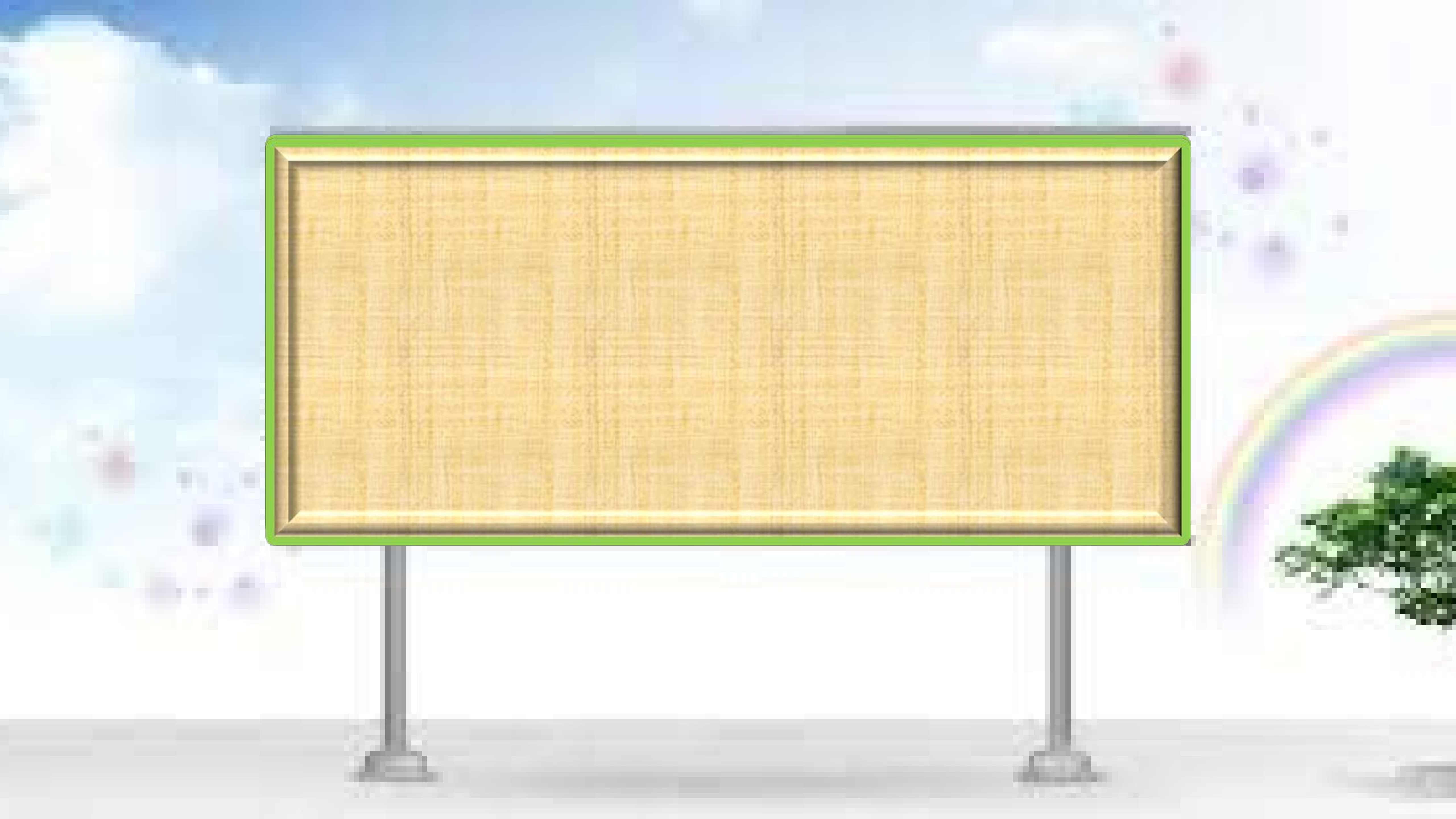


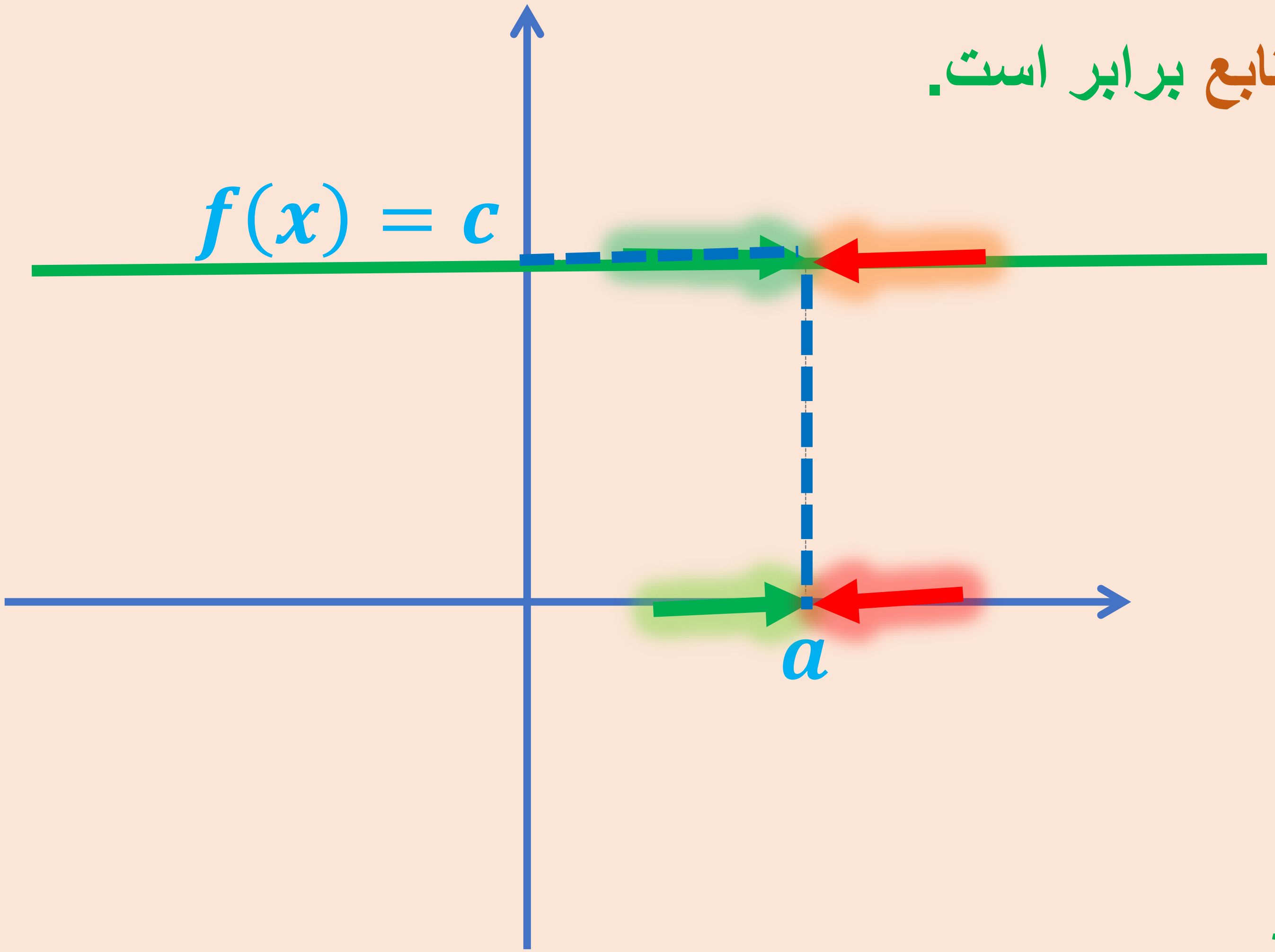
محاسبهٔ حد تابع‌ها

برای یافتن حد یک تابع، ما مقادیر تابع را در نزدیک نقطهٔ حدگیری به کمک قانون تابع، محاسبه می‌کردیم و با استفاده از این مقادیر، حد تابع را حدس می‌زدیم. روش‌هایی برای محاسبهٔ حد تابع‌ها وجود دارند که به کمک آنها، حد بسیاری از تابع‌ها را می‌توان محاسبه کرد. برای مثال، اگر تابعی از جمع یا ضرب تابع‌های ساده‌تر ساخته شده باشد، می‌توانیم از حد همان تابع‌های ساده‌تر برای محاسبهٔ حد آن تابع استفاده کنیم.

