سؤالات و پاسخ تشریحی سؤالات فصل ۲ هندسه ۲

۱ – تبدیل و تبدیل طولپا را تعریف کنید و رابطهٔ آن را بنویسید.

حل :

تبدیل T در صفحهٔ P، تابعی است که به هر نقطهٔ A از صفحهٔ P، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحهٔ P نظیر می کند و بر عکس؛ هر نقطهٔ A' از صفحهٔ P، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحهٔ P است.

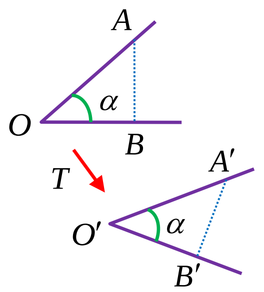
$T: P \to P$

$T(A) = A'$

۲ – ثابت کنید هر تبدیل طولپا اندازهٔ زاویه را حفظ می کند.

حل:

فرض کنیم T تبدیلی طولپا باشد در این صورت داریم:



$$T(A) = A' \quad , \quad T(B) = B' \quad , \quad T(C) = C'$$

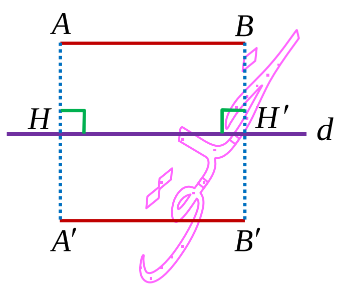
$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AO = A'O' \\ BO = B'O' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABO} \cong \overset{\Delta}{A'B'O'} \quad \Rightarrow \quad A\hat{O}B = A'\hat{O}'B'$$

۳ – اگر A' بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d باشد آنگاه d ...عمود منصف ... پاره خط AA' است. خط d ... خط بازتاب یا محور بازتاب... نامیده می شود. اگر بازتاب نقطهٔ B بر خودش منطبق باشد آنگاه نقطهٔ B .... روی محور بازتاب است...

بازتاب طولپا ... است... .

۴ – ثابت کنید بازتاب طولپا است.

حل:



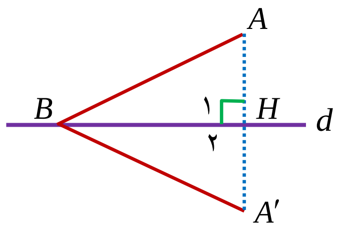
الف) اگر AB با محور بازتاب یعنی خط d موازی باشد. A' و B' بازتاب A و B نسبت به خط d هستند پس $AH = A'H \quad , \quad BH' = B'H'$.

$$\left.\begin{array}{l} AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AA' \| BB'$$

از طرفی

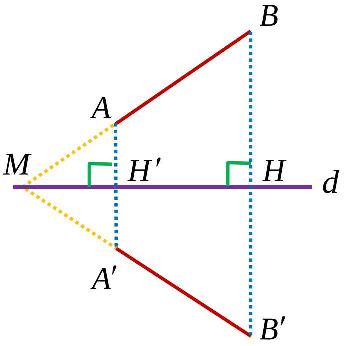
$$AB \parallel d \;\Rightarrow\; AH = BH' \xrightarrow[BH=B'H]{AH=A'H} AH + A'H = BH' + B'H' \;\Rightarrow\; AA' = BB'$$

در چهار ضلعی $ABB'A'$ دو ضلع AA' و BB' موازی و مساوی‌اند پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع است در نتیجه $AB = A'B'$.



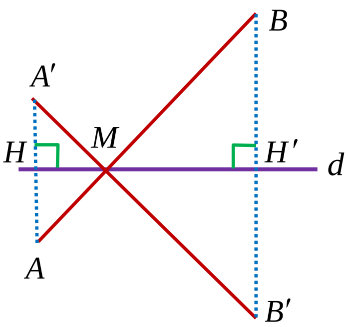
ب) اگر فقط یکی از نقاط انتهایی پاره خط AB روی خط بازتاب باشد. (اگر هر دو نقطهٔ ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشند آنگاه بازتاب AB بر خودش منطبق بوده و در نتیجه تصویر AB با خودش برابر است)

$$\left.\begin{aligned} AH &= A'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 &= 90^\circ \\ BH &= BH \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABH} \cong \overset{\Delta}{A'BH} \;\Rightarrow\; AB = A'B$$



