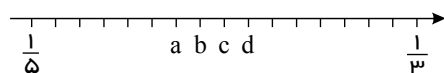


۱. کسرهای $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ روی محور اعداد نشان داده شده‌اند کدام حرف نمایشگر کسر $\frac{1}{4}$ است؟ (کانگورو - ۱۳۸۸)



(۲) b

(۱) a

(۴) d

(۳) c

۲. اگر $D = \{x \in R \mid -3 \leq x < 9\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟ (نمونه دولتی اصفهان، کهگیلویه و بویراحمد، ۹۶ - ۹۵)

(۱) عددی که هم گویا و هم گنگ باشد در D قرار دارد.

(۲) عدد $3 + \sqrt{-27}$ به مجموعه D تعلق دارد.

(۳) مجموعه‌ی D با مجموعه‌ی $\{x \in Z \mid -3 \leq x < 9\}$ مساوی است.

(۴) $(\sqrt{19} + \frac{11}{3}) \in D$

۳. عبارت $\frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|}$ به ازای عددهای حقیقی و ناصفر a و b چند مقدار متمایز دارد؟ (کانگورو - ۱۳۸۰)

(۴) ۲

(۳) ۳

(۲) ۴

(۱) ۵

۴. اگر $x < 0$ آنگاه حاصل $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2}$ کدام است؟ (نمونه دولتی مازندران ۹۶-۹۵)

(۴) $-x + 1$

(۳) $-x - 1$

(۲) $x - 1$

(۱) $x + 1$

۵. اگر $x^2 < x$ و $\sqrt{y^2} = -y$ باشد، در این صورت کدام یک همواره درست است؟

(۴) $xy < 0$

(۳) $xy \leq y$

(۲) $xy > 0$

(۱) $\frac{1}{x} < 1$

۶. به جای * در $1 * 1$ حداقل چند صفر بگذاریم که عدد بدست آمده از $\frac{2009}{2008}$ کمتر باشد؟ (کانگورو - ۱۳۸۸)

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۷. اگر a اصم و b عددی گویا باشد، کدام گزینه ممکن است گنگ نباشد؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - قم ۹۳ - ۹۲)

(۴) $a + b$

(۳) ab

(۲) $a - b$

(۱) $\frac{1}{a}$

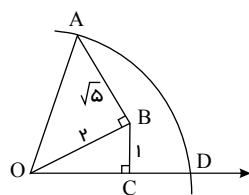
۸. باتوجه به شکل، اندازه‌ی CD کدام گزینه است؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - کردستان ۹۳ - ۹۲)

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) ۳

(۴) $3 - \sqrt{3}$

(۳) $3 + \sqrt{3}$



۹. حاصل $\sqrt{0,111\dots}$ کدام است؟ (المپیاد بلژیک و فرانسه و هلند مرحله دوم ۱۳۸۰)

(۴) $0,444\dots$

(۳) $0,333\dots$

(۲) $0,222\dots$

(۱) $0,111\dots$

۱۰. اگر طول و عرض مستطیلی اعداد گنگ باشند، کدام گزینه همواره عددی گنگ است؟

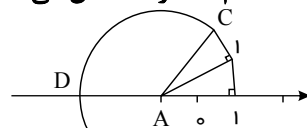
(۴) هیچ کدام

(۳) قطر مستطیل

(۲) مساحت مستطیل

(۱) محیط مستطیل

۱۱. در شکل مقابل به مرکز A و شعاع AC کمان زده‌ایم تا محور را در نقطه‌ی D قطع کند، نقطه‌ی D کدام عدد را مشخص می‌کند؟ (تیزهوشان و نمونه دولتی - بوشهر ۹۳ - ۹۲)



(۲) $-1 - \sqrt{6}$

(۱) $-2 - \sqrt{6}$

(۴) $-1 + \sqrt{6}$

(۳) $-\sqrt{6}$

۱۲. چند تا از موارد زیر لزوماً عددی گنگ است؟

(a) $0,1020030004$

(b) ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع گویا

(c) قطر مربعی به ضلع گویا

(d) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1396} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1396}$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳. اگر $\sqrt{a^2 + 3} + a = 4$ باشد، حاصل $\sqrt{a^2 + 3} - 2a$ چیست؟

(۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۴. اگر $A = \{a, \overline{aa}, \overline{aaa}, \overline{aaaa}, \dots\}$ به نحوی که در آن $\{a \in N | a < 10\}$ باشد، مجموعه A با همین فرض ارقام a است و الی آخر.

