درس اول

حد تابع ها

فعالیت ۱

فرض کنید تابع h با قانون $h(t)=\frac{t^{۲}-۴t-۶۰}{۲t-۲۰}$، ارتفاع هواپیمایی را در بازهٔ زمانی $[۵,۱۰)$ مشخص کند. t را برحسب دقیقه و $h(t)$ را بر حسب کیلومتر درنظر بگیرید.

۱ ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۸$ چقدر است؟

$$h(t)=\frac{t^2-4t-60}{2t-20}$$

$$h(8)=\frac{8^2-4\times 8-60}{2\times 8-20}=\frac{64-32-60}{16-20}=\frac{-28}{-4}=7$$

یعنی هواپیما در دقیقه هشت ام در ارتفاع ۷ کیلومتری بوده است .

۲ آیا در لحظهٔ $t=۱۰$ می‌توان از طریق تابع h، ارتفاع هواپیما را به‌دست آورد؟ چرا؟

$$h(t)=\frac{t^2-4t-60}{2t-20}$$

عدد ۱۰ در دامنه این تابع نیست.

مخرج صفرمی شود ،تقسیم بر صفر تعریف نشده است.

۴ با کامل کردن جدول، ارتفاع هواپیما را در زمان‌های نزدیک به $t=$ ۱۰ به‌دست آورید.

t	۵	۹	۹/۵	۹/۹	۹/۹۵	۹/۹۹	۹/۹۹۹	$\rightarrow$	۱۰
$h(t)$	۵/۵	۷/۵	۷/۷۵	۷/۹۵	۷/۹۷۵	7/995	7/9995	$\rightarrow$	? 8

$$h(t)=\frac{t^2-4t-60}{2t-20}$$

$$h(9/99)=\frac{9/99^2-4\times 9/99-60}{2\times 9/99-20}=\frac{-0/1599}{-0/02}=7/995$$

$$h(9/999)=\frac{9/999^2-4\times 9/999-60}{2\times 9/999-20}=\frac{-0/15999}{-0/002}=7/9995$$

۵ آیا می‌توانید حدس بزنید که با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

به عدد ۸ نردیک می شود .

۶ آیا اکنون می‌توانید بگویید ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=$ ۱۰ چقدر بوده است؟

بله ، ارتفاع هواپیما ۸ کیلومتر بوده است.

تخمین حد با استفاده از مقادیر تابع درنزدیکی نقطه حد گیری

هدف از این فعالیت، یافتن ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۱۰$ بود. این ارتفاع را با L نشان می‌دهیم.

از آنجا که ۱۰ در دامنهٔ این تابع نیست، نمی‌توانیم مستقیما L را از طریق قانون به‌دست آوریم؛

