

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

ریاضی و آمار (۱) پایه دهم - علوم انسانی و معارف

فصل ۲

معادله و مسائل توصیفی

درس ۱

حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس ۲

معادله های شامل عبارت های گویا

درس ۳

کانال ریاضیات دوره دوم متوسطه



@MATHCLASS2

تهیه و تنظیم : مجید قادری
دبیر ناحیه ۲ بندرعباس
۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

درس ۲

حل معادله درجه ۲ و کاربردها

در این درس با روش های حل معادله درجه ۲ آشنا می شویم و یاد می گیریم چگونه از آنها استفاده کنیم .

**در ضمن این درس اهمیت فوق العاده ای دارد
و از دروس پایه و مورد نیاز است .**



یادآوری

هر معادله که پس از ساده شدن، بزرگ ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادله درجه دوم می نامیم.

فرم کلی معادلات درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و a همواره مخالف صفر است .

روش های حل معادله درجه دوم

- **حل معادله درجه دوم به روش تجزیه**
 - **حل معادله درجه دوم به کمک ریشه گیری**
 - **حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل**
 - **حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی (دلتا)**
 - **حل معادله درجه دوم به روش هندسی (ریاضی رشته های فنی)**
- نکته :** معادلات درجه دوم حداکثر می توانند دو جواب حقیقی داشته باشند .

حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

می دانیم که تجزیه یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله اعمال به کار رفته در تجزیه معادلات درجه دوم می توان به موارد زیر اشاره نمود :

(۱) فاکتورگیری:

$$ax^2 + bx = x(ax + b)$$

(۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج:

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

(۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(a + b)$$

سوال ۱: معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را به روش تجزیه حل کنید.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



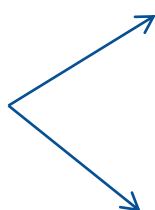
یادآوری:

اگر $a \times b = 0$ باشد

نتیجه می گیریم:

$b = 0$ یا $a = 0$

سوال ۲: ریشه های معادله $x^2 - 7x + 10 = 0$ را بدست آورید.

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 2) = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

سوال ۳: ریشه های معادله $x^3 - x = 0$ را بدست آورید.

$$x^3 - x = 0 \xrightarrow{\text{از } x \text{ فاکتور می گیریم}} x(x^2 - 1) = 0.$$

$$x(x - 1)(x + 1) = 0 \begin{cases} \rightarrow x - 1 = 0 \implies x = 1 \\ \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow x + 1 = 0 \implies x = -1 \end{cases}$$

سوال ۴: اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

$$\text{اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است} \longrightarrow y = x + 4$$

$$(x + 4)(y + 4) = 60 \xrightarrow{y = x + 4} (x + 4)(x + 8) = 60$$

$$x^2 + 12x + 32 = 60 \Rightarrow x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$(x + 14)(x - 2) = 0 \begin{cases} \text{غ ق ق} & x + 14 = 0 \Rightarrow x = -14 \\ \text{ق ق} & x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$y = x + 4 \xrightarrow{x = 2} y = 2 + 4 = 6$$

حل معادله درجه دوم به کمک ریشه گیری

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه های معادله درجه دوم

$$x^2 = a \text{ عبارتند از } x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a}$$

سوال ۵: معادله $(a - 2)^2 = 16$ را حل کنید.

$$(a - 2)^2 = 16 \Rightarrow a - 2 = \pm 4 \begin{cases} a - 2 = 4 \Rightarrow a = 6 \\ a - 2 = -4 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

	x	$\frac{a}{2}$
x	x^2	$\frac{ax}{2}$
$\frac{a}{2}$	$\frac{ax}{2}$?

با توجه به شکل مقابل جای خالی را تکمیل کنید .
مساحت ناحیه ای مورد سوال ؛ برابر $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ است .

در این شکل؛ مساحت مربع بزرگ برابر با مجموع چهار ناحیه درونی آن است .

اکنون می توانیم با تکمیل تساوی زیر، اتحاد مربع ایجاد کنیم .