ج) اگر پاره خط AB با خط بازتاب نه موازی و نه متقاطع باشد. پاره خط AB را امتداد می دهیم تا خط بازتاب را در نقطهٔ M قطع کند، در این صورت با توجه به (ب)داریم:

$$\left.\begin{aligned} AB &= MB - MA \\ A'B' &= MB' - MA' \\ MB = MB' \quad &, \quad MA = MA' \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$



د) اگر پاره خط AB خط بازتاب را در نقطه ای مثل M قطع کند، در این صورت با توجه به (ب)داریم:

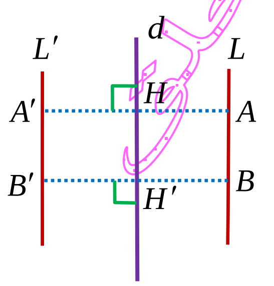
$$\left.\begin{aligned} AB &= MB + MA \\ A'B' &= MB' + MA' \\ MB = MB' \quad &, \quad MA = MA' \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

۵ – آیا بازتاب شیب خط را حفظ می کند به طور کامل توضیح دهید.

حل:

در حات کلی خیر

الف) اگر خط L با خط بازتاب یعنی خط d موازی باشد آنگاه L' یعنی تصویر خط L، موازی خط L است.

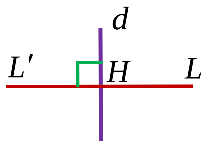


زیرا اگر A و B دو نقطه از خط L باشندآنگاه A' و B' بازتاب A و B نسبت به خط d است که روی خط L' قرار دارند پس $AH = A'H \quad , \quad BH' = B'H'$.

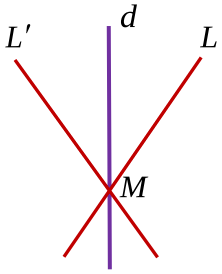
$$\left.\begin{aligned} AA' &\perp d \\ BB' &\perp d \end{aligned}\right\} \Rightarrow AA' \parallel BB'$$

از طرفی

$$AB \| d \quad \Rightarrow \quad AH = BH' \xrightarrow[BH'=B'H']{AH=A'H} AH + AH' = BH + BH' \quad \Rightarrow \quad AA' = BB'$$



در چهار ضلعی $ABB'A'$ دو ضلع AA' و BB' موازی و مساوی‌اند پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع است در نتیجه $AB = A'B'$ پس $d \| d'$.



ب) اگر خط L بر خط بازتاب یعنی d عمود باشد آنگاه تصویر L بر خودش منطبق بوده و موازی خط L است.

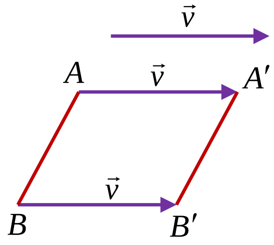
ج) اگر خط L با خط بازتاب یعنی خط d متقاطع بوده ولی بر آن عمود نباشد آنگاه L' و L و d در نقطه ای مانند M متقاطع هستند، بنابراین L و L' موازی نیستند.

۶ – وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به d ... A ... است. قرینهٔ قرینهٔ هر نقطه ... همان... نقطه است. در هر بازتاب تبدیل یافتهٔ یک مثلث، ...یک مثلث همنهشت با مثلث اولیه... است. در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافتهٔ تمام نقاط روی خط d ...همان نقاط... هستند.تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب ...بی شمار... است.

۷ – دو بردار که ...هم اندازه... و ...هم راستا... و ...هم جهت... باشند دو بردار برابر هستند.

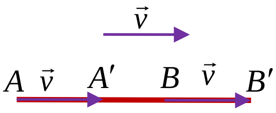
۸ – ثابت کنید انتقال یک تبدیل طولپا است.

حل:



الف) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد:

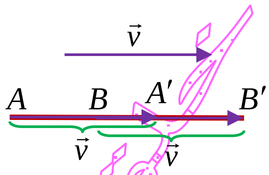
در چهار ضلعی $AA'B'B$ داریم: $AA' = BB' = |\vec{v}|$ و $AA' \| BB' \| \vec{v}$ پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع بوده و در نتیجه $AB = A'B'$ است.