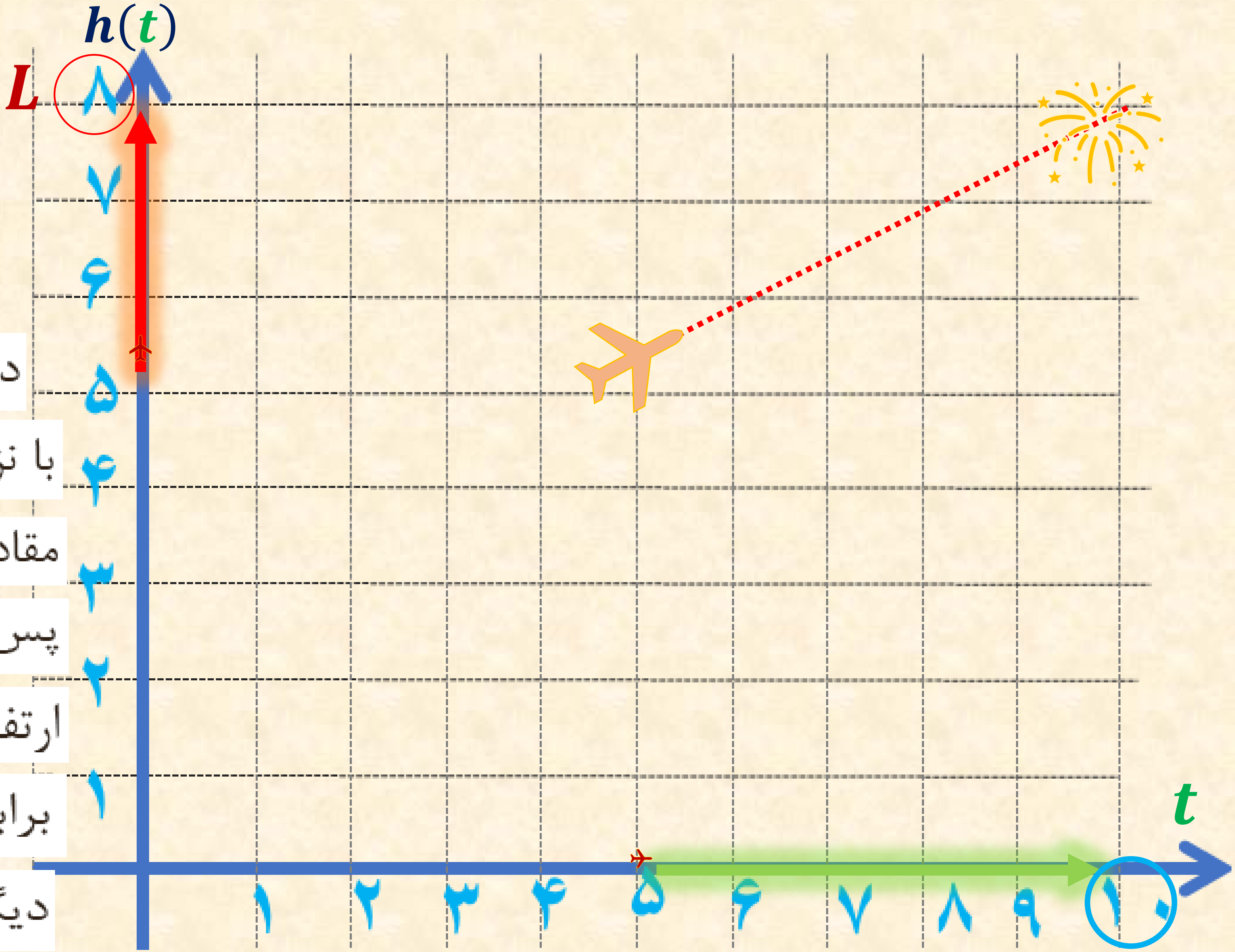
اما ارتفاع هواپیما برای زمان‌های قبل از $t=۱۰$ را می‌توان مشخص کرد.

با توجه به پیوستگی حرکت هواپیما، می‌دانیم در زمان‌های بسیار نزدیک به

$t=۱۰$، ارتفاع هواپیما نزدیک به L است؛ با تشکیل جدول مقادیر تابع در

نزدیکی‌های $t=۱۰$ مشاهده می‌کنیم که با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰،

مقادیر $h(t)$ به ۸ نزدیک می‌شوند.



در نمودار دیده می‌شود، با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به ۸ نزدیک می‌شوند. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۱۰$ برابر ۸ کیلومتر یا به عبارت دیگر $L=۸$ است.

مثال۱: با کامل کردن جدول ، حد تابع با ضابطه زیر را در نقطه ۳ حساب کنید.

$f(x) = x + 2 \qquad x \neq 3$

x	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	3	3/01	3/1	۳/۵
$f(x)$	4/5	4/9	۴/۹۹	5	5/01	5/1	۵/۵

