

میانمقدار بودمان بسوم مقایسه حدهای یک طرفه و دو طرفه و بررسی می‌کنیم
 درس اول حدهای یک طرفه و دو طرفه

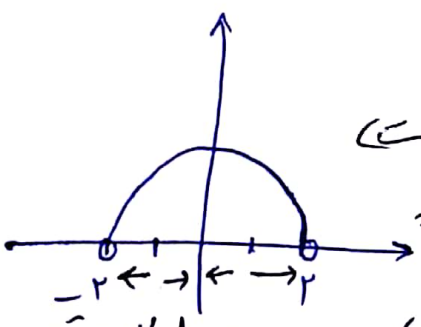
①

مفهوم حد چپ تابع: اگر متغیر را فقط از سمت چپ به آن نقطه نزدیک کنیم و حدی برای مقادیر تابع بدست آوریم به این حد چپ تابع در آن نقطه می‌نامند.

مفهوم حد راست تابع: اگر متغیر را فقط از سمت راست به آن نقطه نزدیک کنیم، حدی برای مقادیر تابع بدست آوریم به این حد راست تابع در آن نقطه می‌نامند.

تذکره: شرط این که حد وجود داشته باشد این است که حد چپ و راست موجود و برابر باشند. یعنی اگر این دو مقدار مساوی باشند مقادیر تابع به حدهای نزدیک می‌روند و هر دو می‌توانیم که تابع در این نقطه حد ندارد.

مثال) با توجه به نمودار تابع زیر، از لحاظ یک طرفه حد چپ و یک طرفه راست و دو طرفه بودن در نقاط ۲ و ۲- و صفر بررسی کنید.



حد چپ تابع در ۲- از طرف راست است (یک طرفه راست) چون از سمت چپ نمی‌توان به نقطه ۲- نزدیک نمود.

حد چپ تابع در ۲ از سمت چپ (یک طرفه چپ) است. زیرا از سمت راست نمی‌توان به نقطه ۲ نزدیک نمود.

حد چپ تابع در نقطه ۰ دو طرفه است، یک طرفه دو طرفه است. زیرا از نقاط دامنه این تابع از دو طرفه می‌توان به صفر نزدیک شد.

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ با نزدیک شدن متغیر x به عدد a از سمت چپ مقادیر $f(x)$ به عدد L_1 نزدیک می‌شود.
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ با نزدیک شدن متغیر x به عدد a از سمت راست مقادیر $f(x)$ به عدد L_2 نزدیک می‌شود.
~~مقادیر $f(x)$ به عدد L_1 نزدیک می‌شود.~~
~~مقادیر $f(x)$ در نقطه a برابر L_1 است.~~
~~مقادیر $f(x)$ در نقطه a برابر L_2 است.~~

(۲)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

شرط وجود حد در نقطه a

حد چپ در نقطه a = حد راست در نقطه a

شرط وجود حد دوطرفه در یک نقطه، وجود حد چپ و حد راست در آن نقطه و تساوی این حدها است. مقدار یکی از این حدها همان مقدار تابع در آن نقطه است.

یعنی اگر حد گسری تابع f در نقطه a یک حد دوطرفه باشد باید حد چپ و حد راست f در نقطه a وجود مساوی داشته باشند.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

L همان حد دوطرفه f در نقطه a است.

مثال) حد چپ و حد راست تابع زیر را در صورت وجود در نقطه 4 بیابید.
 آیا این تابع در نقطه 4 حد دارد؟

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \geq 4 \\ \frac{x}{2} + 4 & x < 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 4 + 2 = 6$$

در ضلع پای بالایی ←

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \frac{4}{2} + 4 = 2 + 4 = 6$$

در ضلع پای پایینی ←

حد چپ و حد راست در 4 مساوی هستند و مقدار مشترک آن 6 است.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 6$$

پس

مثال) حد چپ و حد راست تابع زیر را در صورت وجود در نقطه ۳ بدست آورید.
 آیا تابع در $x=3$ حد دارد؟

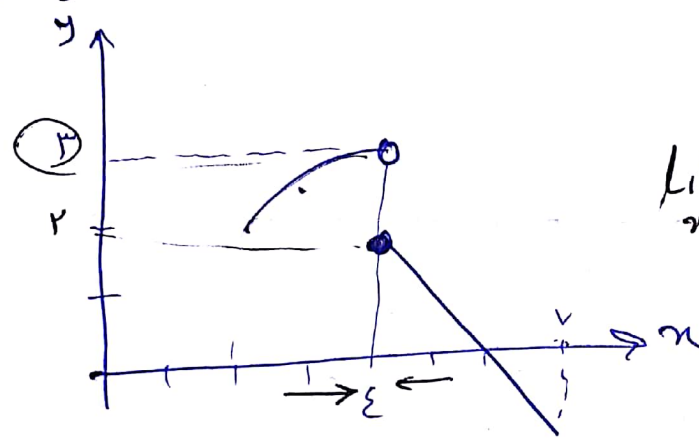
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 3 \\ \frac{x}{3} + 2 & x < 3 \end{cases}$$

