

موضوع: ریاضیات ۳ رشته های فنی و کامپیوتر - بهمن ماه ۹۳  
 { حل سوال ۲۰  
 (تقریباً ۴۵ دقیقه)

مشق:

تعریف: شیب یک خط در یک نقطه آن ثابت است. اما شیب یک منحنی در نقطه ای بستگی دارد که در آن انتخاب کنیم و معمولاً در آن نقطه مماس بر منحنی می کشند.

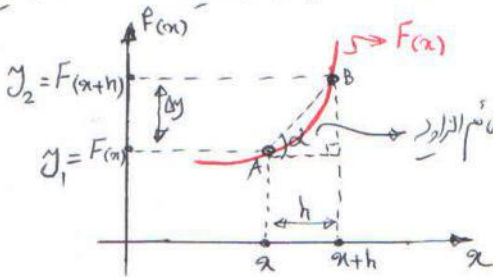
I) شیب صاف: خط افقی

II) شیب ثابت

III) خط عمودی: شیب نامتناهی

IV) عمود: مماس

تعریف ریاضی مشتق: اگر تابع  $F(x)$  در بازه  $(a, b)$  پیوسته و مشتق پذیر باشد داریم:



تفسیرات متغیر:  $h = \Delta x$   
 تفسیرات تابع:  $\Delta y = y_2 - y_1$

$$\text{شیب وتر } AB = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{h}$$

توجه: حال اگر  $h$  ضمیمه کوچک شود یعنی  $(h \rightarrow 0)$  مشتق تابع  $F(x)$  در نقطه  $x$  به دست می آید و آن را با  $F'(x)$  یا  $y'_x$  نشان می دهند.

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

(En.) مشتق تابع زیر را به کمک تعریف مشتق حساب کنید.

$$1) F(x) = 2x + 1$$

$$F(x+h) = 2(x+h) + 1$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) + 1 - (2x+1)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h + 1 - 2x - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

$$\Rightarrow \text{پس } F(x) = 2x + 1 \Rightarrow F'(x) = 2$$

$$2) F(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$F(x+h) = (x+h)^2 + 2(x+h) - 3 \quad \rightarrow (x^2 + 2x - 3)$$

$$y' = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 3 - (x^2 + 2x - 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 3 - x^2 - 2x + 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h + 2 = 2x + 2$$

$$\Rightarrow F(x) = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow F'(x) = 2x + 2$$

(Ex.2) مشتق تابع زیر را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

1)  $F(x) = 5x - 1$

2)  $F(x) = 1 - 3x$

3)  $F(x) = x^2 + 1$

4)  $F(x) = (x+1)^2$

5)  $F(x) = -x^2$

6)  $F(x) = x^2 - 3x$

8)  $F(x) = \sqrt{x}$

7)  $F(x) = x^3 + 1 \xrightarrow{\text{افسوس}} (a+b)^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$

9)  $F(x) = \sin x \xrightarrow{\text{افسوس}} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

توجه: مشتق تابع  $F(x)$  در نقطه  $x = x_0$  با استفاده از تعریف بصورت زیر قابل حساب است.

$$f' = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \quad \text{مشتق } F(x) \text{ در } x = x_0 \text{ با استفاده از تعریف}$$

(Ex.3) مشتق تابع زیر را در نقطه داده شده به کمک تعریف حساب کنید.

1)  $F(x) = 3 - 5x \quad x = 2$

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \Rightarrow F'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} \quad \text{①}$$

$$F(x) = 3 - 5x$$

$$F(2) = 3 - 5(2) = -7 \quad \text{②}$$

$$F(2+h) = 3 - 5(2+h) \quad \text{③}$$

$$\textcircled{2,3} \longrightarrow \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 5(2+h) - (-7)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - 10 - 5h + 7}{h}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5h}{h} = -5$$

$$2) F(x) = x^2 - 1, \quad x = -2$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \Rightarrow f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-2+h) - F(-2)}{h} \quad \textcircled{1}$$

$$F(x) = x^2 - 1$$

$$F(-2) = (-2)^2 - 1 = 3 \quad \textcircled{2}$$

$$F(-2+h) = (-2+h)^2 - 1 \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2,3} \longrightarrow \textcircled{1} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - 1 - 3}{h}$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2)^2 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-4+h)}{h} = -4$$

$$3) F(x) = 2x + 5, \quad x = 0$$

$$4) F(x) = 3 + x, \quad x = 1$$

$$5) F(x) = x^2 + 3x, \quad x = -1$$

$$6) F(x) = \sqrt{x}, \quad x = 4$$

$$7) F(x) = (x+2)^2, \quad x = 2$$

دستورات مشتق گیری (فرمول‌ها مشتق):

توجه: اگر نخواهیم مشتق هر تابع را با استفاده از تعریف حساب کنیم، اولاً برای

محاسبات احتیاج به وقت زیاد خواهد بود و ثانیاً برابر بعضی از توابع

مشتق و بسیر پیچیده می‌باشد، بنابراین از دستورات مشتق گیری

بصورت زیر استفاده می‌کنیم.

