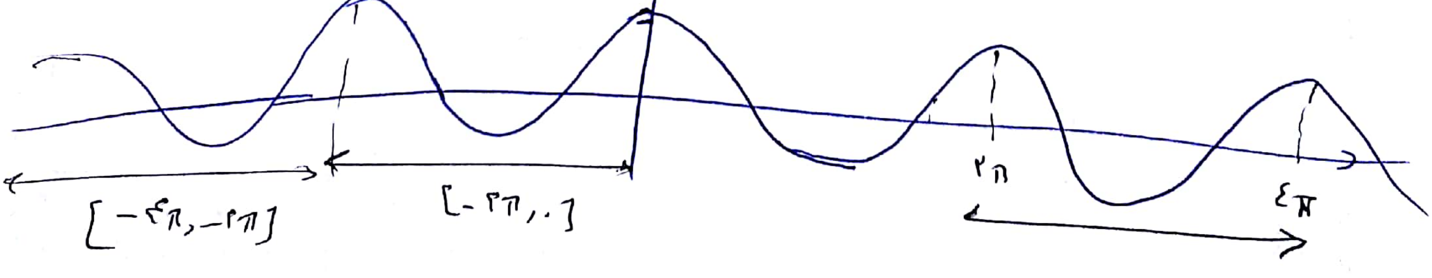
وقتی x از $\frac{\pi}{2}$ تا π افزایش پیدا کند مقدار $\cos x$ از ۰ تا ۱− کاهش می‌یابد.

وقتی x از π تا $\frac{3\pi}{2}$ افزایش می‌یابد مقدار $\cos x$ از ۱− تا ۰ افزایش می‌یابد.

وقتی x از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π افزایش یابد مقدار $\cos x$ از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد.

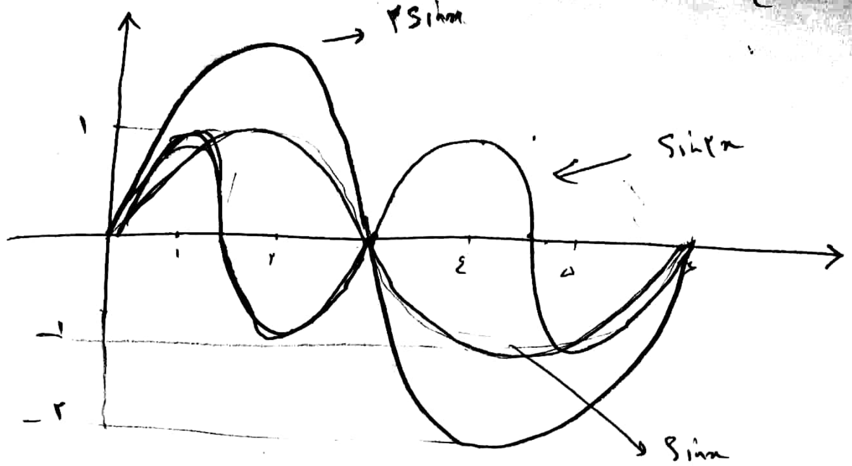
تذکر: نمودار $\cos x$، $f(x)=\cos x$ همانند نمودار تابع $f(x)=\sin x$ در بازه‌ی $[2\pi, 4\pi]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ و ...
$[-2\pi, 0]$ تا $[-4\pi, -2\pi]$ و ... نمودار یکسان با $[0, 2\pi]$ دارد.

$f(x) = \cos x \qquad x \in R$



مثال: نمودار توابع $f(x)=\sin 2x$ و $g(x)=2\sin x$ را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ رسم کنید.