حد چپ و حد راست در نقطه $x=3$ مساوی نیستند، این تابع در $x=3$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3-1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{3}{3} + 2 = 1+2 = 3$$

مثال) با توجه به نمودار f داده شده، از چپ و حد راست وجود حد این تابع را در نقطه $x=4$ بررسی کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$$

وقتی از سمت چپ به عدد ۴ نزدیک می شویم، مقادیر $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می شوند.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2$$

وقتی از سمت راست به عدد ۴ نزدیک می شویم، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می شوند.

پس تابع در نقطه ۴ حد ندارد چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند.

در تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$ وضعیت حد را در نقاط ۰ و ۱ و ۲ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

پس حد در نقطه ۰ وجود ندارد.

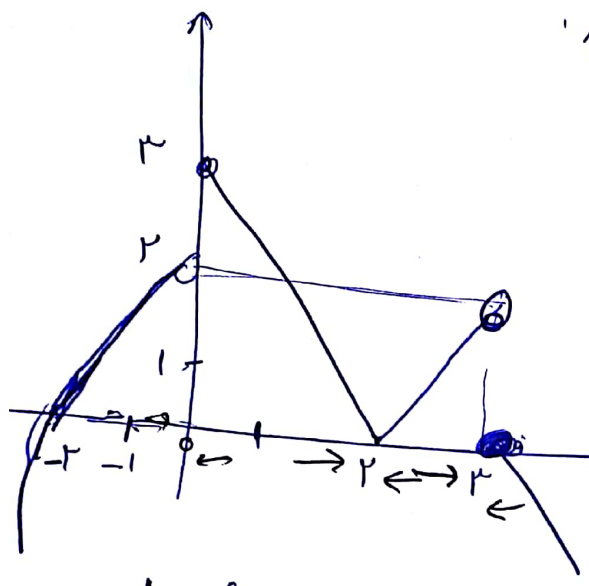
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2$$

۴

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -2$$

حد تابع در نقطه $x = -2$ وجود دارد.

با توجه به نمودار زیر مقادیر خواسته شده را بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

$$f(3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$$

$$f(2) = 0$$

توابع زیر را در نظر بگیرید. با بررسی حد و در است در نقاط داده شده وجود حد در این نقاط را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 0 \\ 1 - x & 0 < x \end{cases} \quad x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 + 0 = 0$$

پس حد در نقطه 0 وجود ندارد.

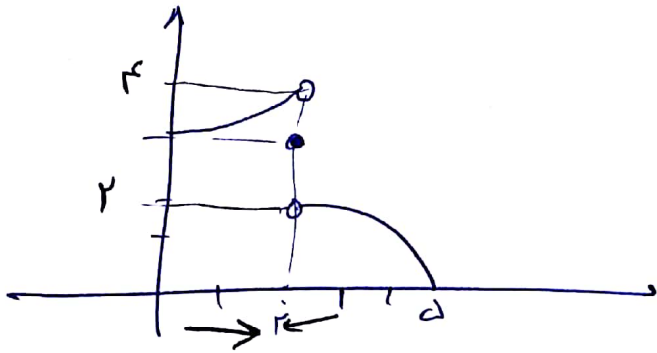
$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x < 1 \\ d & x = 1 \\ dx^2 - 4x & 1 < x \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = d(1)^2 - 4(1) = d - 4 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2(1) - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ پس حد تابع در نقطه $x = 1$ وجود دارد.

(5)

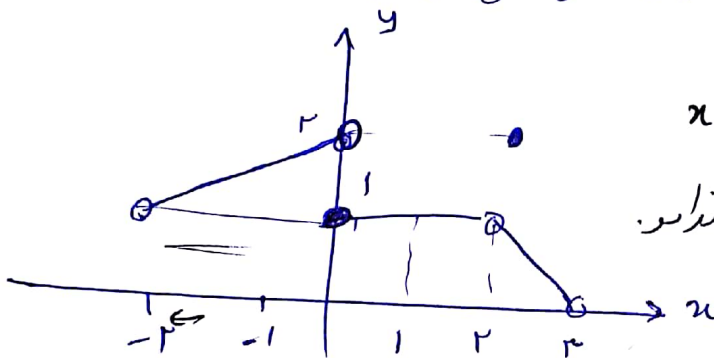


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

سه حد در نقطه $x=2$ وجود ندارد.