ضمناً برای یادآوری مثال در پایان فرمول‌ها حل کرده‌است.

ردیف	تابع $y = F(x)$	مشتق تابع $y' = F'(x)$	توضیحات
1	$F(x) = C$	$F'(x) = 0$	تابع ثابت
2	$F(x) = ax + b$	$a$	$a, b \in \mathbb{R}$
3	$x^n$	$n x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}$
4	$K F(x)$	$K F'(x)$	$K \in \mathbb{R}$
5	$a x^n$	$a n x^{n-1}$	$u = g(x)$ <sup>تغییر متغیر</sup>
6	$u^n$	$n u^{n-1} u'$	$K \in \mathbb{R}$
7	$K u^n$	$K n u^{n-1} u'$	
8	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
9	$a\sqrt{x}$	$\frac{a}{2\sqrt{x}}$	$a \in \mathbb{R}$
10	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
11	$a\sqrt{u}$	$\frac{a u'}{2\sqrt{u}}$	



ردیف	$y = F(x)$	$y' = F'(x)$	توضیحات
12	$\sqrt[m]{x^n}$	$\frac{n}{m \times \sqrt[m]{x^{m-n}}}$	$m > n$
13	$\sqrt[m]{u^n}$	$\frac{nu'}{m \times \sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$m > n$
14	$\sin x$	$\cos x$	
15	$\cos x$	$-\sin x$	
16	$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	
17	$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x)$	
18)	$\sin u$	$u' \cos u$	
19	$\cos u$	$-u' \sin u$	
20	$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u)$	
21	$\cot u$	$-u'(1 + \cot^2 u)$	
22	$\sin^n x$	$n \cos x \cdot \sin^{n-1} x$	
23	$\cos^n x$	$-n \sin x \cdot \cos^{n-1} x$	
24	$\tan^n x$	$n(1 + \tan^2 x) \cdot \tan^{n-1} x$	
25	$\tan^n x$	$-n(1 + \cot^2 x) \cdot \cot^{n-1} x$	
26	$\sin^n u$	$n u' \cos u \cdot \sin^{n-1} u$	
27	$\cos^n u$	$-n u' \sin u \cdot \cos^{n-1} u$	
28	$\tan^n u$	$n u'(1 + \tan^2 u) \cdot \tan^{n-1} u$	
29	$\cot^n u$	$-n u'(1 + \cot^2 u) \cdot \cot^{n-1} u$	
30	$k F(x) \quad * * *$	$k F'(x) \quad * * *$	

ردیف	$y = F(x)$	$y' = F'(x)$	توضیحات
31	$u + v$	$u' + v'$	$u$ و $v$ دو تابع
32	$u - v$	$u' - v'$	بر حسب هر دو
33	$u \cdot v$	$u'v + v'u$	$u = f(x)$
34	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - v'u}{v^2}$	$v = h(x)$

Ex.1 مشتق توابع زیر را با استفاده از فرمولهای مشتق بیابید.

- 1)  $F(x) = +5 \Rightarrow F'(x) = 0$
- 2)  $g(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow g'(x) = 0$
- 3)  $h(x) = \sqrt{3} \Rightarrow h'(x) = 0$
- 4)  $S(x) = -4$
- 5)  $P(x) = 0.1003$
- 6)  $q(x) = \pi$  عدد

Ex.2. مشتق توابع زیر را با استفاده از فرمولهای مشتق بیابید.

- 1)  $F(x) = 3x - 1 \Rightarrow F'(x) = 3$
- 2)  $g(x) = 1 - x \Rightarrow g'(x) = -1$
- 3)  $h(x) = \frac{x}{3} + 2 \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{3}$
- 4)  $S(x) = 1 + 3x$
- 5)  $P(x) = -2x$
- 6)  $q(x) = 2 - \frac{10}{3}x$