$f(2/5) = 2/5 + 2 = 4/5$

$f(2/9) = 2/9 + 2 = 4/9$

$f(2/99) = 2/99 + 2 = 4/99$

$f(3/5) = 3/5 + 2 = 5/5$

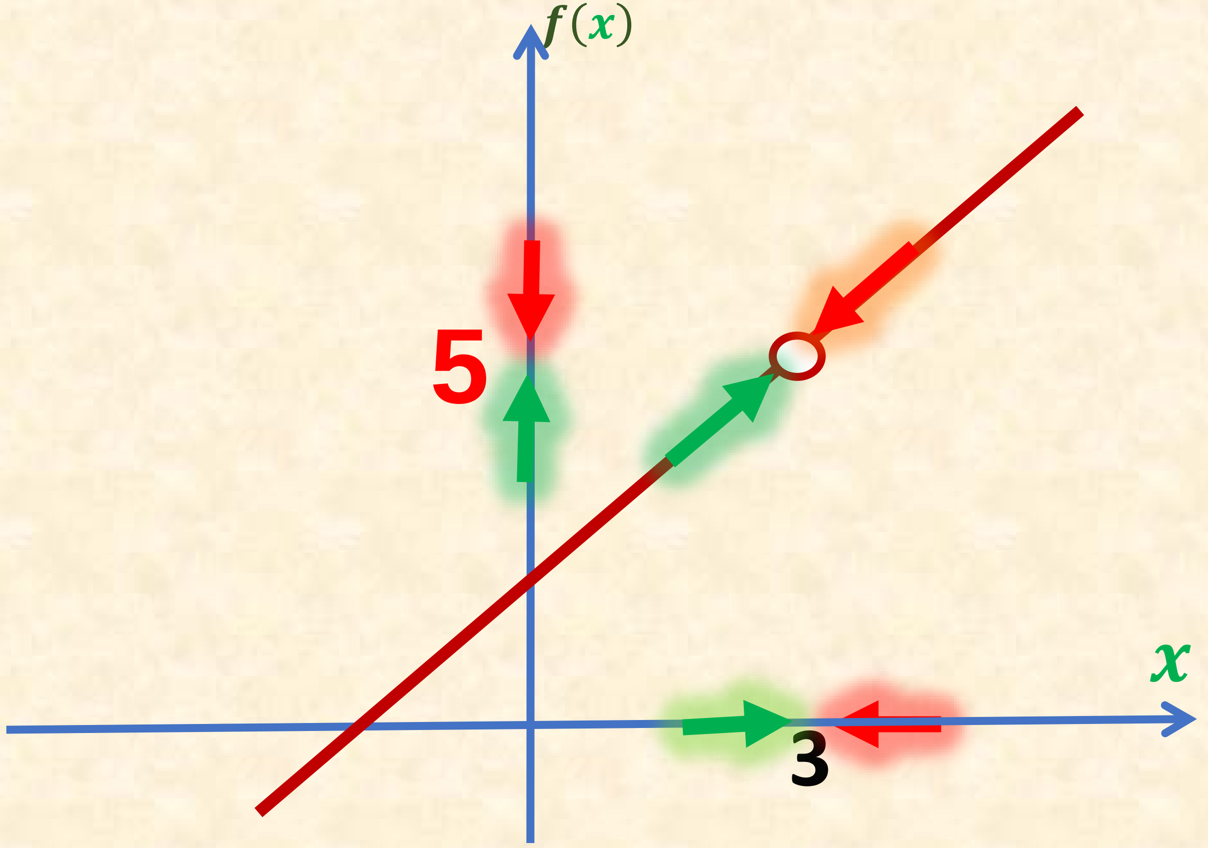
$f(3/1) = 3/1 + 2 = 5/1$

$f(3/01) = 3/01 + 2 = 5/01$

با نزدیک شدن مقادیر x به عدد ۳ ،

مقادیر تابع f(x) به عدد ۵ نزدیک می شود.

عدد ۵ را حد این تابع در x=3 نامیم.



مثال ۲

تابع g را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ و قانون $g(x)=\dfrac{x^{۲}-x-۲}{x-۲}$ در نظر بگیرید. اگر مقادیر x را در دامنهٔ g به ۲ نزدیک کنیم، مقادیر $g(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

x	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	$\to$ ۲ $\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱
$g(x)$	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	$\to$ ۳ $\leftarrow$	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱

جمع ضرب

$$g(x)=\frac{x^2-1x-2}{x-2}=\frac{(\cancel{x-2})\times(x+1)}{\cancel{x-2}}$$

$x\neq 2$

$g(x)=x+1$

$g(1/99)=1/99+1=2/99$

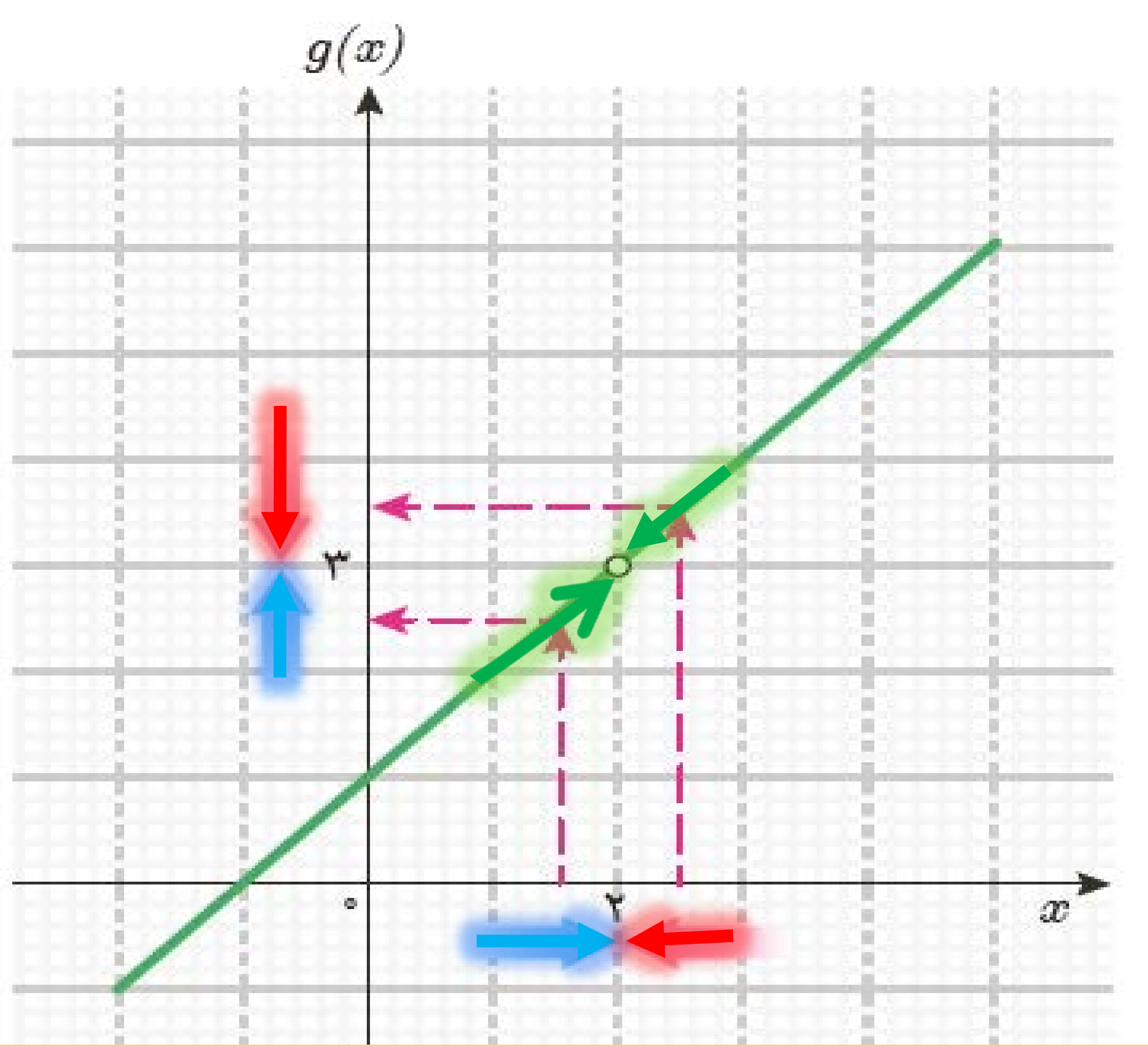
$g(1/999)=1/999+1=2/999$

$g(1/9999)=1/9999+1=2/9999$

$g(2/01)=2/01+1=3/01$

$g(2/001)=2/001+1=3/001$

$g(2/0001)=2/0001+1=3/0001$



می‌توان به کمک نمودار تابع g، حد آن

را در نقطهٔ $x=۲$ به‌دست آورد.

نمودار نشان می‌دهد که با نزدیک شدن x

روی محور طول‌ها به ۲ (از دو طرف)

مقادیر $g(x)$ روی محور عرض‌ها به ۳

نزدیک می‌شوند.

