پودمان ۴ : جلسه اول – توان‌رسانی به توان اعداد گویا

تعریف : اگر a عددی مثبت یا صفر باشد تعریف می‌کنیم $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

مثال ۱ : نمایش رادیکالی عدد $25^{\frac{1}{2}}$ به صورت $\sqrt{25}$ است، بنابراین : $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

در مثال زیر نیز نمایش رادیکالی چند عدد توان‌دار نوشته شده است.

مثال۲ : $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$ $\quad 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ $\quad 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$

تعریف : اگر a عددی مثبت یا صفر باشد تعریف می‌کنیم $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

مثال۳: نمایش رادیکال عدد $125^{\frac{1}{3}}$ به صورت $\sqrt[3]{125}$ است، بنابراین : $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

در مثال زیر نمایش رادیکالی چند عدد توان‌دار نوشته شده است.

مثال۴ : $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ $\quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ $\quad (0.001)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0.001} = 0.1$

تعریف : در حالت کلی اگر a عددی مثبت یا صفر و n یک عدد طبیعی باشد،

تعریف می‌کنیم : $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

مثال ۵ : اعداد توان‌دار زیر به صورت نمایش رادیکالی نوشته شده است و هر کدام که قابل ساده شدن است، حاصل آن نیز نوشته شده است.

پ) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$ $\quad$ ب) $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$ $\quad$ الف) $3^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{3}$

ج) $512^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{512} = 2$ $\quad$ ث) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$ $\quad$ ت) $7^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{7}$

تذکر: دقت کنید در در اعداد توان‌داربا توان کسری که (توان عدد صحیح نیست) پایه نباید منفی باشد، که در این صورت تعریف نشده است.

مثال: کدام یک ازعبارات زیر تعریف شده و کدام تعریف نشده است؟

ج) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ $\quad$ ث) $(-0.001)^{\frac{1}{3}}$ $\quad$ ت) $(-64)^{\frac{1}{3}}$ $\quad$ پ) $(64)^{\frac{1}{3}}$ $\quad$ ب) $(-7)^{\frac{1}{5}}$ $\quad$ الف) $(-9)^{\frac{1}{2}}$

قسمت های الف ، ب، ت،ث، تعریف نشده هستند، چون پایه منفی است و بقیه تعریف شده‌اند.

سوالات :

۱- اعداد زیر را به صورت نمایش رادیکالی بنویسید ودرصورت امکان حاصل آنها را حساب کنید.

الف) $3^{\frac{1}{2}} = \cdots$ ب) $64^{\frac{1}{2}} = \cdots$

پ) $\left(\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{2}} = \cdots$ ت) $(0.01)^{\frac{1}{2}} = \cdots$

۲- نمایش رادیکالی اعداد زیر را بنویسید و در صورت امکان حاصل را نیز حساب کنید.

الف) $5^{\frac{1}{3}} = \cdots$ ب) $27^{\frac{1}{3}} = \cdots$

پ) $50^{\frac{1}{3}} = \cdots$ ت) $64^{\frac{1}{3}} = \cdots$

۳- نمایش رادیکالی اعداد زیر را بنویسید.

الف) $4^{\frac{1}{7}} = \cdots$ ب) $2^{\frac{1}{3}} = \cdots$

پ) $64^{\frac{1}{6}} = \cdots$ ت) $243^{\frac{1}{5}} = \cdots$

۴- کدام یک از عبارات زیر با معنی (تعریف شده) و کدام بی معنی یا (تعریف نشده) است؟

الف) $(-3)^{\frac{1}{2}}$ ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ پ) $(-27)^{\frac{1}{3}}$

ت) $(-81)^{\frac{1}{4}}$ ث) $(1)^{\frac{1}{7}}$ ج) $(-1)^{\frac{1}{7}}$

پودمان۴: جلسه دوم – ریشه گیری عددهای حقیقی.

تعریف : ریشه های دوم یک عدد اعدادی هستند که اگر به توان ۲ برسند برابر خود عدد شوند.

مثال۱: چون $25 = (5)^2$ و $25 = (-5)^2$ ، بنابراین ۵ و ۵- ، ریشه های دوم عدد ۲۵ هستند.

مثال۲: چون $49 = (7)^2$ و $49 = (-7)^2$ ، بنابراین ۷ و ۷- ، ریشه های دوم عدد ۴۹ هستند.

تعریف: ریشه سوم یک عدد، عددی است که اگر به توان ۳ برسند برابر خود عدد شوند.

مثال۳: چون $8 = (2)^3$، بنابراین ۲ ریشه سوم عدد ۸ است.

مثال۴: چون $-8 = (-2)^3$، بنابراین ۲- ، ریشه سوم عدد ۸- است.