با توجه به نمودار f در هر یک از نقاط -2 و 0 و 2 و 3 بررسی کنید.



در هر یک از نقاط $x=-2$ و 0 و 2 و 3 حد وجود ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$$

در نقطه $x=3$ حد یک طرفه است (محدوب)

$$\lim_{x \rightarrow +3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

سه حد تابع در نقطه $x=0$ وجود ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

سه حد تابع در نقطه $x=2$ برابر است

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$

4

آیا تابع در نقطه $x=2$ محدود دارد؟

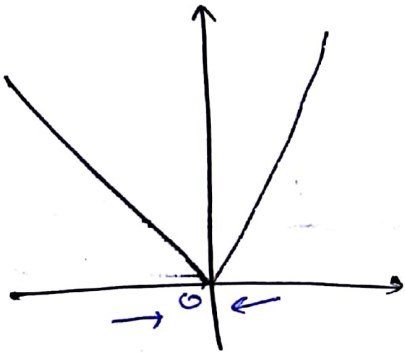
$$f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & x \leq 2 \\ x-4 & 2 < x \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x^2) = 2-2^2 = 2-4 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-4) = 2-4 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2 \quad \text{چون در نقطه } x=2 \text{ وجود دارد}$$

صداق $f(x) = |x|$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

پس در نقطه $x=0$ محدود دارد.

مقدار a را تعیین کنید تا تابع $f(x) = \begin{cases} ax+2 & x < -1 \\ x^2+a & -1 \leq x \end{cases}$ در $x=-1$ صدق داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = (-1)^2 + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = a(-1) + 2 = -a + 2$$

شروط وجود در نقطه $x=-1$ این است که حد چپ و حد راست با هم برابر باشند.

$$1 + a = -a + 2$$

$$a + a = 2 - 1$$

$$2a = 1$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

(7)

حدهٴ ارضاء a راملوں سے بنائے گئے تابع کے لیے درج ذیل درج ذیل $x=2$ حد درجہ

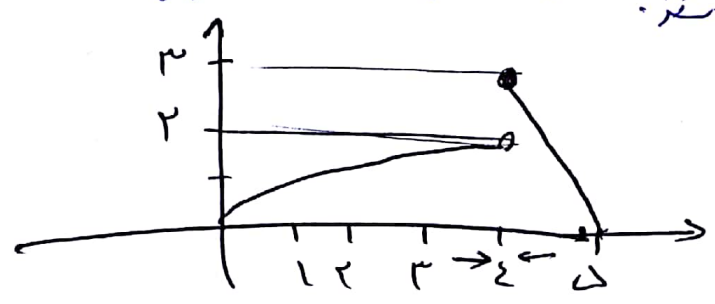
$$f(x) = \begin{cases} 3-x & x > 2 \\ ax+2 & x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3-2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = a(2)+2 = 2a+2$$

$$\left. \begin{aligned} 2a+2 &= 1 \\ 2a &= 1-2 \\ 2a &= -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \end{aligned} \right\}$$

مغزدار تابعی رسم کنند کے دائرہ آں بازو $a=3$ آں باہم متضاد بنائے۔ $[2, 4]$ و صریح و حد راست درج ذیل



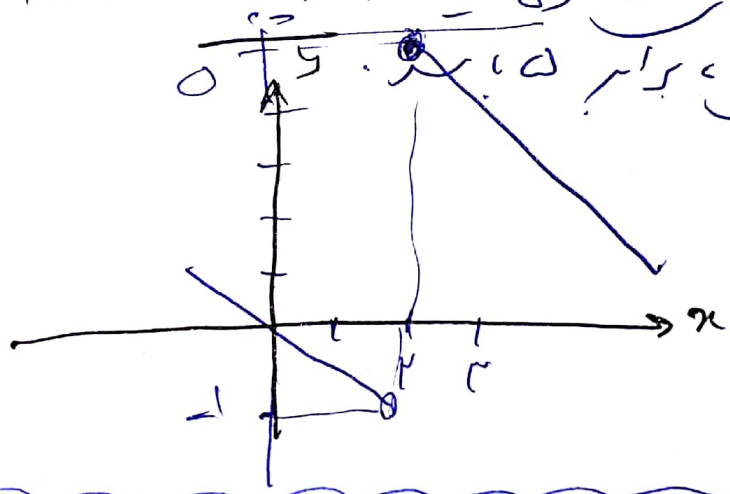
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$$

تائیں با دائرہ f صریح کنند کہ صریح آں درج ذیل آ برابر - و حد راست آں درج ذیل آ برابر 2 برابر 1 با 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$



تائیں و مواضع بنوید کہ در صفر راست دائرہ آں وکی در صفر صریح آں با 2

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$