ب) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد و $AB \geq |\vec{v}|$ در این صورت داریم:

$$\left.\begin{aligned} AB &= AA' + A'B \\ A'B' &= A'B + BB' \\ AA' &= BB' = |\vec{v}| \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad AB = A'B'$$

ج) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد و $AB < |\vec{v}|$ در این صورت داریم:

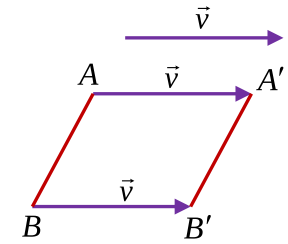


$$\left.\begin{aligned} AB &= AA' - BA' \\ A'B' &= BB' - BA' \\ AA' &= BB' = |\vec{v}| \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad AB = A'B'$$

۹ – ثابت کنید انتقال شیب خط را حفظ می کند.

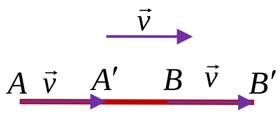
حل:

الف) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد:



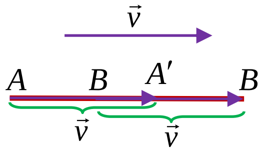
در چهار ضلعی $AA'B'B$ داریم: $AA' = BB' = |\vec{v}|$ و $AA' \parallel BB' \parallel \vec{v}$ پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع بوده و در نتیجه $AB \parallel A'B'$ است.

ب) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد و $AB \geq |\vec{v}|$ در این صورت داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \\ AA' = BB' = |\vec{v}| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AB = A'B'$$

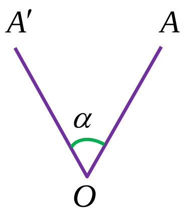
ج) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد و $AB < |\vec{v}|$ در این صورت داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AB = AA' - BA' \\ A'B' = BB' - BA' \\ AA' = BB' = |\vec{v}| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AB = A'B'$$

۱۰ – دوران را تعریف کنید.

حل:

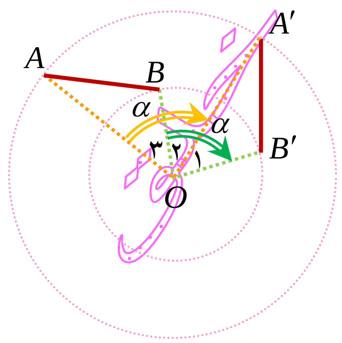


دوران R به مرکز نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ α تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطهٔ A باشد و داریم:

$$A\hat{O}A' = \alpha \quad \text{و} \quad OA = OA'$$

۱۱ – نشان دهید دوران طولپاست.

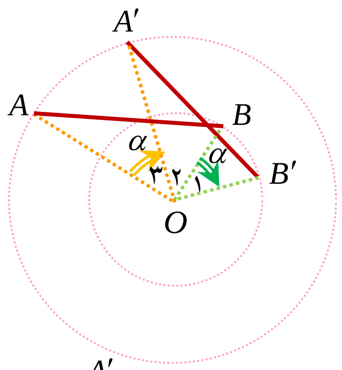
حل:



الف)اگر مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویهٔ دوران از زاویهٔ $A\hat{O}B$ بیشتر باشد.

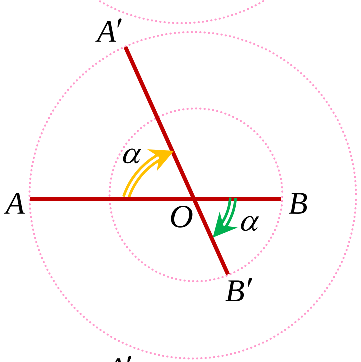
$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' = \hat{\alpha} - B\hat{O}A' \\ OB = OB' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{A'OB'} \Rightarrow \quad AB = A'B'$$

ب) اگر مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویهٔ دوران از زاویهٔ $A\hat{O}B$ کمتر باشد.