حل



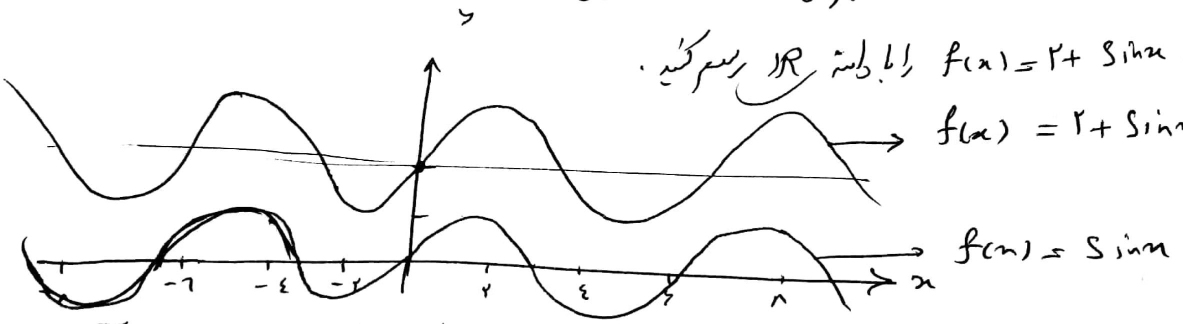
تابع $g(x)=2\sin x$ در بازه‌ی ۲- تا ۲ تغییر می‌کند، ولی $\sin 2x$ در بازه‌ی $[-1,1]$ تغییر می‌کند.

$\sin 2x$ ← در بازه‌ی $[0,2\pi]$، دوبار تکرار شده است ولی تابع $2\sin x$ فقط یک بار تکرار شده است.

نکته: به طور کلی $f(x)=a\sin x$ در بازه‌ی $-a$ تا a تغییر می‌کند.

نکته: به طور کلی $f(x)=\sin ax$ در بازه‌ی ۱- تا ۱ تغییر می‌کند.

مثال: نمودار $f(x)=2+\sin x$ را با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ رسم کنید.

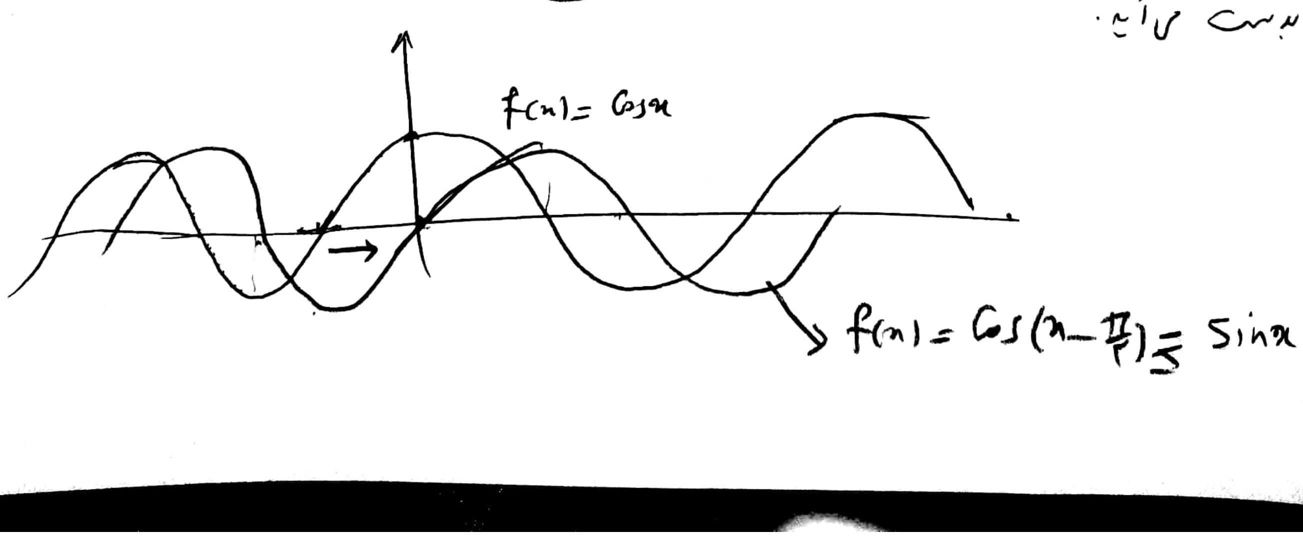


ابتدا نمودار $\sin x$ را رسم می‌کنیم پس به کمک انتقال این نمودار به اندازه‌ی ۲ واحد به بالا نمودار را بدست می‌آید.