(۱) $\{a(10^n - 1) | n \in N\}$
 (۲) $\{a(10^n + 1) | n \in N\}$
 (۳) $\left\{a\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) | n \in N\right\}$
 (۴) $\left\{a\left(\frac{10^n + 1}{9}\right) | n \in N\right\}$

۱۵. اگر روی محور اعداد، تمامی نقاطی که اعداد گنگ بین $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{3}$ را نمایش می‌دهند رنگ کنیم، چه تعداد از جملات زیر صحیح است؟

(الف) نقاط رنگ شده، یک پاره‌خط به وجود می‌آورند.

(ب) تعداد نقاط رنگ شده، بی‌شمار است.

(ج) تعداد نقاطی که رنگ نشده‌اند، بی‌شمار است.

(د) تمام نقاطی که اعدادی با بی‌شمار رقم اعشاری را نمایش می‌دهند، رنگ شده‌اند.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۶. به ازای چند مقدار طبیعی n حاصل $\frac{\sqrt{5-n}}{n^2 - 3n + 2}$ عدد حقیقی است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱. گزینه ۱ بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ به ۱۶ قسمت تقسیم شده است. از سوی دیگر فاصله‌ی بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ برابر است با: $\frac{2}{15}$. بنابراین

طول هر قسمت $\frac{1}{120} = \frac{1}{16} \times \frac{2}{15}$ است. نخست پیدا می‌کنیم پس از طی چند قسمت از $\frac{1}{5}$ به $\frac{1}{4}$ می‌رسیم:

$$\frac{1}{5} + n \times \frac{1}{120} = \frac{1}{4}, \quad n = 6$$

از روی شکل داریم پس از طی ۶ قسمت به a می‌رسیم.

۲. گزینه ۴ با توجه به اینکه عددی نداریم که هم گویا باشد هم گنگ پس گزینه‌ی ۱ غلط است.

حاصل $-27 + \sqrt[3]{-27} = -3 + \sqrt[3]{-27} = -3 - 3 = -6$ برابر با -6 است که عضو مجموعه‌ی D نیست.

مجموعه‌ی گزینه‌ی ۳ با D برابر نیست؛ چون تعداد اعضای D بی‌نهایت است ($x \in R$) اما این مجموعه کراندار است و تعداد مشخصی دارد ($x \in Z$).

پس گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است؛ چون مقدار تقریبی $\frac{11}{3} + \sqrt{19}$ برابر با 7.6 است که عضو مجموعه‌ی D می‌باشد.

۳. گزینه ۳ اگر $x \neq 0$ مقدار $\frac{x}{|x|}$ برابر ± 1 است، پس همه‌ی مقدارهای ممکن $\frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|}$ عبارت‌اند از:

$$-1 - 1 = -2, \quad 1 + (-1) = 0, \quad -1 + 1 = 0, \quad 1 + 1 = 2$$

پس ۳ جواب ممکن داریم: ۲، ۰ و -۲

۴. گزینه ۴ چون x عددی منفی است پس:

$$\sqrt{x^2 + 1 + \underbrace{|2x|}_{\text{منفی}}} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = -x + 1$$

۵. گزینه ۴ می‌دانیم هرگاه عددی از مجذورش بزرگتر باشد مثبت و کوچکتر از یک است.

طبق فرض دوم سؤال y عددی منفی است (چون $\sqrt{y^2} = |y| = -y$) پس حاصلضرب x در y عددی منفی است.

۶. گزینه ۳

$$1,7 * 1 < \frac{2009}{2008} \Rightarrow$$

$$1 + 0,7 * 1 < 1 + \frac{1}{2008} \Rightarrow 0,7 * 1 < \frac{1}{2008}$$

$$\Rightarrow 0,7 \underbrace{000}_{\text{صفر ۳}} 1 < \frac{1}{2008}$$

باید به جای $* 3$ صفر قرار دهیم.