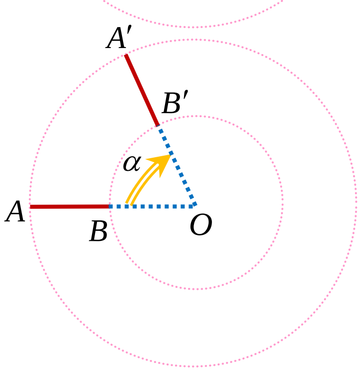
$$\left.\begin{array}{c} OA = OA' \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' = \hat{\alpha} + A'\hat{O}B \\ OB = OB' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{A'OB'} \Rightarrow AB = A'B'$$

ج) اگر O روی پاره خط AB باشد.



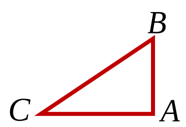
$$\left.\begin{array}{c} AB = AO + OB \\ A'B' = A'O + OB' \\ OA = OA' \,,\, OB = OB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

د) اگر O روی امتداد پاره خط AB باشد.

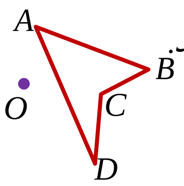


$$\left.\begin{array}{c} AB = AO - OB \\ A'B' = A'O - OB' \\ OA = OA' \,,\, OB = OB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

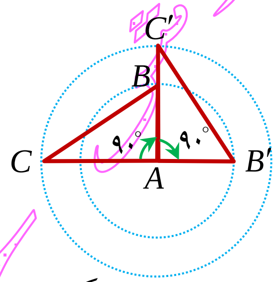
۱۲ – الف) دوران یافتهٔ مثلث ABC را به مرکز A و با زاویهٔ ۹۰° در جهت عقربه های ساعت رسم کنید.

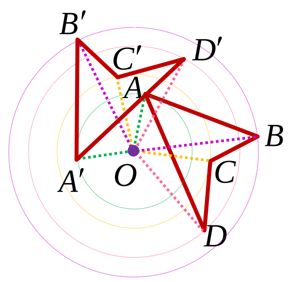


ب) دوران یافتهٔ شکل $ABCD$ را به مرکز O و با زاویهٔ ۱۲۰° در خلاف جهت عقربه های ساعت رسم کنید.



حل:

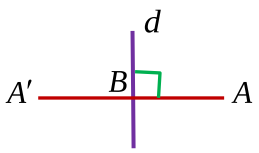




۱۳– در حالتی که پاره‌خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.

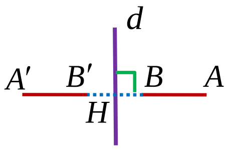
حل:

الف) اگر یکی از دو سر پاره خط AB (مثلاً B) روی خط بازتاب باشد:



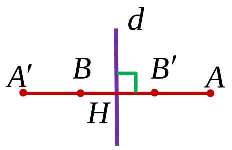
خط d عمود منصف AA' است و بازتاب B بر خودش منطبق است پس $AB = A'B$

ب) پاره خط AB، خط بازتاب را قطع نکند :



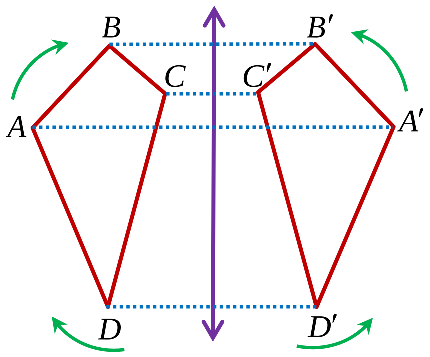
$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ BH = B'H \\ AB = AH - BH \ , \ A'B' = A'H - B'H \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AB = A'B'$$

ج) پاره خط AB، خط بازتاب را قطع کند :



$$\left.\begin{array}{l} AH = A'H \\ BH = B'H \\ AB = AH + BH \ , \ A'B' = A'H + B'H \end{array}\right\} \Rightarrow \quad AB = A'B'$$

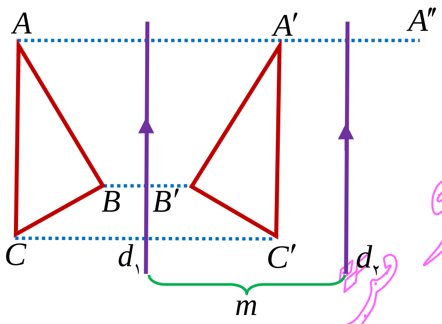
۱۴- در شکل مقابل چهارضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی محدب $ABCD$ تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B ، C و D می‌رویم، جهت حرکت ، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟



حل:

جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت است، بنابراین می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

۱۵ – در شکل مقابل خط d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است.

