

## بسمه تعالی

تاریخ امتحان: ۹۷/۱۰/۱۹	اداره آموزش و پرورش استان تهران	نام و نام خانوادگی:
مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	مدیریت آموزش و پرورش ناحیه ۶	نام درس: هندسه
تعداد سوالات: ۱۳	دبیرستان نخبگان علامه طباطبائی	رشته: ریاضی
تعداد صفحات: ۲		پایه تحصیلی: دوازدهم
نیاز به ماشین حساب دارد ○ ندارد ● نیاز به پاسخ نامه دارد ● ندارد ○		شماره کلاس:

بارم	شرح سوال
۲/۵	<p>۱- اگر <math>A = [a_{ij}]_{2 \times 2}</math> و <math>B = [b_{ij}]_{2 \times 2}</math> به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا <math>A</math> و <math>B</math> را با درایه هایشان نوشته و سپس <math>A \times B</math> را بدست آورید.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math display="block">a_{ij} \begin{cases} i^2 - 1 &amp; ; i=j \\ i - j &amp; ; i &gt; j \\ j - i &amp; ; i &lt; j \end{cases}</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math display="block">b_{ij} \begin{cases} i^2 + 1 &amp; ; i=j \\ i + j &amp; ; i &gt; j \\ i - j + 2 &amp; ; i &lt; j \end{cases}</math> </div> </div>
۱/۵	<p>۲- اگر <math>A = \begin{bmatrix} 4 &amp; a \\ b &amp; -2 \end{bmatrix}</math> و <math>B = \begin{bmatrix} 3 &amp; 2 \\ 1 &amp; -2 \end{bmatrix}</math> باشد، مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را طوری بدست آورید که حاصلضرب <math>A \times B</math> ماتریسی قطری باشد.</p>
۱/۵	<p>۳- اگر <math>A = \begin{bmatrix} 1 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> و <math>A^5 = kA</math> باشد، آن گاه مقدار عدد <math>k</math> را بدست آورید.</p>
۱	<p>۴- ثابت کنید وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.</p>
۱/۵	<p>۵- دستگاه زیر را با استفاده از روش ماتریس وارون حل نمائید.</p> $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$
۱	<p>۶- اگر <math>A = \begin{bmatrix} 2 &amp; 3 &amp; 4 \\ 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ -1 &amp; -2 &amp; 1 \end{bmatrix}</math> باشد، مقدار دترمینان را با استفاده از روش ساروس بدست آورید.</p>
۱	<p>۷- اگر <math>A</math> ماتریس <math>3 \times 3</math> باشد، و <math> A  = 2</math> باشد، در این صورت حاصل <math>  A A </math> چقدر است؟</p>
۲	<p>۸- نقاط <math>A</math> و <math>B</math> و <math>C</math> در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از <math>A</math> و <math>B</math> به یک فاصله و از <math>C</math> به فاصله ۳ سانتی متر باشد. (بحث کنید)</p>

- ۹- اگر صفحه‌ی P یک سطح استوانه‌ای را قطع نماید. در حالت‌های مختلف درباره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید. (چهار حالت)
- ۱۰- به هر یک از سوالات زیر پاسخ دهید.
- الف) اگر صفحه‌ی P با مولد سطح مخروطی موازی بوده و از راس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی چیست؟
- ب) مکان هندسی مرکز همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس اند را بیابید.
- ۱۱- خطوط  $x + y = 1$  و  $x - y = 3$  شامل قطرهایی از یک دایره هستند و خط  $4x + 3y = 6$  بر این دایره مماس است. معادله‌ی ضمنی دایره را بدست آورید.
- ۱۲- وضعیت دو دایره‌ی زیر نسبت به هم چگونه است؟
- ۲  $C_1: x^2 + y^2 = 1$
- $C_2: x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$
- ۱۳- در نقطه‌ی  $A=(2,3)$  روی دایره‌ی  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$  مماس بر آن رسم کرده‌ایم. معادله‌ی این خط مماس را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1/5) \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (1/5) \quad -1$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 11 & 16 & 15 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & a \\ b & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+a & \lambda-2a \\ 3b-2 & 2b+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda-2a=0 \Rightarrow a=2 \\ 3b-2=0 \Rightarrow b=2/3 \end{cases} \quad (1/5) \quad -2$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3A \Rightarrow A^2 = 9A^2 = 9(3A) = 27A \Rightarrow A^2 = 27A^2 = 81A \Rightarrow k=81 \quad (1/5) \quad -3$$