توجه: ریشه های چهارم و پنجم نیزشبیه تعاریف بالا تعریف می‌شوند که با توجه به کار در کلاس صحفه ۹۹، در سوال ۵ و ۶ می‌توانید آن‌ها را پاسخ دهید.

در حالت کلی برای ریشه گیری تعریف زیر داده می‌شود.

تعریف: اگر k یک عدد طبیعی بزرگتر از ۱ باشد، عدد حقیقی b را ریشه kام عدد a می نامیم، هرگاه

$$b^k = a$$

مثال ۵:

الف) با توجه به این‌که $\frac{1}{10000} = \left(\frac{1}{10}\right)^4$ ، عدد $\frac{1}{10}$ یک ریشه چهارم $\frac{1}{10000}$ است.

ب) با توجه به این‌که $\frac{1}{10000} = \left(-\frac{1}{10}\right)^4$، عدد $\frac{1}{10}-$ نیز یک ریشه چهرم $\frac{1}{10000}$ است.

مثال۶:

الف) باتوجه به این‌که، $2^6 = 64$ ، عدد 2 ریشه ششم ۶۴ است.

ب) باتوجه به این‌که، $(-2)^6 = 64$ ، عدد 2 - نیز ریشه ششم ۶۴ است.

مثال۷: عدد 2 - ریشه پنجم -32 است، زیرا $(-2)^5 = -32$.

مثال۸: عدد 5 ریشه سوم 125 است، زیرا $5^3 = 125$.

مثال۹: عدد 5 - ریشه سوم 125 - است، زیرا $(-5)^3 = -125$.

با دقت در مثال ۵و۶ متوجه می‌شویم عدد $\frac{1}{10000}$ دو ریشه چهارم دارد. $\frac{1}{10}$ و $-\frac{1}{10}$

همچنین عدد۶۴ نیز دوریشه ششم دارد .2 و-2 .

بنابراین نتیجه می گیریم هر عدد مثبت دو ریشه زوج دارد که قرینه هستند.

هم چنین با توجه به مثال‌های ۷و۸و۹ نتیجه می گیریم هرعدد حقیقی (مثبت یا منفی)

فقط یک ریشه فرد دارند.

با دقت در مثال ۵و۶ مشاهده می‌شود، هر عدد منفی به توان زوج عددی مثبت می‌شود، لذا

اعداد منفی ریشه زوج ندارند. به طور کلی نتایج بالا را در نکته زیر بیان می‌کنیم.(صحفه ۱۰۴ کتاب)

نکته : ۱) هر عدد مثبت a دوریشه زوج دارد که قرینۀ یکدیگرند. اگر k عدد طبیعی زوج باشد،

ریشه های زوج a را با $\sqrt[k]{a}$, $-\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهیم.

۲) اعدا منفی ریشۀ زوج ندارند.

۳) هر عدد دلخواه حقیقی a فقط یک ریشه فرد دارد. اگر k عددی فرد باشد، ریشه فرد kام

عدد a را با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهیم

مثال:

الف) عدد ۱۶ دو ریشه چهارم دارد که عبارتند از ۲و۲-، زیرا، $2^4 = 16$ و $(-2)^4 = 16$.

ب) عدد ۶۴- ریشۀ ششم ندارد. زیرا توان ششم هر عدد، مثبت است

پ) عدد ۳ دو ریشه ششم دارد که قرینۀ یکدیگرند و عبارتند از $\sqrt[6]{3}$, $-\sqrt[6]{3}$

ت) عدد ۳- ریشه ششم ندارد. زیرا توان چهارم هر عدد مثبت است.

تعریف: اگر یک عدد حقیقی و عدی زوج باشد، آنگاه $\sqrt[k]{a^k} = |a|$

مثال:

الف) $\sqrt[4]{(-5)^4} = |-5| = 5$

ب) $\sqrt[6]{\left(-\frac{2}{3}\right)^6} = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$

پ) $\sqrt[2]{8^2} = |8| = 8$

ت) $\sqrt[2]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2} = \left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right| = -\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

در قسمت آخر دقت کنید چون در داخل قدر مطلق حاصل عبارت منفی است، وقتی بدون قدر مطلق نوشته می‌شود علامت منفی قرار می گیرد.

سوالات:

۱- ریشه های دوم ۱۶ را بنویسید.

۲- ریشه‌های چهرم ۸۱ برابر است با .... و ....

۳- ریشه‌های دوم ۸۱ برابراست با .... و ....

۴- ریشه سوم ۲۷- برابراست با ....

۵- ریشه سوم ۲۷ برابراست با ....

۶- در هر قسمت جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) هر عدد حقیقی مثبت دو ریشه .... دارد که قرینه یکدیگرند.

ب) هر عدد حقیقی دلخواه فقط .... ریشه فرد دارد.

پ) اعداد منفی ریشه .... ندارند.