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

سوال ۶: معادله $x^2 + 5x - 14 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

عدد ثابت را به سمت دیگر معادله انتقال می دهیم

$$x^2 + 5x = 14$$

مضرب x را نصف میکنیم و مجذور آن را به طرفین معادله اضافه می کنیم

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 14 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

عبارت سمت چپ اتحاد مربع است و سمت راست معادله، یک مقدار عددی داریم

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = 14 + \frac{25}{4} = \frac{81}{4}$$

از طرفین معادله جذر می گیریم

$$x + \frac{5}{2} = \pm \frac{9}{2}$$

$$x = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{14}{2} = -7$$

سوال ۷ : معادله $n^2 - 4n + 5 = 0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

عدد ثابت را به سمت دیگر معادله انتقال می دهیم

$$n^2 - 4n = -5$$

مضرب x را نصف میکنیم و مجدور آن را به طرفین معادله اضافه می کنیم

$$n^2 - 4n + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -5 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

عبارت سمت چپ اتحاد مربع است و سمت راست معادله ، یک مقدار عددی داریم

$$(n - 2)^2 = -5 + 4 = -1$$

از طرفین معادله جذر می گیریم

سمت راست معادله جذر ندارد در نتیجه معادله جواب ندارد

سوال ۸: معادله $۲x^۲ + x - ۲ = ۰$ را به روش مربع کامل حل کنید.

ابتدا معادله را باید به مضرب $x^۲$ تقسیم کنیم که در این سوال عدد ۲ است $x^۲ + \frac{1}{۲}x - ۱ = ۰$

عدد ثابت را به سمت دیگر معادله انتقال می دهیم $x^۲ + \frac{1}{۲}x = ۱$

مضرب x را نصف میکنیم و مجدور آن را به طرفین معادله اضافه می کنیم

$$x^۲ + \frac{1}{۲}x + \left(\frac{1}{۴}\right)^۲ = ۱ + \left(\frac{1}{۴}\right)^۲$$

عبارت سمت چپ اتحاد مربع است و سمت راست معادله، یک مقدار عددی داریم

$$\left(x + \frac{1}{۴}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱۷}{۱۶}$$

از طرفین معادله جذر می گیریم

$$x + \frac{1}{۴} = \pm \frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$$

$$x = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4} = -\frac{1 + \sqrt{17}}{4}$$

آیا با روش مربع کامل می توان هر معادله درجه دومی را حل کرد؟

بله. برای حل معادله $ax^2 + bx + c = 0$ با این روش مراحل زیر را انجام می دهیم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می کنیم $\rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه کرده ایم $\rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$

به دو طرف معادله، $(\frac{b}{2a})^2$ را اضافه کرده ایم تا سمت چپ مربع کامل شود $\rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$

دو طرف را ساده کرده ایم $\rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

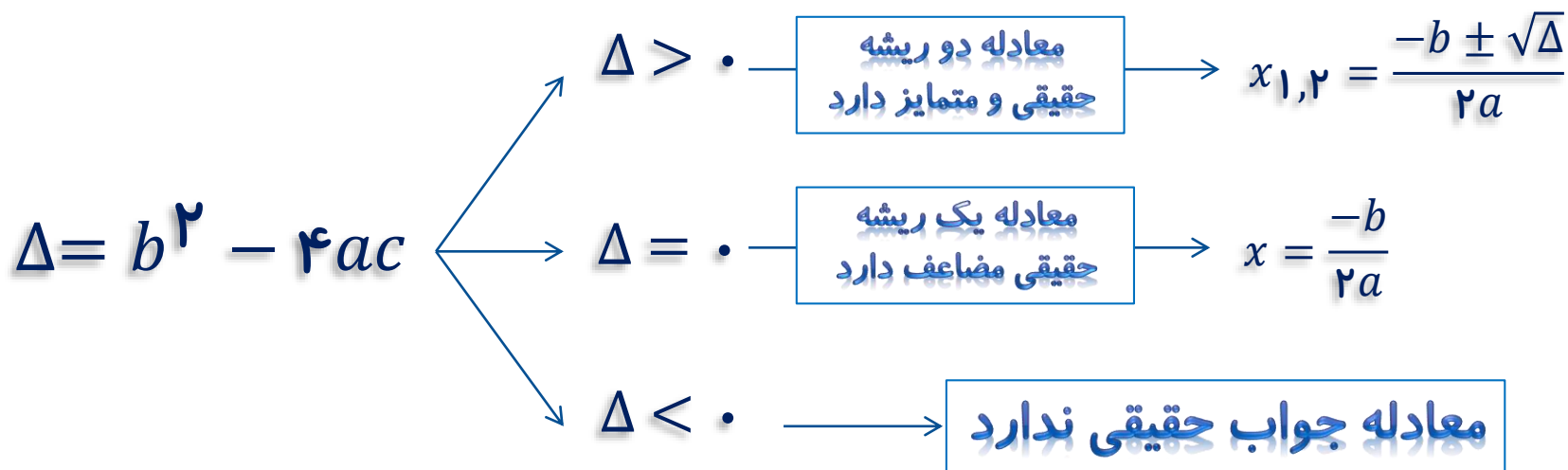
در نهایت از طرفین جذر می گیریم $\rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