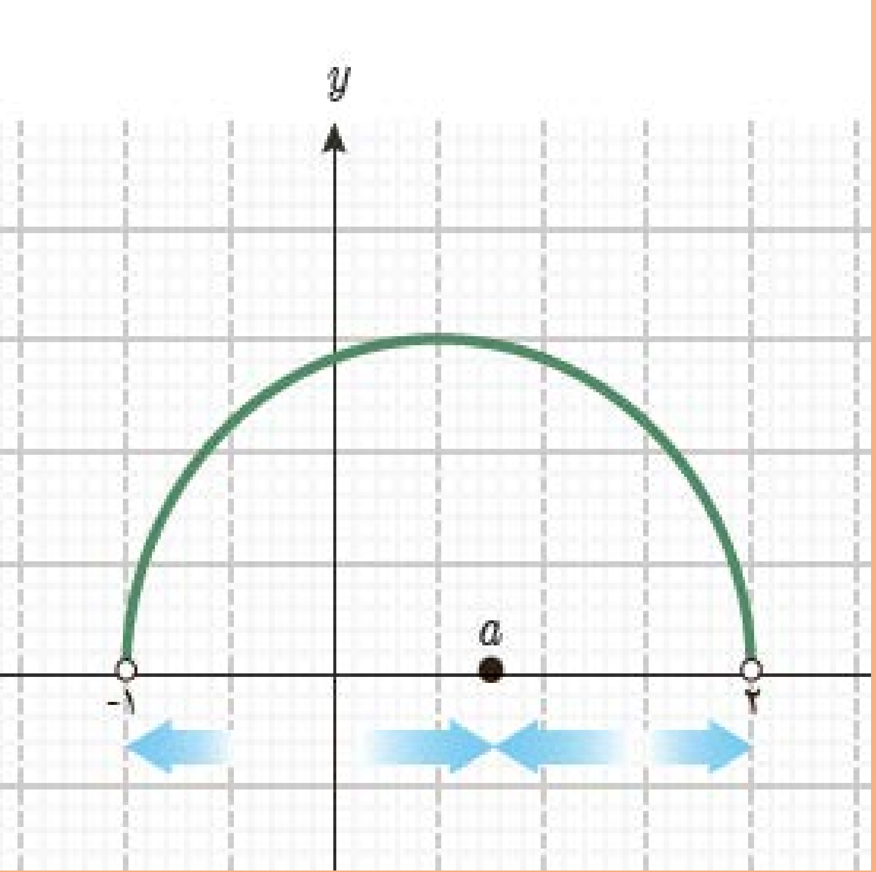
آیا می‌توان حد هر تابعی را در هر نقطه‌ای به‌دست آورد؟

برای یافتن حد یک تابع در یک نقطه، باید بتوانیم مقادیر تابع را در نزدیکی‌های آن نقطه حساب کنیم. اگر نتوانیم این کار را انجام دهیم، حد تابع در آن نقطه معنایی ندارد

اگر بخواهیم مقادیر تابع را در نزدیکی‌های یک نقطه محاسبه کنیم، باید بتوانیم از داخل دامنهٔ تابع به آن نقطه نزدیک شویم. بنابراین، برای تابعی که دامنهٔ آن بازهٔ $(0,+\infty)$ است، حد آن در همه اعداد مثبت و صفر قابل تعریف است، ولی در اعداد منفی حد آن تابع قابل تعریف نیست. منظور از نزدیک شدن آن است که به هر اندازه که بخواهیم، بتوانیم به آن نقطه نزدیک شویم. مثلاً از داخل بازهٔ $(0,+\infty)$ به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به ۱ نزدیک شویم.

مثال ۴

حد تابع $f(x)=\sqrt{(x+1)(2-x)}$ با دامنهٔ $(-1,2)$ در چه نقاطی قابل تعریف است و در چه نقاطی قابل تعریف نیست؟



همان‌طور که از روی شکل دیده می‌شود، از نقاط دامنهٔ این

تابع به همهٔ نقاط بازهٔ $(-1,2)$ از دو طرف می‌توان نزدیک شد

به نقطهٔ ۲ فقط از سمت چپ می‌توان نزدیک شد

و به ۱- فقط از سمت راست می‌توان نزدیک شد.

بنابراین، حد این تابع در تمام نقاط بازهٔ $[-1,2]$ قابل تعریف است.

حد این تابع برای نقاط خارج از بازهٔ $[-1,2]$ قابل تعریف نیست.