۷. گزینه ۳ اگر a را برابر $\sqrt{2}$ و b را صفر قرار دهیم، داریم: $0 = \sqrt{2} \times 0 = ab$ که عددی گنگ نیست.

۸. گزینه ۴

$$OC^2 = OB^2 - BC^2 \rightarrow OC^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow OC = \sqrt{3}$$

$$OA^2 = AB^2 + OB^2 \rightarrow OA^2 = 2^2 + \sqrt{5}^2 = 4 + 5 = 9 \rightarrow OA = \sqrt{9} = 3 \rightarrow OA = OD = 3$$

$$CD = OD - OC = 3 - \sqrt{3}$$

۹. گزینه ۳

$$x = 0,1 \quad \overline{\quad}$$

$$\overline{-10x = 1,1}$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{0,1} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = 0,333$$

۱۰. گزینه ۴ با مثال نقض (یعنی مثال‌هایی که نشان دهند یک جمله نادرست است) گزینه‌های ۱ تا ۳ را رد می‌کنیم:
 مثال نقض گزینه ۱: طول $5 - \sqrt{2}$ و عرض $\sqrt{2}$ ؛ در این صورت:
 $= 2(5 - \sqrt{2} + \sqrt{2}) = 10 \notin Q'$ محیط

مثال نقض گزینه ۲: طول $2\sqrt{2}$ و عرض $\sqrt{2}$ ؛ در این صورت:
 $\text{مساحت} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \notin Q'$
 مثال نقض گزینه ۳: طول $\sqrt{6}$ و عرض $\sqrt{3}$ ؛ در این صورت:
 $= \sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{3+6} = 3 \notin Q'$

قطر

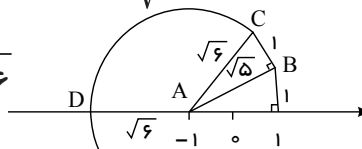
پس گزینه ۴ درست است.

۱۱. گزینه ۲

$$AB^2 = 2^2 + 1^2 \rightarrow AB^2 = 4 + 1 = 5 \rightarrow AB = \sqrt{5}$$

$$AC^2 = 1^2 + (\sqrt{5})^2 \rightarrow AC^2 = 1 + 5 = 6 \rightarrow AC = \sqrt{6}$$

$$AC = AD = \sqrt{6} \text{ شعاع‌ها برابرند } D = -1 - \sqrt{6}$$



۱۲. گزینه ۱ عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم.

(a) عدد $0,10203004$ عددی گویا است.

(b) برای رد این عبارت از مثال نقض استفاده می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۶ و ۸ رسم می‌کنیم. با استفاده از رابطه فیثاغورس، وتر این مثلث را به دست می‌آوریم.

$$6^2 + 8^2 = x^2 \Rightarrow 36 + 64 = x^2$$

$$\Rightarrow 100 = x^2$$

$$\Rightarrow x = 10$$

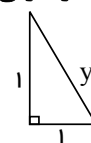
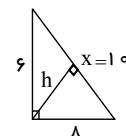
حال ارتفاع وارد بر وتر را رسم می‌کنیم. باتوجه به مساحت مثلث، می‌توانیم مقدار h (ارتفاع وارد بر وتر) را به دست آوریم که عددی گویا است.

$$\frac{6 \times 8}{2} = \frac{10 \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{48}{2} = 5h \Rightarrow 48 = 10h \Rightarrow h = 4,8$$

اما از طرفی ممکن است ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای، گنگ باشد. مثل:

$$1^2 + 1^2 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

$$\frac{1 \times 1}{2} = \frac{\sqrt{2} \times h}{2} \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

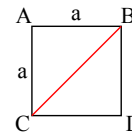
(c) اگر a عددی گویا باشد، در مثلث ABC با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 + AC^2 = CB^2$$

$$\rightarrow a^2 + a^2 = CB^2$$

$$\rightarrow 2a^2 = CB^2$$

$$\rightarrow CB = \sqrt{2}a$$



طول قطر مربع برابر با $\sqrt{2}a$ است چون a عددی گویا است پس $\sqrt{2}a$ عددی گنگ است. (اما در حالت کلی گنگ نیست.)
(d) با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1396} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1396} =$$

$$((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2)^{1396} = (3 - 2)^{1396} = 1$$

که عددی گویا است.