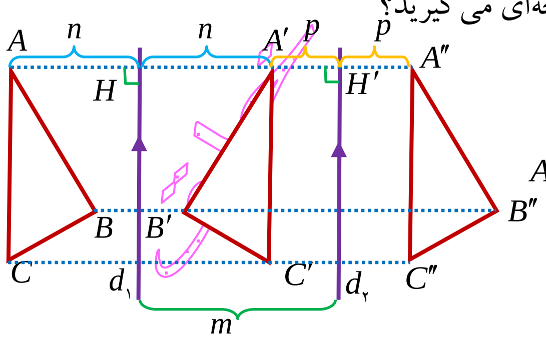


الف) بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید .

ب)نشان دهید $AA'' = 2m$

ج) اندازه BB'' و CC'' چقدر است؟

د) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می گیرید؟



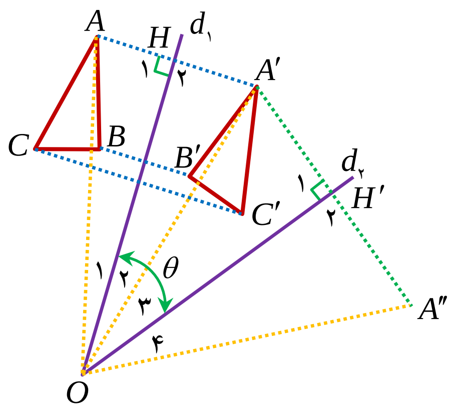
حل:

ب) $AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A'' = n + n + p + p = 2(n+p) = 2m$

ج) به همین ترتیب : $BB'' = CC'' = 2m$

د) با انتقال توسط برداری به طول $2m$ و در راستای عمود بر d_1 یا d_2 و در جهت از d_1 به طرف d_2 .

درنتیجه دو بازتاب متوالی نسبت به دو خط موازی L_1 و L_2 به فاصلهٔ m معادل با تبدیل انتقال است به طوریکه این انتقال توسط برداری به طول $2m$ در راستای عمود بر آن دوخط در جهت خط اول به سمت خط دوم است.

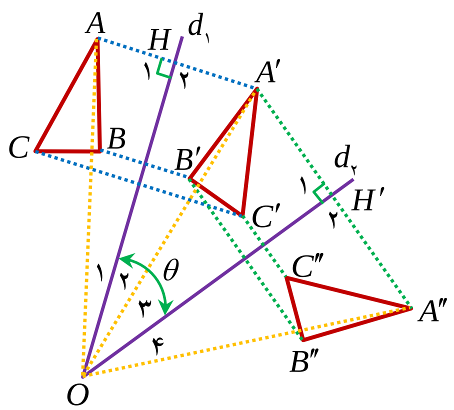


۱۶- در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویهٔ θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ بازتاب مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''\overset{\Delta}{B''}C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $A\hat{O}A'' = 2\theta$

ب) اندازهٔ $C\hat{O}C''$ و $B\hat{O}B''$ چقدر است؟

ج) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''\overset{\Delta}{B''}C''$ را تصویر $A\overset{\Delta}{B}C$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می گیرید؟



حل:

الف) می دانیم بازتاب اندازه زاویه را حفظ می کند پس: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

$$A\hat{O}A'' = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\left(\hat{O}_2 + \hat{O}_3\right) = 2\theta$$

ب) به همین ترتیب داریم: $B\hat{O}B'' = C\hat{O}C'' = 2\theta$

ج) بازتاب طولپا است پس:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' \\ OA' = OA'' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad OA = OA''$$

به همین ترتیب $OB = OB''$ و $OC = OC''$

بنابراین با تبدیل دوران به مرکز O و به زاویهٔ θ می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست. درنتیجه دو بازتاب متوالی نسبت به دو خط متقاطع با زاویهٔ θ معادل با دوران به مرکز نقطهٔ تلاقی دو خط و زاویهٔ 2θ است.