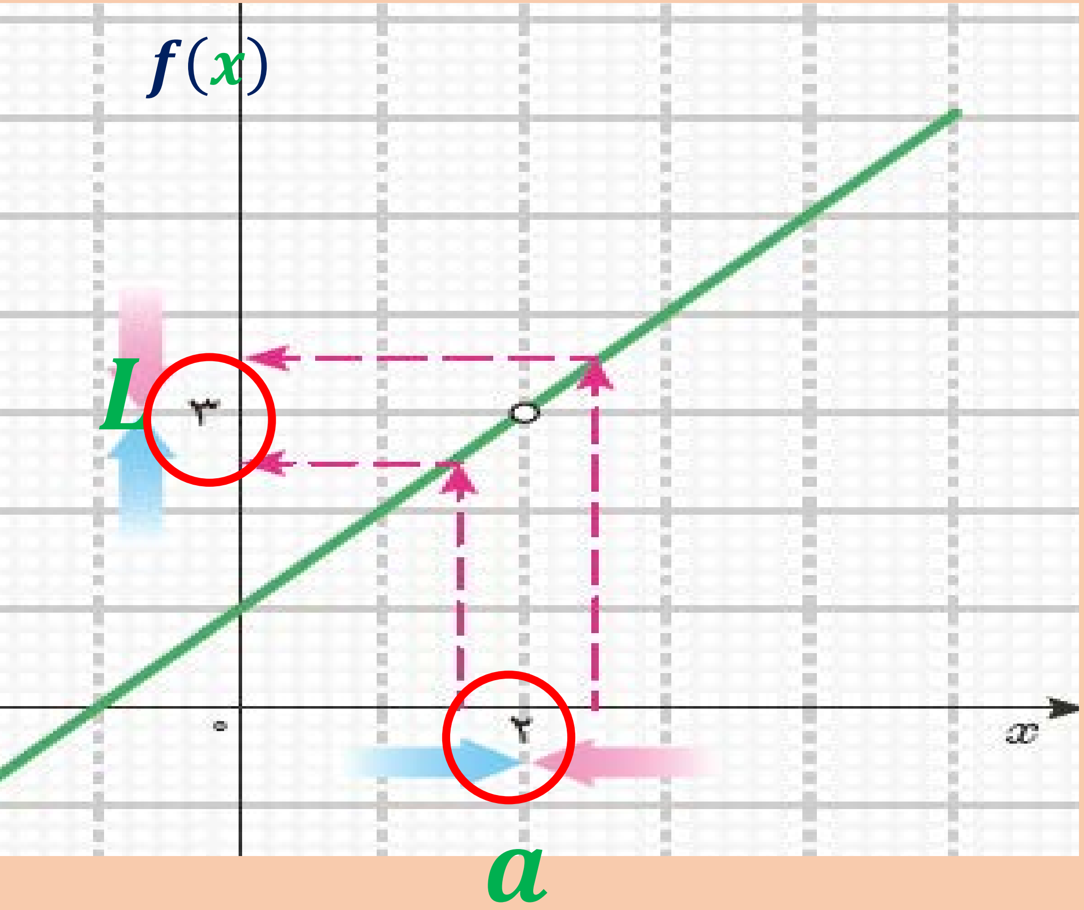
حد تابع

به طور کلی در ریاضی، حد تابع‌ها به شکل زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید f یک تابع و a نقطه‌ای باشد که بتوان از نقاط دامنهٔ تابع f[۱] (به اندازهٔ دلخواه) به آن نزدیک شد. در این حالت می‌گوییم حد f در نقطهٔ a **قابل تعریف** است.

اگر حد f در نقطهٔ a قابل تعریف باشد و با نزدیک شدن مقادیر متغیر x (از نقاط دامنهٔ f) به a که $x \neq a$، مقادیر $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند[۲]، می‌گوییم حد تابع f در نقطهٔ a برابر عدد L است.

این عمل را **حدگیری از تابع f در نقطهٔ a**، و a را **نقطهٔ حدگیری** می‌نامند.



حد تابع f در نقطهٔ a به صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ نمایش داده می‌شود.

lim ابتدای کلمهٔ limit است. این کلمه در زبان انگلیسی به معنای حد و مرز است.

از آنجا که نماد $x \longrightarrow a$ نشانگر میل کردن x به a است، $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ به صورت «حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند» خوانده می‌شود.

کار در کلاس ۱

تابع $S(x)=\frac{\sin x}{x}$ را در نظر بگیرید.

جدول زیر را کامل کنید و حد این تابع را در صفر حدس بزنید.