* نمودار $y=\sin x$ و $y=\cos x$ به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ اختلاف دارند یعنی

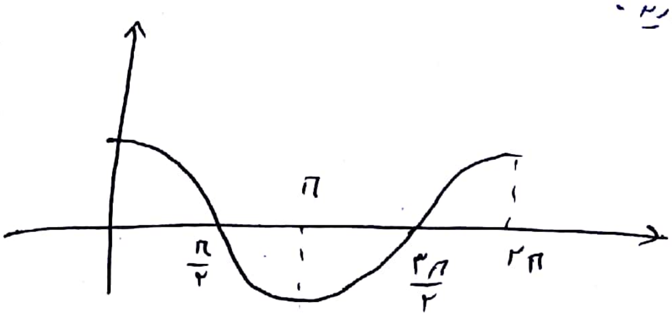
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$$

یعنی اگر نمودار $\cos x$ را رسم کنیم و سپس آن را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست منتقل کنیم نمودار $\sin x$ بدست می‌آید.



ص ۶

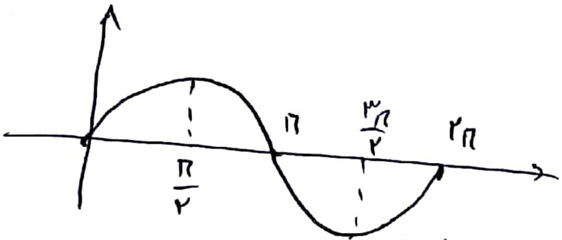
مثال) به کمک نمودار $f(x)=\cos x$ بازه‌ی $[0,2\pi]$ جواب معادله‌ی $\cos x=0$ را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ بدست آورید.



$\cos x=0 \Rightarrow$ ریشه‌های $\cos x$ $\Rightarrow$ محل قطع کردن نمودار با محور x ها

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

مثال) به کمک نمودار $f(x)=\sin x$ بازه‌ی $[0,2\pi]$ جواب معادله‌ی $\sin x=0$ را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ بدست آورید.



$\sin x=0 \Rightarrow$ ریشه‌های $\sin x$ = محل قطع کردن نمودار با محور x ها $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pi \\ x=2\pi \end{cases}$

* برای تابع $u(x)=4\sin x-3\cos(2x)$ مقادیر زیر را بیابید.

$$u(2)=4\sin(2)-3\cos(2\times 2)=4\sin 2-3\cos 4 \xleftarrow{\text{ماشین حساب}} =$$

$$u(\tfrac{\pi}{3})=4\sin(\tfrac{\pi}{3})-3\cos(\underbrace{\tfrac{2\pi}{3}}_{120})=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3(-\tfrac{1}{2})=\frac{4\sqrt{3}+3}{2}$$

$$u(\tfrac{\pi}{6})=4\sin(\tfrac{\pi}{6})-3\cos(\underbrace{2\times\tfrac{\pi}{6}}_{\frac{\pi}{3}})=4\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{2}=2-1.5=0.5$$

$$u(3\pi)=4\sin 3\pi-3\cos(\underbrace{2\times 3\pi}_{6\pi})=4\times 0-3(1)=-3$$

$$u(\pi)=4\sin\pi-3\cos(2\times\pi)=4\times 0-3(1)=-3$$

$$u(\tfrac{\pi}{2})=4\sin\tfrac{\pi}{2}-3\cos(2\times\tfrac{\pi}{2})=4\times 1-3\times(-1)=4+3=7$$

$$u(\tfrac{\pi}{4})=4\sin\tfrac{\pi}{4}-3\cos(\underbrace{2\times\tfrac{\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}})=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-3(0)=2\sqrt{2}$$