۱۷- تجانس را تعریف کرده و انواع آن را بیان کنید برای هر حالت مثالی بزنید.

حل:

اگر O نقطهٔ ثابت در صفحه بوده و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطهٔ M' را مجانس نقطهٔ M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) سه نقطهٔ O، M و M' روی یک خط راست باشند

ب) $OM' = |k|.OM$

ج) اگر k مثبت باشد M' روی نیم خط OM بوده و نقاط M و M' در یک طرف نقطهٔ O قرار دارند.

مثال: $OM' = ۲OM$

$k = ۲$

$OM' = \frac{۱}{۲}OM$

$k = \frac{۱}{۲}$

اگر k منفی باشد نقطهٔ O بین نقاط M و M' قرار می گیرد.

$OM' = ۲OM$

$k = -۲$

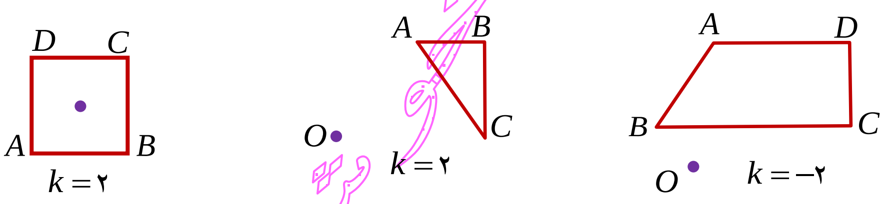
۱۸ – در تجانس به مرکز O و نسبت k نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M به نسبت k است. چرا نقطهٔ M مجانس نقطهٔ M' با نسبت $\frac{۱}{k}$ است.

حل:

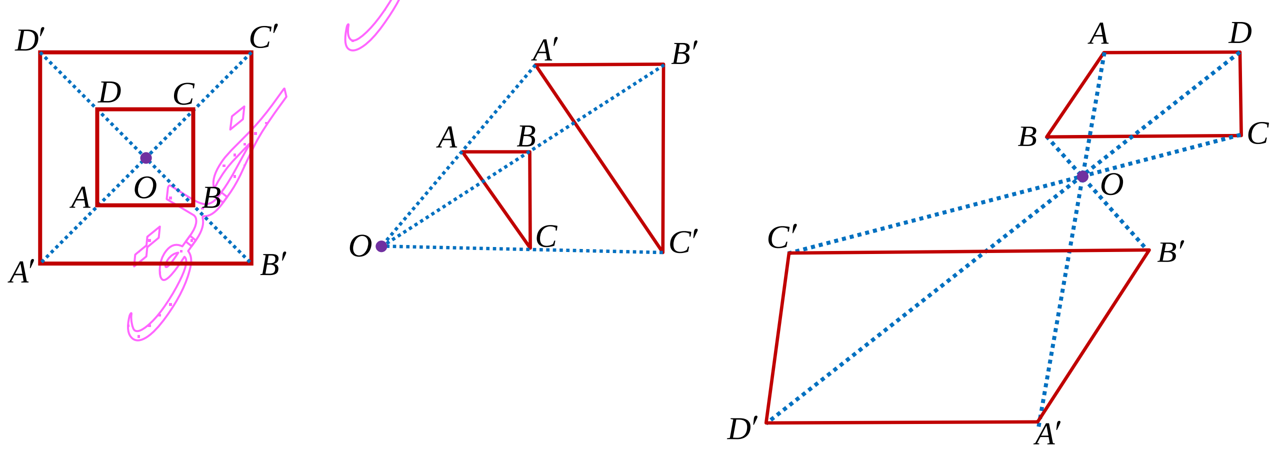
زیرا اولاً سه نقطهٔ O، M و M' روی یک خط راست قرار دارند و ثانیاً:

$$OM' = |k|.OM \Rightarrow OM = \frac{۱}{|k|}OM'$$

۱۹ – مجانس هریک از اشکال زیر تحت تجانس به مرکز تجانس O و نسبت k رسم کنید.