Eq. 3.4 (مشتق توابع زیر را بکشد فرمول مشتق بیست آورید)

$$1) f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$2) g(x) = x^{100} \Rightarrow g'(x) = 100x^{99}$$

$$3) h(x) = 5x^7 \Rightarrow h'(x) = 5 \times 7 x^6$$

$$4) s(x) = x^2$$

$$5) p(x) = -4x^7$$

$$6) q(x) = -2x^{120}$$

Eq. 6.7 (مشتق توابع زیر را بکشد فرمول مشتق صاب لیند)

$$1) f(x) = (2x-1)^{10} \Rightarrow f'(x) = 10(2)(2x-1)^9$$

$$n=10 \Rightarrow u=2x-1 \Rightarrow u=2$$

$$2) g(x) = -7(1-3x)^5 \Rightarrow g'(x) = -7(5)(-3)(1-3x)^4$$

$$n=5, a=-7 \Rightarrow u=1-3x \Rightarrow u=-3$$

$$3) h(x) = (x^2+3)^4$$

$$4) s(x) = (2+5x)^{100}$$

Eq. 8.9, 8.10, 8.11 (مشتق توابع زیر را بکشد فرمول مشتق بیست آورید)

$$1) f(x) = 5\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$2) g(x) = -\sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) h(x) = \sqrt{7-3x} \Rightarrow h'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{7-3x}}$$

$$u=7-3x \Rightarrow u'=-3$$

$$4) s(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow \begin{cases} u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ s'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} \end{cases} \Rightarrow s'(x) = \frac{(x^3)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}}$$



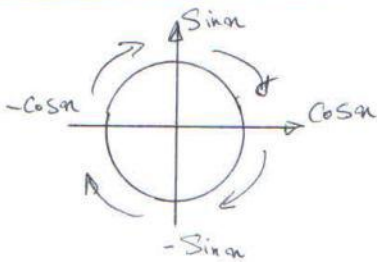
مثق توابع زير را توسط فرمول‌هاى مشتق يابيد

1)  $F(x) = \sqrt[7]{x^3}$  :  $n=3$   $m=7$   $\Rightarrow F'(x) = \frac{3}{7x^{6/7}}$

2)  $g(x) = \sqrt[10]{(1-2x)^7}$  :  $m=10$   $n=7$   $u=1-2x \Rightarrow u'=-2$   $\Rightarrow g'(x) = \frac{7(-2)}{10x \sqrt[10]{(1-2x)^3}}$

3)  $h(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{x}}$       4)  $S(x) = \sqrt[4]{(5x-1)^2}$       5)  $P(x) = \sqrt[5]{3\sqrt{x}}$

(14, 15, 16, 17 قويم)



مشتق از هفت كوتاهى است :

$(\sin \alpha)' = \cos \alpha$

$(\cos \alpha)' = -\sin \alpha$

$(-\sin \alpha)' = -\cos \alpha$

$(-\cos \alpha)' = \sin \alpha$

$$\begin{cases} (\tan \alpha)' = 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \\ (\cot \alpha)' = -(1 + \cot^2 \alpha) = -\frac{1}{\sin^2 \alpha} = -\operatorname{cosec}^2 \alpha \end{cases}$$

مثق توابع زير را بركه فرمول‌هاى مشتق يابيد

1)  $F(x) = \sin 5x \Rightarrow F'(x) = 5 \cos 5x$   
 $u = 5x$   
 $u' = 5$

2)  $g(x) = \cos \sqrt{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin \sqrt{x}$   
 $u = \sqrt{x}$   
 $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3)  $h(m) = \tan(x^2) \Rightarrow h'(m) = 2m(1 + \tan^2(x^2))$   
 $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

4)  $g(m) = \cot(7m) \Rightarrow g'(m) = -7(1 + \cot^2(7m))$   
 $u = 7m \Rightarrow u' = 7$

5)  $P(m) = \sin\sqrt{m}$       6)  $q(m) = \sinh(\sin x)$

(Em. (22 تا 29) مشتق توابع اربابا بالقواعد؛ فرمول مشتق تابع مرکب.

1)  $F(m) = \sin^7 x \xrightarrow{\text{قانون توان}} \begin{cases} h = 7 \\ F'(m) = 7 \cos x \cdot \sin^6 x \end{cases}$   
 $\text{قانون مشتق تابع مرکب} : \begin{cases} h = 7 \\ u = \sin x \rightarrow u' = \cos x \end{cases} \rightarrow F'(m) = 7 \cos x \cdot \sin^6 x$

2)  $g(m) = 5 \cos^{10} x \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ h = 10 \end{cases}$   
 $g'(m) = 5(10 \sin x \cdot \cos^9 x) = -50 \sin x \cos^9 x$

3)  $h(m) = \tan^3 2x \rightarrow \begin{cases} h = 3 \\ u = 2x \rightarrow u' = 2 \end{cases} \Rightarrow h'(m) = 3 \times 2 \times (1 + \tan^2 2x) \cdot \tan^2 2x$