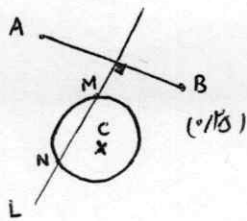
4- اگر B و C وارون A باشند آنگاه داریم:  $AB=BA=I$  ,  $AC=CA=I$  (1/5)  
 $B = B \times I = B(AC) = (BA)C = IC = C \Rightarrow B=C \Rightarrow$  وارون A منحصر به نرد است. (1/5)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad (1/5) \quad , \quad x = A^{-1}B \quad -5$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/13 & 5/13 \\ -2/13 & 3/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{29}{13} \quad , \quad y = \frac{26}{13} \quad (1/5)$$

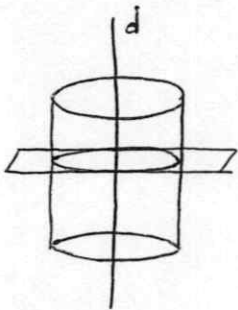
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (4-9-8) - (3-12-8) = -13+17=4 \Rightarrow |A|=4 \quad (1/5) \quad -6$$

$$|2A| = 2^3 |A| = 8 \times 4 = 32 \quad (1) \quad -7$$

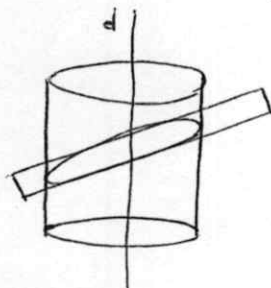


8- نقطه‌ای که از A و B به یک فاصله باشد روی عمود منصف پاره خط AB یعنی خط L قرار دارد. از طرفی نقطه‌ای که از C به فاصله‌ی 3r سانی‌تر باشد روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع 3r سانی‌تر قرار دارد. تقاطع کلیه خط L و دایره مذکور جواب مسئله اند. (تقاطع M و N) (1)

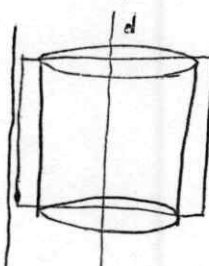
- بحث: 1- اگر خط L و دایره همدگر را در دو نقطه متقابل قطع کنند دو جواب دارد. (1/5)  
 2- اگر خط L و دایره برهم مناس باشند، مسئله فقط یک جواب دارد. (1/5)  
 3- اگر خط L دایره را قطع نکند مسئله جوابی ندارد. (1/5)



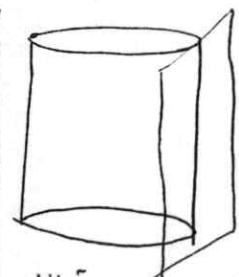
حالت 1: اگر صفحه عمود بر محور d باشد، در این صورت دایره پدید می‌آید. (1/5)



حالت 2: اگر صفحه عمود بر محور d نبوده و موازی با آن هم نباشد در این صورت منحنی بیضی پدید می‌آید. (1/5)

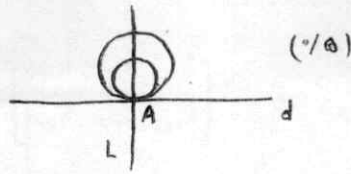


حالت 3: اگر صفحه موازی محور d سطح استوانه‌ای را قطع نماید، دو خط موازی پدید می‌آید. (1/5)



حالت 4: اگر صفحه بر سطح استوانه‌ای مناس باشد یک خط بیضی پدید می‌آید. (1/5)

دایره‌ای که در نقطه A بر خط L مماس اند، مطابق شکل مرکز آنجا بر روی خطی عمود بر خط L که بر خط L در نقطه A عمود می‌باشد قرار دارند.



۱۰- الف) صحیح (۰/۵) ب) (۰/۵)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=2, y=-1 \Rightarrow O=(2,-1) \Rightarrow OH = \frac{|4x+3y-6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5} = R \quad (۰/۵) \quad -11$$

$$\text{معادله دایره: } (x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 - \frac{1}{25} = 0 \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{معادله دایره: } x^2 + y^2 - 4x + 2y + \frac{124}{25} = 0 \quad (۰/۵)$$

$$O_1 = (0,0), R_1 = 1 \quad (۰/۵), \quad O_2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2}\right), R_2 = \sqrt{\frac{12+12-20}{2}} = 1 \quad (۰/۵) \quad -12$$

$$O_1, O_2 = d = \sqrt{\frac{16}{2} + \frac{16}{2}} = \sqrt{16} = 4 \quad (۰/۵)$$

$$d = R_1 + R_2 \Rightarrow \text{دو دایره مماس خارجیه} \quad (۰/۲۵)$$

$$O = (1,1) \quad (۰/۲۵), \quad m_{OA} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{2-1} = 1 \quad (۰/۲۵) \quad -13$$

$$m_L = \frac{-1}{m_{OA}} = \frac{-1}{1} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \text{معادله خط } L: y-1 = -1(x-1) \quad (۰/۲۵)$$