$$u(0)=4\sin 0-3\cos(\underbrace{2\times 0}_{0})=4\times 0-3(1)=-3$$

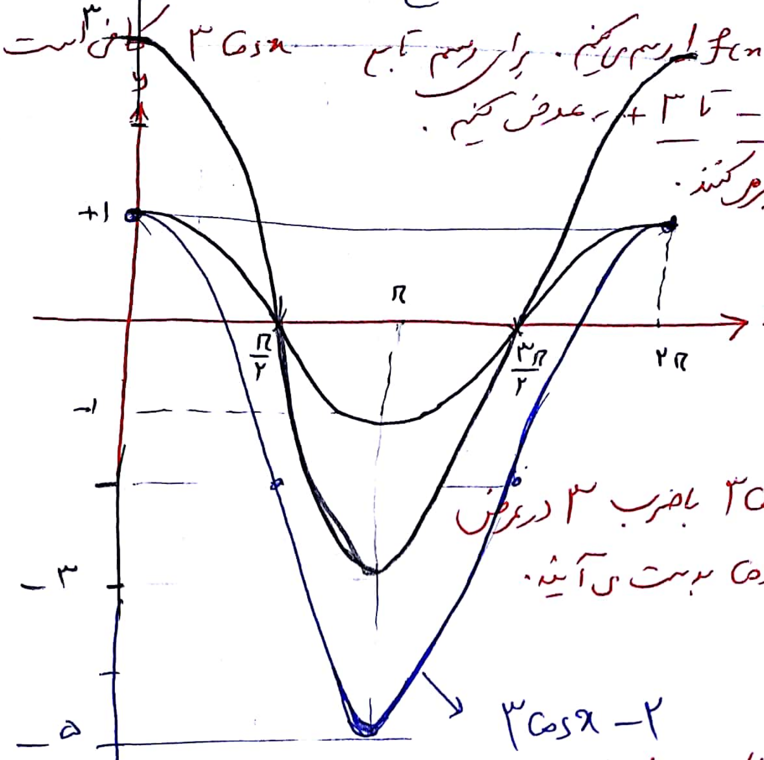
$$u(\tfrac{3\pi}{2})=4\sin\tfrac{3\pi}{2}-3\cos(\underbrace{2\times\tfrac{3\pi}{2}}_{3\pi})=4\times(-1)-3(-1)=-4-3=-7$$

ص ۷

مثال: سه تابع $f(x)=3\cos x$ ، $g(x)=\cos x+1$ و $h(x)=3\cos x-2$ را با دامنه $[0,2\pi]$ رسم کنید. روش رسم را توضیح دهید.

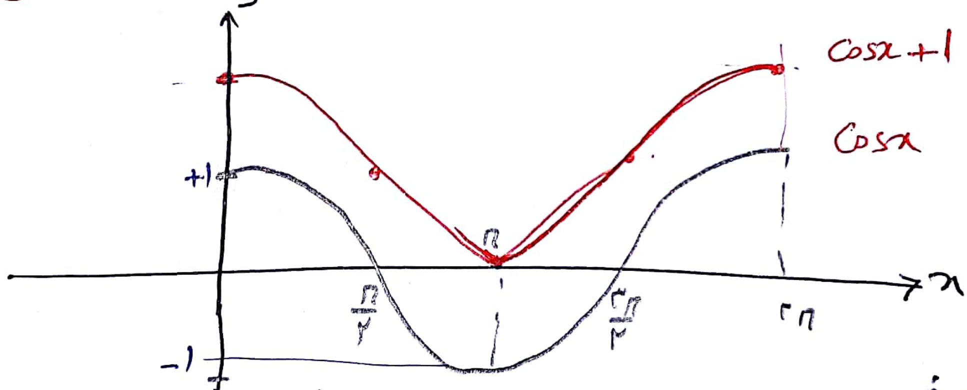
ابتدا نمودار $f(x)=\cos x$ را رسم می‌کنیم. برای رسم تابع $3\cos x$ کافی است ~~دامنه~~ بازه تغییرات آن را از -3 تا $+3$ عوض کنیم.