۱۳. گزینه ۳ به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{a^2 + 3} + a = 4 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 3} = 4 - a$$

$$(\sqrt{a^2 + 3})^2 = (4 - a)^2 \Rightarrow \sqrt{(a^2 + 3)^2} = (4 - a)^2$$

$a^2 + 3$ همواره مثبت است:

$$\Rightarrow |a^2 + 3| = 16 - 8a + a^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 3 = 16 - 8a + a^2 \Rightarrow 8a = 13 \Rightarrow a = \frac{13}{8}$$

از طرفی:

$$2\sqrt{a^2 + 3} - 2a, \quad \underline{\underline{\sqrt{a^2 + 3} = 4 - a}} \Rightarrow 2(4 - a) - 2a$$

$$= 8 - 2a - 2a$$

$$= 8 - 4a$$

$$= 8 - 4 \times \frac{13}{8} = 8 - \frac{13}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۴. گزینه ۳ با جایگذاری اعداد طبیعی به جای متغیر n ، هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»:

$$9, 99, 999, 9999, \dots \Rightarrow A = \{9a, 99a, 999a, \dots\}$$

گزینه «۲»:

$$11, 101, 1001, 10001, \dots \Rightarrow A = \{\overline{aa}, \overline{a0a}, \overline{a00a}, \dots\}$$

گزینه «۳»:

$$1, 11, 111, 1111, \dots \Rightarrow A = \{\overline{a}, \overline{aa}, \overline{aaa}, \overline{aaaa}, \dots\}$$

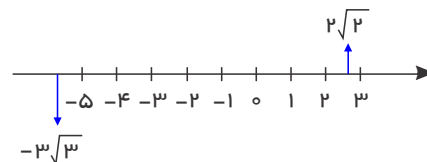
گزینه «۴»:

$$\frac{11}{9}, \frac{101}{9}, \frac{1001}{9}, \frac{10001}{9}, \dots \Rightarrow A = \left\{ \frac{\overline{aa}}{9}, \frac{\overline{a0a}}{9}, \frac{\overline{a00a}}{9}, \dots \right\}$$

۱۵. گزینه ۲ ابتدا محل تقریبی قرار گرفتن دو عدد $2\sqrt{2}$ و $-3\sqrt{3}$ را مشخص می‌کنیم.

$$2\sqrt{2} \simeq 2 \times 1,4 = 2,8$$

$$-3\sqrt{3} \simeq 3 \times (-1,7) = -5,1$$



بررسی جمله‌ها:

(الف) نادرست است. چون نقاط رنگ شده تشکیل یک پاره‌خط نمی‌دهند، چون اعداد گویا مابین آن‌ها رنگ نشده است.

(ب) درست است. تعداد اعداد گنگ بین $2\sqrt{2}$ و $-3\sqrt{3}$ بی‌شمار است.

(ج) درست است. تعداد اعداد گویا بین دو عدد متمایز بی‌شمار است.

(د) نادرست است. چون اعداد اعشاری نامختوم جزء اعداد گویا هستند و دارای بی‌شمار رقم اعشاری هستند ولی گنگ نیستند.

۱۶. گزینه ۳ نکته: اعداد منفی نمی‌توانند زیر رادیکال با فرجه زوج قرار بگیرند.

پس در این سؤال: $0 \leq 5 - n$ لذا: $n \leq 5$

در نتیجه: $n = 1, 2, 3, 4, 5$

همچنین ریشه‌های مخرج را نیز باید کم کنیم:

ریشه‌های مخرج ۱ و ۲:

$$n^2 - 3n + 2 = 0 \Rightarrow (n - 1)(n - 2) = 0$$

پس n فقط می‌تواند مقدارهای ۵ و ۴ و ۳ را داشته باشد تا حاصل یک عدد حقیقی باشد.