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\rightarrow ۰ \leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$S(x)$	۰/۹۹۸	0/99998	0/9999998	$\rightarrow$ 1 $\leftarrow$	0/9999998	0/99998	۰/۹۹۸

$$S(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$S(0/01)=\frac{\sin 0/01}{0/01}=0/99998$$

$$S(0/001)=\frac{\sin 0/001}{0/001}=0/9999998$$

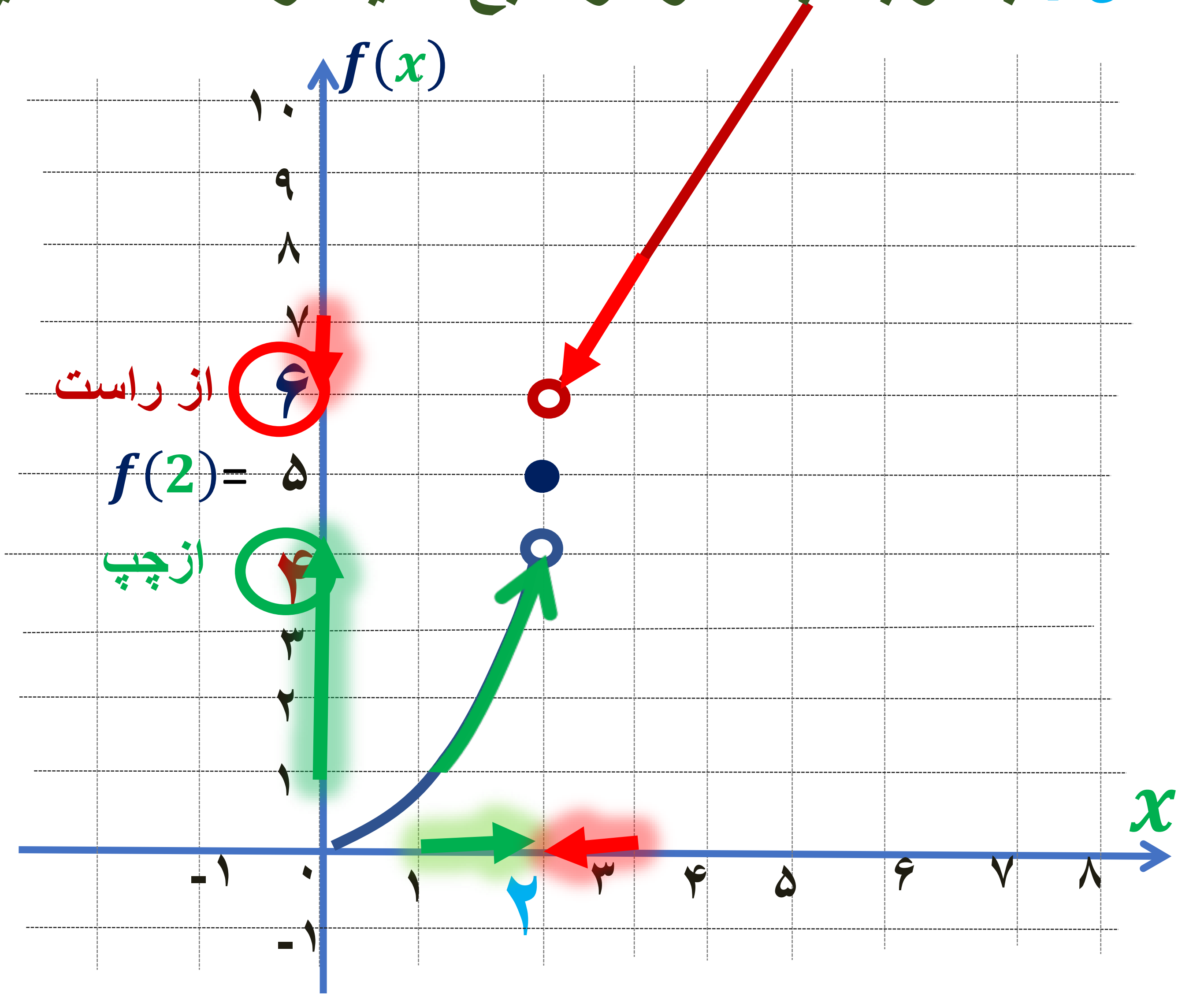
«حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی x به صفر میل می‌کند، برابر ۱ است».