درابتدا حد چند تابع ساده را بررسی می کنیم

حد تابع ثابت:

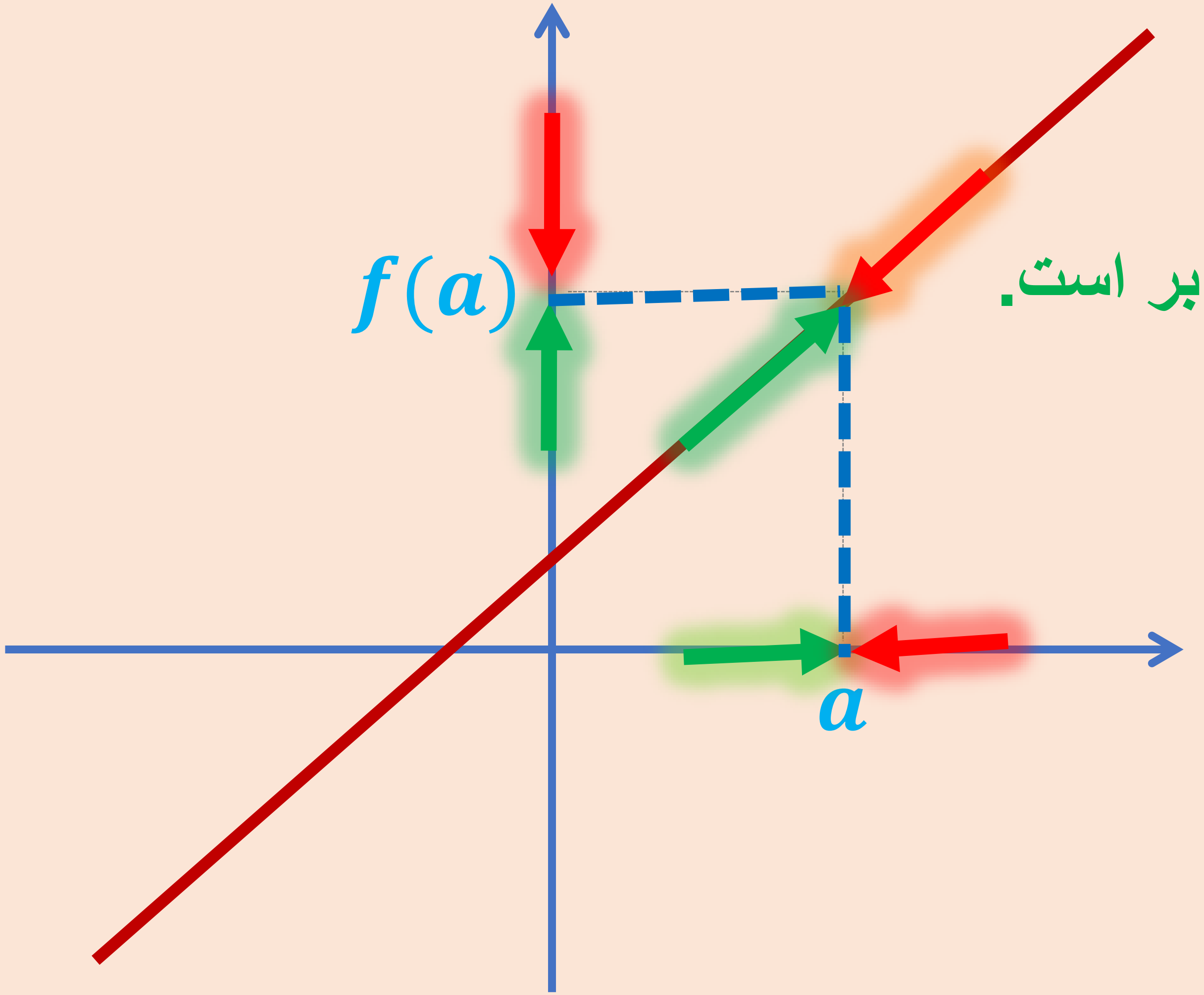
حد تابع ثابت با دامنه اعداد حقیقی ، با مقدار تابع برابر است.