فرمول کلی (دلتا) نتیجه روش مربع کامل است.

نتیجه

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$



در یک معادله درجه ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم، معادله ریشه مضاعف دارد.

سوال ۹: معادله $x^2 - 3x + 3 = 0$ را به روش کلی حل کنید.

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3$$

معادله جواب حقیقی ندارد $\rightarrow \Delta < 0$

سوال ۱۰: معادله $r^2 + 4r = -4$ را به روش کلی حل کنید.

$$r^2 + 4r = -4 \Rightarrow r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = 4$$

$$c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$$

$$\Delta = 0 \longrightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$$

سوال ۱۱: معادله $۲x^۲ + ۵x - ۳ = ۰$ را به روش کلی حل کنید.

$$a = ۲$$

$$b = ۵$$

$$c = -۳$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac$$

$$\Delta = (۵)^۲ - ۴(۲)(-۳) = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹$$

$$\Delta > ۰ \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۵ - \sqrt{۴۹}}{۴} = \frac{-۱۲}{۴} = -۳ \\ x_۲ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۵ + \sqrt{۴۹}}{۴} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

سوال ۱۲: برای چه مقدار از n معادله $x^2 + (n + 2)x + 2n = 0$ ریشه مضاعف دارد؟

$$a = 1$$

$$b = n + 2$$

$$c = 2n$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

$$\Delta = (n + 2)^2 - 4(1)(2n) = 0$$

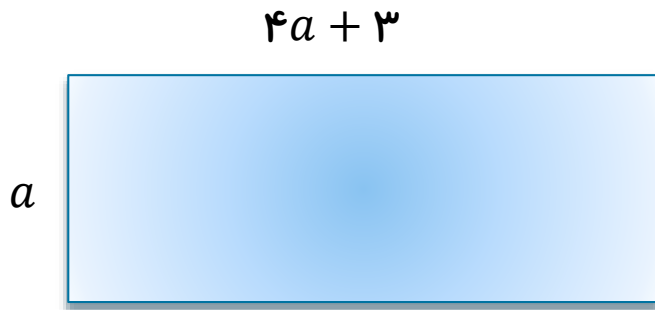
$$n^2 + 4n + 4 - 8n = 0$$

-4n

$$\Rightarrow n^2 - 4n + 4 = 0$$

$$(n - 2)^2 = 0 \Rightarrow n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$$

سوال ۱۳: طول یک مستطیل ۳ سانتی متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.



$$a(4a + 3) = 45$$

$$4a^2 + 3a = 45$$

$$4a^2 + 3a - 45 = 0$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(4)(-45) = 9 + 720 = 729$$

$$a_1 = \frac{-3 - \sqrt{729}}{8} = \frac{-30}{8} \quad \text{غ ق ق}$$

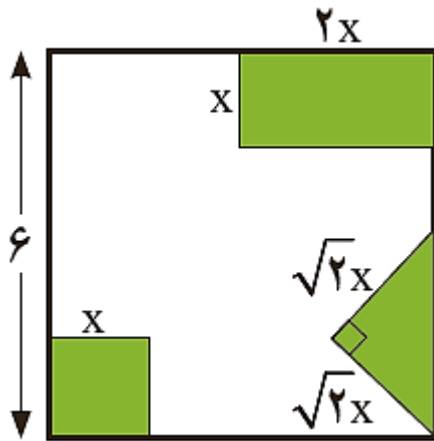
$$a_2 = \frac{-3 + \sqrt{729}}{8} = \frac{24}{8} = 3 \quad \text{ق ق}$$

$$\text{طول مستطیل} = 4a + 3 \xrightarrow{a=3} \text{طول مستطیل} = 4(3) + 3 = 15$$