مقادیر آن از -3 تا $+3$ تغییر می‌کنند.



عرض نقاط نمودار تابع $3\cos x$ با ضرب ۳ در عرض نقاط نمودار تابع $\cos x$ بدست می‌آید.

نمودار $3\cos x$ را به اندازه ۲ واحد به سمت پایین محور yها انتقال می‌دهیم.



نکته:

برای راحت رسم کردن می‌توان از نقاط معروف استفاده کرد.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

عرض ۱ واحد اضافه

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x+1$	2	1	0	1	2

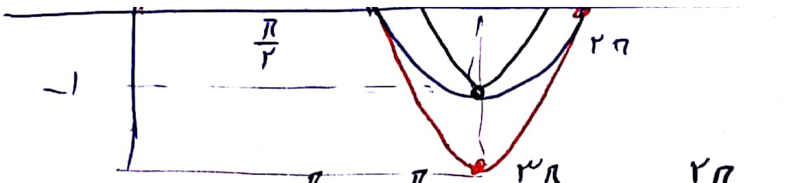
عرض ۳ برابر می‌شود

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\cos x$	3	0	-3	0	3

عرض ۲ تا کم می‌شود

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$3\cos x-2$	1	-2	-5	-2	1

نقاط به دست آمده را روی همان محور مشخص کرده و سپس به صورت منحنی وصل می‌کنیم.



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

عرض‌ها ۲ برابر

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin x$	0	2	0	-2	0

عرض‌ها را ۱ واحد اضافه

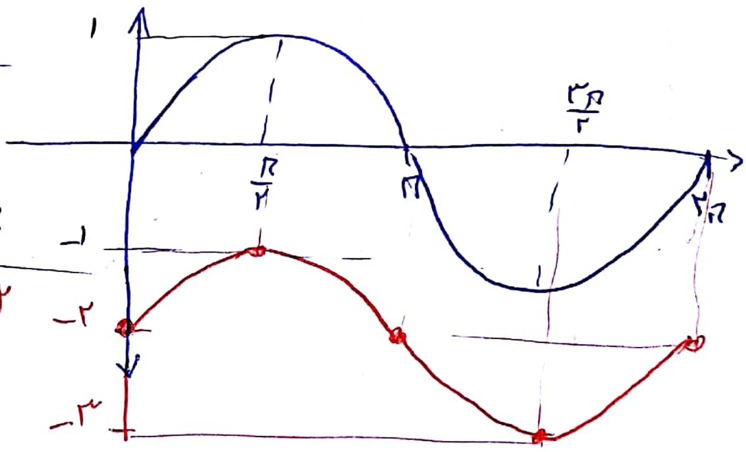
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$2\sin x+1$	1	3	1	-1	1

$f(x)=\sin x-2$ ← $\sin x$ را در منحنی ۲ واحد به سمت پایین انتقال می دهیم. (عرض ۲ واحد کم می شود)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

عرض ۲ واحد کم

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x-2$	-2	-1	-2	-3	-2



مثال) اگر $f(x)=3\cos 2x-1$ و $g(x)=2\sin x-\cos 2x$ در این صورت حاصل عبارت های زیر را بیابید

$f(0)=3\cos(2\times 0)-1=3\cos 0-1=3\times 1-1=3-1=2$

$f(\frac{\pi}{2})=3\cos(2\times\frac{\pi}{2})-1=3\cos\pi-1=3(-1)-1=-3-1=-4$

$f(\pi)=3\cos(2\pi)-1=3(1)-1=3-1=2$

$g(0)=2\sin(0)-\cos(2\times 0)=2\times 0-1=-1$

$g(\pi)=2\sin\pi-\cos 2\pi=2\times 0-1=-1$

$g(\frac{\pi}{2})=2\sin\frac{\pi}{2}-\cos(2\times\frac{\pi}{2})=2\times 1-(-1)=2+1=3$