مثال :

$$\lim_{x \to 1} (3) = 3$$

حد درجه اول (تابع خطی)



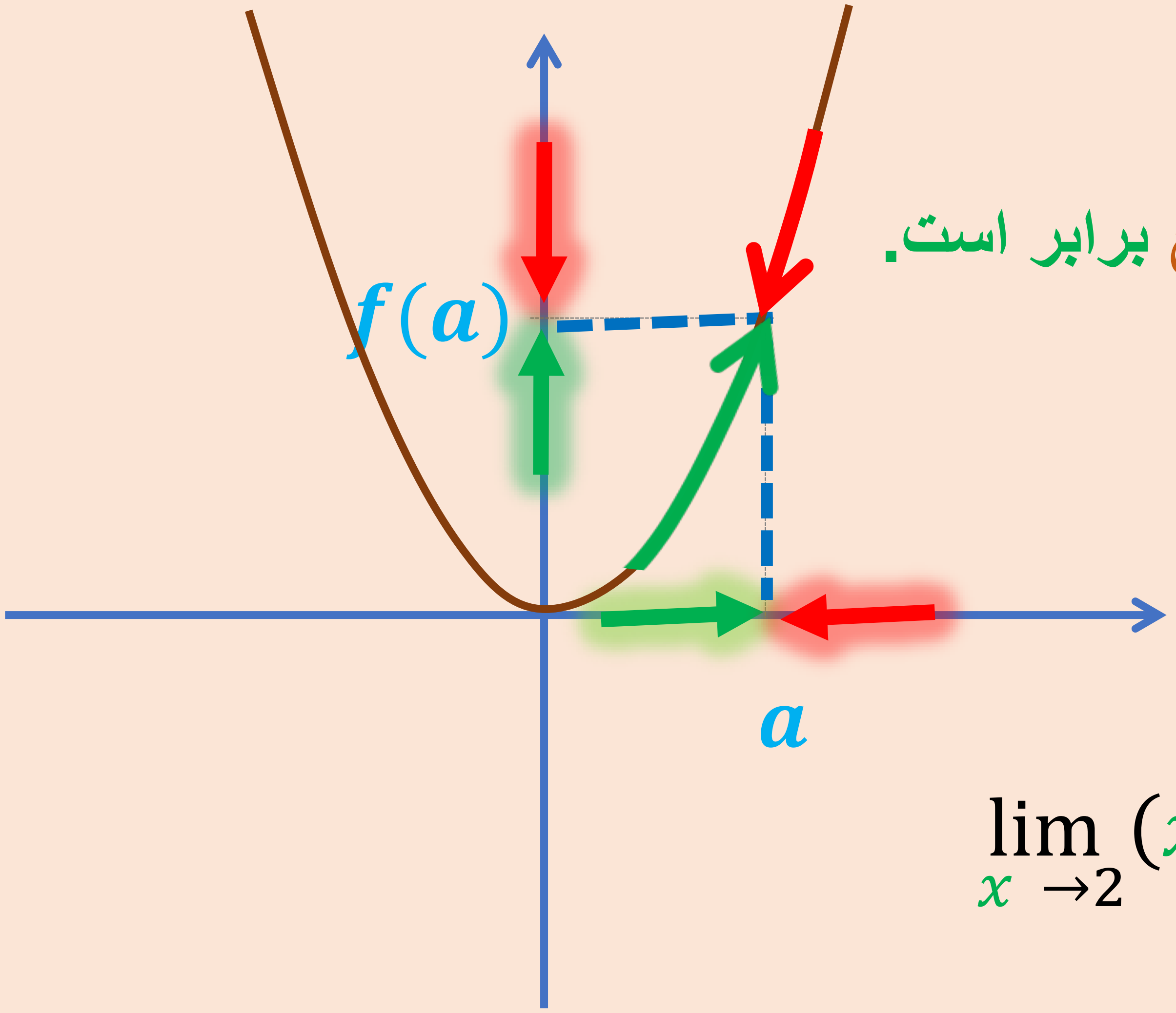
حد تابع درجه اول ، با مقدار تابع برابر است.