4)  $S(m) = -3 \sin^2 x$

5)  $P(m) = \cos^3 \sqrt{m}$

6)  $q(m) = 4 \tan^{10}(7m)$

7)  $T(m) = -5 \cot^3(100x)$

11  
 مشتق تابع زیر را بیابید (استوار = مشتق کسری و غیره)  
 (Em. (3, 3, 3, 2, 3, 3))

$$1) F(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + \sqrt{x}$$

$$F'(x) = (x^3)' - (4x^2)' + (3x)' + (\sqrt{x})'$$

$$F'(x) = 3x^2 - 8x + 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2) g(x) = x^5 - \cos x + 1$$

$$g'(x) = (x^5)' - (\cos x)' + (1)'$$

$$g'(x) = 5x^4 + \sin x + 0$$

$$3) h(x) = 3x - \sqrt{\sin x} + \tan^3 x$$

$$h'(x) = (3x)' - (\sqrt{\sin x})' + (\tan^3 x)'$$

$$h'(x) = 3 - \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} + 3(1 + \tan^2 x)(\tan x)$$

$$4) F(x) = x^2 \sin x$$

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$

$$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$$

$$F'(x) = u'v + v'u$$

$$\Rightarrow F'(x) = 2x \cdot \sin x + (\cos x)(x^2)$$

$$5) g(x) = \frac{x-3}{2x+1}$$

$$u = x-3 \rightarrow u' = 1$$

$$v = 2x+1 \rightarrow v' = 2$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$g'(x) = \frac{1(2x+1) - 2(x-3)}{(2x+1)^2} = \frac{7}{(2x+1)^2}$$

(Ex.A) مشتق توابع زیر را به کمک فرمول‌ها مشتق کنید.

1)  $F(x) = 3x - x^2 + \sqrt{5x}$

3)  $h(x) = (x-1)^3 + \sqrt{2-x}$

2)  $g(x) = \sqrt[3]{\sin x}$

4)  $S(x) = \sqrt[5]{\cot^2 x} + 1$

5)  $P(x) = \sqrt{2x} \cdot \cos x$

6)  $q(x) = x^3 \cdot \tan x$

7)  $R(x) = \frac{7-x}{2x}$

8)  $T(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}$

9)  $M(x) = \frac{x+7}{\sqrt{x}} + \cos x$

9)  $N(x) = \frac{\tan x}{\cos^3 x} + \sqrt{x} - 1$

(Ex.B)  $F(x) = x^2 - 3x + 1$  و  $g(x) = 1-x$  هستند مطلوب است محاسبه

$(g \circ g)'(x)$  (II)

$(F \circ g)'(x)$  (I)

(Ex.C) اگر  $y = 2x + \cos x$  باشد در رابطه زیر  $x$  را به دست آورید.

$y'' + y = y' + \sin x$

(Ex.D) اگر  $F(x) = \log^5 x - 4x$  باشد مقدار  $F'(-1)$  و  $F''(2)$  را به دست آورید.

تقدیر خودتون را در حاشیه‌ها بنویسید

(Ex.A) مشتق توابع زیر را با روش مشتق حساب کنید.

1)  $F(x) = 3x - x^2 + \sqrt{5x}$

3)  $h(x) = (x-1)^3 + \sqrt{2-x}$

2)  $g(x) = \sqrt[3]{\sin x}$

4)  $S(x) = \sqrt[5]{\cot^2 x} + 1$

5)  $P(x) = \sqrt{2x} \cdot \cos x$

6)  $q(x) = x^3 \cdot \tan x$

7)  $R(x) = \frac{7-x}{2x}$

8)  $T(x) = \frac{-\sin x}{\cos x}$

9)  $M(x) = \frac{x+7}{\sqrt{x}} + \cos x$

9)  $N(x) = \frac{\tan x}{\cos^3 x} + \sqrt{x} - 1$

(Ex.B)  $F(x) = x^2 - 3x + 1$  و  $g(x) = 1-x$  هستند مطلوب است محاسبه

$(g \circ g)'(x)$  (II)

$(F \circ g)'(x)$  (I)

(Ex.C) اگر  $y = 2x + \cos x$  باشد در رابطه زیر  $x$  را بیابید و درج کنید.

$y'' + y = y' + \sin x$

(Ex.D) اگر  $F(x) = \log^5 x - 4x$  باشد مقدار  $F'(2)$  را بیابید و درج کنید.

تقدیر خودتون را در حاشیه کن