حل:



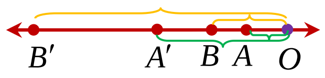
۲۰ –تجانس با نسبت تجانس $k>1$ ؛خاصیت ایزومتری (طولپا) .. ندارد... و شیب خط ...حفظ می شود ... و جهت شکل ...حفظ می شود .... تجانس با نسبت تجانس $k<-1$ ؛خاصیت ایزومتری (طولپا) .. ندارد... و شیب خط ...حفظ می شود ... و جهت شکل ...حفظ می شود ... . تجانس با نسبت تناسب ... $k=1$ ... و... $k=-1$ ... دارای خاصیب ایزو متری است.

۲۱ – در تجانس به مرکز O و نسبت k : اگر $k>0$ تجانس را ... تجانس مستقیم... می نامیم . اگر $k<0$ تجانس را ... تجانس معکوس... می نامیم . اگر $|k|<1$ تصویر شکل...کوچکتر... می شود و آن را ...انقباض... می نامیم. اگر $|k|>1$ تصویر شکل...بزرگتر... می شود و آن را ...انبساط... می نامیم. تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط را ...حفظ می کند... و اندازه زاویه را ...حفظ می کند... .

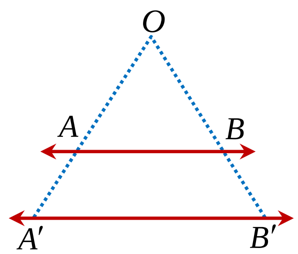
۲۲ – ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می کند.

حل:

تجانس D به مرکز O و نسبت تجانس k را در دو حالت زیر در نظر می گیریم



الف) حالتی که O روی AB باشد. نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B روی خط AB است پس خط $A'B'$ روی خط AB بوده و در نتیجه شیب خط تغییر نمی کند.

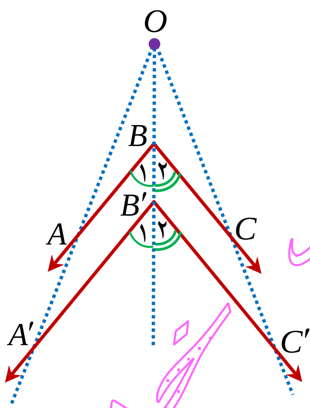


ب) حالتی که O روی AB نباشد.

$$\left.\begin{array}{l} OA'=k.OA \\ OB'=k.OB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=k \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AB\parallel A'B'$$

۲۳ – ثابت کنید تجانس اندازه زاویه را حفظ می کند.

حل:



می دانیم تجانس شیب خط را حفظ می کند.

$$AB\parallel A'B' \ , \text{مورب} \quad OB' \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{B}'_1$$

$$BC\parallel B'C' \ , \text{مورب} \quad OB' \Rightarrow \hat{B}_2=\hat{B}'_2$$

$$\Rightarrow \hat{B}=\hat{B}_1+\hat{B}_2=\hat{B}'_1+\hat{B}'_2=\hat{B}'$$

۲۴ – اگر n ضلعی $A'_1A'_2...A'_n$ مجانس n ضلعی $A_1A_2...A_n$ باشند نشان دهید این دو n ضلعی با هم متشابهند.

حل:

در تجانس با نسبت k، اضلاع متناسب بوده و اندازه زوایا حفظ می شوند پس داریم:

$$A'_1A'_2=|k|A_1A_2 \ , \ A'_2A'_3=|k|A_2A_3 \ ,..., \ A'_{n-1}A'_n=|k|A_{n-1}A_n \Rightarrow \frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}=\frac{A'_2A'_3}{A_2A_3}=...=\frac{A'_{n-1}A'_n}{A_{n-1}A_n}=|k|$$

و $\hat{A}_1 = \hat{A}'_1 \quad , \quad \hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad \hat{A}_n = \hat{A}'_n$

پس دو n ضلعی $A'_1A'_2\dots A'_n$ و $A_1A_2\dots A_n$ ، با هم متشابهند.

۲۵ – تبدیل همانی را تعریف کنید.آیا تبدیل همانی طولپاست؟ چرا؟در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس می توانند تبدیل همانی باشند؟

حل:

تبدیل T را تبدیل همانی گوییم ، هرگاه به ازای هر نقطهٔ A از صفحهٔ P داشته باشیم: $T(A)=A$

تبدیل همانی طولپاست زیرا تصویر هر پاره خط بر خودش منطبق است. به عبارتی داریم:

$$A' = T(A) = A \quad , \quad B' = T(B) = B \quad \Rightarrow \quad A'B' = AB$$

اگر طول بردار انتقال برابر صفر باشد انتقال همانی است زیرا تصویر هر نقطه بر خودش منطبق است.