مثال :

$$\lim_{x \to 3} (x+2) = 3+2 = 5$$

حد تابع درجه دوم

حد تابع درجه دوم ، با مقدار تابع برابر است.



مثال :

$$\lim_{x \to 2} (x^2) = 2^2 = 4$$

در تابع هایی مانند تابع ثابت ،درجه اول و دوم و ... که نمودار پیوسته ای دارند ، مقدار حد در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است .

حد مجموع و حاصل‌ضرب دو تابع

اگر دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در $x=a$ حد داشته باشند، آنگاه مجموع و حاصل‌ضرب‌های این دو تابع نیز در a حد دارند و

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

وضعیت تفاضل تابع‌ها نیز مشابه جمع تابع‌هاست

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

مثال ۱۴

حد تابع $f(x) = x^۲ + x - ۵$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=۲$ به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۲}(x^۲ + x - ۵) = ۲^۲ + ۲ - ۵ = ۱$$

مثال :

$$\lim_{x\to 0}(x^2+3)\times\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2+3)\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= 3 \times 1 = 3$$

در توابع کسری نیز اگر در یک نقطه مخرج صفر نشود ، مقدار حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر است .

مثال ۱۶

تابع $h(x)=\dfrac{۳x}{x^{۲}+۱}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

حد این تابع را در نقطهٔ $x=-۱$ به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۳x}{x^{۲}+۱}=\frac{-۳}{(-۱)^{۲}+۱}=-\frac{۳}{۲}$$

در نقطهٔ دلخواه a حد تابع مخرج این کسر برابر $a^{۲}+۱$ است که عددی ناصفر است.

$$\lim_{x\to a}\frac{۳x}{x^{۲}+۱}=\frac{۳a}{a^{۲}+۱}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0}$$

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

وقتی حد صورت یک تابع کسری در نقطه‌ای عددی ناصفر و حد تابع مخرج، صفر باشد.

$1/01 - 1$ $\quad$ $0/01$

می‌توان نتیجه گرفت که تابع کسری در آن نقطهٔ خاص، حد ندارد. زیرا با نزدیک شدن متغیر به آن نقطه.

$1/001 - 1$ $\quad$ $0/001$ $\quad = 2000$

مقادیر تابع به هیچ عدد خاصی نزدیک نخواهند شد.

$$f(0/999) = \frac{2}{0/999 - 1} = \frac{2}{-0/001} = -2000$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x - 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x\cancel{(x - 1)}}{\cancel{x - 1}} = \lim_{x \to 1} x = 1$$

درحالتی که حد تابع صورت و تابع مخرج یک تابع کسری در یک نقطه صفر شوند،

$f(1/001$

در این حالت، وجود یا نبود حد، بستگی به تابع‌های صورت و مخرج آن تابع کسری دارد. ممکن

است تابع کسری حد داشته باشد یا نداشته باشد. به همین دلیل این حالت را مبهم نامیده‌اند.

در این حالت، برای تشخیص وجود یا نبود حد، هر تابع کسری را باید جداگانه بررسی کرد.