سوال ۱۴: از مربعی به ضلع ۶ سانتی متر سه شکل رو به رو بریده شده است. مساحت باقی مانده ۲۴ سانتی

متر مربع است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟

(تمرین ۲ صفحه ۳۷ کتاب درسی)



$$x^2 = \text{مساحت مربع سبز}$$

$$2x^2 = \text{مساحت مستطیل سبز} = x(2x)$$

$$x^2 = \text{مساحت مثلث سبز} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x) \Rightarrow \frac{1}{2}(2x^2) = x^2$$

$$4x^2 = \text{مساحت هر سه شکل}$$

$$36 - 4x^2 = \text{مساحت باقیمانده} = 24$$

$$4x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{3} \quad \text{ق ق}$$

$$x = -\sqrt{3} \quad \text{غ ق ق}$$

سوال ۱۵: مقدار n را طوری بیابید که $x = 2$ یک جواب معادله $x^2 + nx + 2 = 0$ باشد، سپس جواب دیگر این معادله را بیابید.

$$x^2 + nx + 2 = 0 \xrightarrow{x=2} \cancel{x^2} + 2n + 2 = 0 \Rightarrow 2n + 6 = 0 \Rightarrow 2n = -6$$

$$\Rightarrow n = -3$$

$$x^2 + nx + 2 = 0 \xrightarrow{n=-3} x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0 \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

نیشتر بدانیم

- اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ضرایب a و c برابر b باشد، آنگاه یکی از جوابها برابر $x = -1$ و جواب دیگر برابر $x = -\frac{c}{a}$ می باشد.

سوال ۱۶: بدون حل معادله، ریشه های معادله زیر را بدست آورید.

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2} = 0$$

$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$

$$x = -1$$

$$x = -\frac{c}{a} = -\frac{5/2}{1/2} = -5$$

بیشتر بدانیم

- اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ضرایب a و c و b برابر صفر باشد، آنگاه یکی از جوابها برابر $x = 1$ و جواب دیگر برابر $x = \frac{c}{a}$ می باشد.

سوال ۱۷: بدون حل معادله، ریشه های معادله زیر را بدست آورید.

$$5x^2 + x - 6 = 0 \quad \xrightarrow{5 + 1 + (-6) = 0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{-6}{5} \end{cases}$$

نیشتر بدانیم

- اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ حاصل $\frac{c}{a}$ برابر صفر باشد؛ ، آنگاه یکی از جوابها برابر $x = 0$ و جواب دیگر برابر $x = \frac{-b}{a}$ می باشد .

سوال ۱۸: بدون حل معادله ، ریشه های معادله زیر را بدست آورید .

$$5x^2 + 3\sqrt{2}x = 0 \quad \frac{c}{a} = \frac{0}{5} = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{-b}{a} = \frac{-3\sqrt{2}}{5}$$

بیشتر بدانیم

• اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ علامت $\frac{c}{a}$ منفی باشد؛ معادله دارای دو جواب حقیقی متمایز است.

سوال ۱۹: معادله زیر چند ریشه دارد؟

$$2x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{6} = 0$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{6}}{2} < 0 \longrightarrow \text{دو ریشه حقیقی متمایز دارد.}$$

رابطه بین ریشه های یک معادله درجه ۲

نیست بدانیم

اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند،

بدون حل معادله می توان گفت:

مجموع ریشه ها

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

حاصلضرب ریشه ها

$$P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

تفاضل ریشه ها

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

طریقه نوشتن یک معادله وقتی ریشه های آن معلوم باشد به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

سوال ۲۰: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\alpha = -۴$ و $\beta = -۲$ باشد.

$$S = \alpha + \beta = -۲ + (-۴) = -۶$$

$$P = \alpha \times \beta = (-۲)(-۴) = ۸$$

$$x^2 - Sx + P = \cdot \xrightarrow[\begin{matrix} S = -۶ \\ P = ۸ \end{matrix}]{\quad} x^2 + ۶x + ۸ = \cdot$$

سوال ۲۱: بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب و تفاضل ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 + 3x - 7 = 0$

را بدست آورید.

$$a = 4$$

$$b = 3$$

$$c = -7$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(4)(-7) = 9 + 112 = 121$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{4}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-7}{4}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{121}}{4} = \frac{11}{4}$$

چند نکته

- اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$
- ❖ $b = 0$ آنگاه معادله دو ریشه قرینه هم دارد.
- ❖ $a = c$ آنگاه معادله دو ریشه معکوس هم دارد.
- ❖ $a = -c$ آنگاه معادله دو ریشه قرینه و معکوس هم دارد.
- ❖ $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$ یک ریشه معادله k برابر دیگری است.