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

در عمل حدگیری از یک تابع f، مقادیر $f(x)$ نمی‌توانند هم‌زمان به دو عدد مختلف نزدیک شوند، بنابراین حد یک تابع در یک نقطه، در صورت وجود، یکتاست.

مثال : با توجه به نمودار تابع، آیا در نقطه ۲ این تابع حد دارد ؟

$$f(x)=\begin{cases}2x+2 & x>2\\ 5 & x=2\\ x^2 & 0\le x<2\end{cases}$$



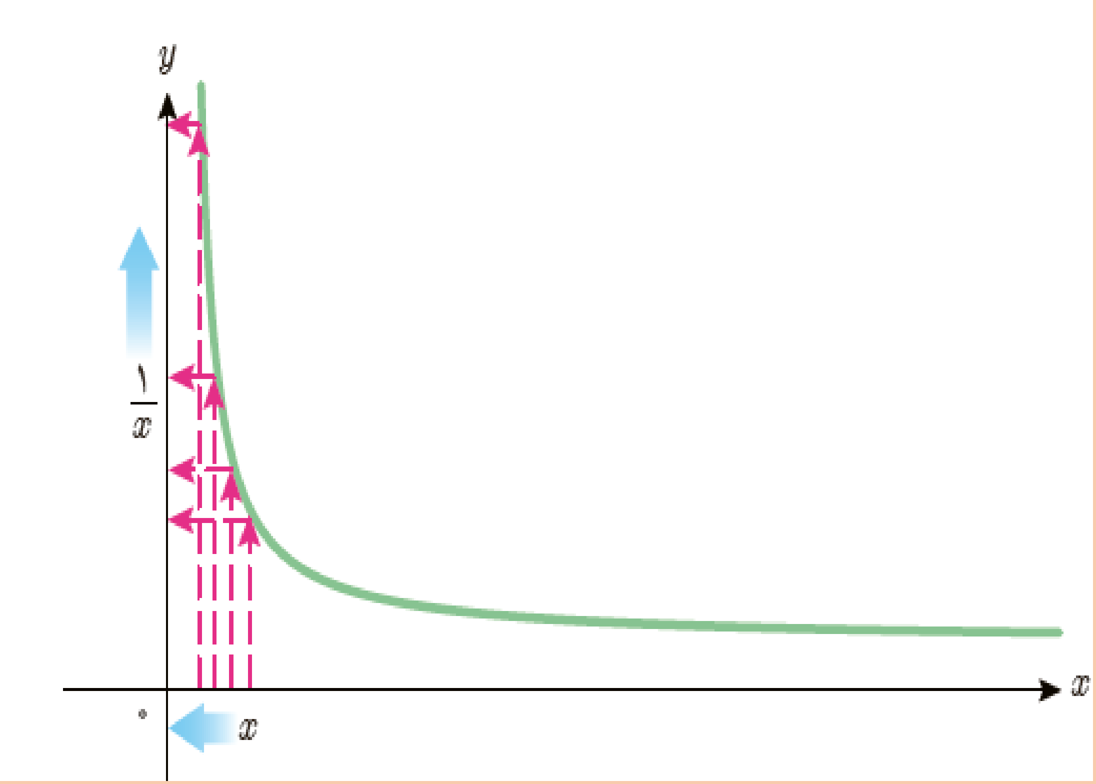
با نزدیک شدن به عدد ۲ مقادیر تابع به دو عدد نزدیک می شود پس در این نقطه حد ندارد.

وقتی حد یک تابع را در یک نقطه بررسی می‌کنیم، ممکن است مقادیر تابع به هیچ عدد خاصی نزدیک نشوند.

در این حالت می‌گویند تابع در آن نقطه حد ندارد.

قابل تعریف بودن حد تابع در یک نقطه به معنای وجود حد در آن نقطه نیست.

حد تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $(۰,+\infty)$ را در صفر بررسی می‌کنیم.



x	$۰ \leftarrow$	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	$? \leftarrow$	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰

جدول نشان می‌دهد که هر چه x به صفر نزدیک‌تر می‌شود،

مقادیر $\frac{۱}{x}$ بزرگ‌تر می‌شوند. و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند.

بنابراین، تابع با قانون $\frac{۱}{x}$ و دامنهٔ $(۰,+\infty)$ در صفر، حد ندارد.

پایان درس اول پودمان دوم