۱

1

مثال ۱۸

حد تابع $\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۱}$ با دامنهٔ $(۰,۱)$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

حد تابع صورت و تابع مخرج این کسر در $x=۱$، صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x-۲)}{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۲}{x+۱}=\frac{1-2}{1+1}=\frac{-1}{2}$$

توجه داشته باشید که در محاسبات بالا، مقادیر $x-۱$ همواره ناصفراند

(زیرا x هیچ‌گاه برابر ۱ نخواهد شد) پس این عامل را می‌توان از صورت و مخرج ساده کرد.

$$\lim_{t \to 10} \frac{t^2 - 4t - 60}{2t - 20} = \frac{10^2 - 4 \times 10 - 60}{2 \times 10 - 20} = \frac{100 - 40 - 60}{20 - 20} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{t \to 10} \frac{t^2 - 4t - 60}{2t - 20} = \lim_{t \to 10} \frac{\cancel{(t - 10)} \times (t + 6)}{2\cancel{(t - 10)}} = \lim_{t \to 10} \frac{t + 6}{2}$$

$$= \frac{10 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

۲

تابع g را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ و قانون $g(x)=\dfrac{x^۲-x-۲}{x-۲}$ در نظر بگیرید. اگر مقادیر x را در دامنهٔ g به ۲ نزدیک کنیم، مقادیر $g(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{2^2 - 2 - 2}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)} \times (x + 1)}{\cancel{x - 2}}$$

$$\lim_{x \to 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

کار در کلاس ۵

وجود حد تابع‌های زیر را در نقاط داده‌شده بررسی کنید. در صورت وجود حد، آن را بیابید و با نماد حد بنویسید.

الف) تابع $\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ در $x=۳$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\times(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6$$

کار در کلاس ۵

ب) تابع $\dfrac{(x+۱)\sin x}{x(x+۲)}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۰\}$ در $x=۰$ (راهنمایی: این تابع را به صورت ضرب دو تابع مناسب بنویسید).

$$g(x)=\frac{(x+1)sinx}{x(x+2)}=\frac{x+1}{x+2}\times\frac{sinx}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x+2}\times\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

مسائل

۱ حد تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده‌شده، در صورت وجود، بیابید.

الف) تابع $g(x) = x^{۳} - ۲x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نقطهٔ دلخواه a.

$$\lim_{x \to a} (x^3 - 2x) = a^3 - 2a$$

ب) تابع $f(x) = \dfrac{x^{۲} + ۱}{x^{۲} - ۱}$ با دامنهٔ $(۱,۵)$ در نقطهٔ $x = ۳$ و در نقطهٔ $x = ۱$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} = \frac{10}{8}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1^2 + 1}{1^2 - 1} = \frac{2}{0}$$

مسائل

۲ حد تابع $h(x)=\dfrac{x^{۲}+x-۲}{۴-x^{۲}}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۲)$ در -۲ را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{4-x^2}=\frac{2^2+2-2}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}\times(x-1)}{(2-x)\cancel{(2+x)}}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{2-x}=\frac{-2-1}{2-(-2)}=\frac{-3}{4}$$

مسائل

۵ تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}+x}{x^{2}-x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0,1\}$ را در نظر بگیرید. وجود حد این تابع را در نقاط صفر و ۱ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\times(x+1)}{\cancel{x}(x-1)}=\frac{0+1}{0-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\frac{1^2+1}{1^2-1}=\frac{1+1}{1-1}=\frac{2}{0}$$

مسائل

۶ تابع $g(x)=\dfrac{(x+x^{۳})\sin x}{x^{۲}(۱-x)}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ را در نظر بگیرید.

$$g(x)=\frac{(x+x^3)sinx}{x^2(1-x)}=\frac{\cancel{x}(1+x^2)sinx}{\underset{x}{\cancel{x^2}}(1-x)}=\frac{1+x^2}{1-x}\times\frac{sinx}{x}$$

الف) آیا این تابع در صفر حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{1-x}\times\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1\times 1=1$$

ب) آیا این تابع در ۱ حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+x^3)sinx}{x^2(1-x)}=\frac{(1+1^3)sin1}{1^2(1-1)}=\frac{2\times sin1}{0}$$

پایان

پودمان دوم