سوال ۲۲: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\alpha = -۴$ و $\beta = -۲$ باشد.

$$S = \alpha + \beta = -۲ + (-۴) = -۶$$

$$P = \alpha \times \beta = (-۲)(-۴) = ۸$$

$$x^2 - Sx + P = \cdot \xrightarrow[\begin{matrix} S = -۶ \\ P = ۸ \end{matrix}]{\quad} x^2 + ۶x + ۸ = \cdot$$

بیشتر بدانیم

معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید:

برای یافتن معادله ای که دارای ریشه هایی قرینه با ریشه های معادله فوق باشد کافی است



$bx^2 - bx + c = 0$ را قرینه کنیم.

برای یافتن معادله ای که دارای ریشه هایی معکوس با ریشه های معادله فوق باشد کافی



است جای a و c را تغییر دهیم.

$$cx^2 + bx + a = 0$$

برای یافتن معادله ای که دارای ریشه هایی برابر k با ریشه های معادله فوق باشد کافی



است b را k برابر کرده و c را در مجذور k ضرب کنیم.

$$ax^2 + b k x + c k^2 = 0$$

بیشتر بدانیم

معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید:

برای یافتن معادله ای که ریشه هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله فوق باشد کافی



است x را به $x - k$ تبدیل کنیم .
 $a(x - k)^2 - b(x - k) + c = 0$

برای یافتن معادله ای که ریشه هایش k واحد کمتر از ریشه های معادله فوق باشد کافی



است x را به $x + k$ تبدیل کنیم .
 $a(x + k)^2 - b(x + k) + c = 0$

برای یافتن معادله ای که دارای ریشه هایی مربع هر یک از ریشه های معادله فوق باشد



کافی است x را به \sqrt{x} تبدیل کرده سپس جمله رادیکالی را به سمت دیگر تساوی منتقل

نموده و با به توان رساندن طرفین معادله جدید را تشکیل دهیم .

سوال ۲۳: معادله‌ی بنویسید که ریشه هایش مربع ریشه های معادله $-2x^2 - 3x + 5 = 0$ باشد.

$$-2x^2 - 3x + 5 = 0 \xrightarrow{x \text{ را به } \sqrt{x} \text{ تبدیل می کنیم}} -2\sqrt{x}^2 - 3\sqrt{x} + 5 = 0$$

$$-2x - 3\sqrt{x} + 5 = 0 \xrightarrow{-3\sqrt{x} \text{ را به سمت دیگر تساوی منتقل می کنیم.}} -2x + 5 = 3\sqrt{x}$$

طرفین تساوی را به توان ۲ می رسانیم.

$$(-2x + 5)^2 = (3\sqrt{x})^2 \rightarrow 4x^2 - 20x + 25 = 9x \rightarrow 4x^2 - 29x + 25 = 0$$

سوال ۲۴: معادله $4x^2 + 3x - 7 = 0$ مفروض است.

(الف) ریشه های معادله را تعیین کنید.

(ب) معادله ای بنویسید که ریشه های آن قرینه معادله فوق باشند.

(ج) معادله ای بنویسید که ریشه های آن -1 و $\frac{4}{7}$ باشند.

(د) معادله ای بنویسید که ریشه های آن 4 و -7 باشند.

الف $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(4)(-7) = 9 + 112 = 121$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{121}}{8} = \frac{-14}{8} = \frac{-7}{4} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{121}}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

ب $4x^2 + 3x - 7 = 0 \xrightarrow{\text{ب را قرینه می کنیم}} 4x^2 - 3x - 7 = 0$

ج $4x^2 + 3x - 7 = 0 \xrightarrow[\text{ب را قرینه می کنیم}]{\text{جای } a \text{ و } c \text{ را تغییر می دهیم}} -7x^2 - 3x + 4 = 0$

د $4x^2 + 3x - 7 = 0 \xrightarrow{\text{ب را ۴ برابر و } c \text{ را ۱۶ برابر می کنیم}} 4x^2 + 12x - 112 = 0$

پایان درسی دوم