اگر زاویهٔ دوران برابر صفر باشد دوران همانی است زیرا تصویر هر نقطه بر خودش منطبق است.

اگر نسبت تجانس برابریک باشد $(k=1)$ تجانس همانی است زیرا تصویر هر نقطه بر خودش منطبق است.

۲۶ – در هر یک از تبدیل های ، انتقال غیر همانی ، دوران غیر همانی ، وتجانس غیر همانی ،نقاط ثابت تبدیل را در صورت وجود مشخص کنید.

حل:

انتقال غیر همانی ، نقطهٔ ثابت ندارد. در تبدیل دوران غیر همانی فقط مرکز دوران نقطهٔ ثابت تبدیل است ، و در تجانس غیر همانی فقط مرکز تجانس نقطهٔ ثابت تبدیل است.

۲۷ – تبدیل بازتاب، الف)خاصیت طولپای ...دارد... ب)اندازه زاویه را ...حفظ می کند... ج) شیب خط را ...حفظ نمی کند... د)جهت شکل را ... حفظ نمی کند... . ه) مساحت شکل را ... حفظ می کند... .

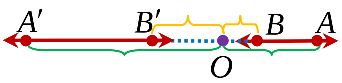
۲۸ – تبدیل انتقال، الف)خاصیت طولپایی ...دارد... ب)اندازه زاویه را ...حفظ می کند... ج) شیب خط را ...حفظ می کند... د)جهت شکل را ... حفظ می کند... . ه) مساحت شکل را ... حفظ می کند... .

۲۹ – تبدیل دوران، الف)خاصیت طولپایی ...دارد... ب)اندازه زاویه را ...حفظ می کند... ج) شیب خط را ...حفظ نمی کند... د)جهت شکل را ... حفظ می کند... . ه) مساحت شکل را ... حفظ می کند... .

۳۰– تبدیل تجانس، الف)خاصیت طولپایی ...ندارد... ب)اندازه زاویه را ...حفظ می کند... ج) شیب خط را ...حفظ می کند... د)جهت شکل را ... حفظ می کند... . ه) مساحت شکل را ... حفظ نمی کند... .

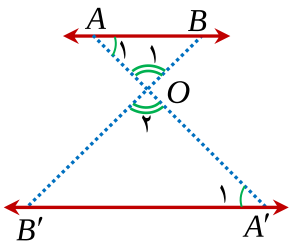
۳۱- در تجانسی با نسبت $k<0$ و مرکز تجانس O نشان دهید ، تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

حل:



تجانس D به مرکز O و نسبت تجانس k را در دو حالت زیر در نظر می گیریم

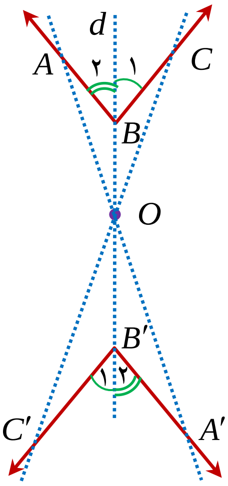
الف) حالتی که O روی AB باشد. نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B روی خط AB است پس خط $A'B'$ روی خط AB بوده و در نتیجه شیب خط تغییر نمی کند.



ب) حالتی که O روی AB نباشد.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA'=|k|.OA\\ OB'=|k|.OB\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=|k|\\ \text{از طرفی}\quad \hat{O}_1=\hat{O}_2\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{OAB}\approx \overset{\Delta}{OA'B'}\Rightarrow \hat{A}_1=\hat{A}'_1\longrightarrow AB\parallel A'B'$$

۳۲- در تجانسی با نسبت $k<0$ و مرکز تجانس O نشان دهید ، تجانس زاویهٔ بین خطوط را حفظ می‌کند.



حل:

$$AB\parallel A'B' \quad , \quad \text{مورب}\ d \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_2=\hat{B}'_2$$

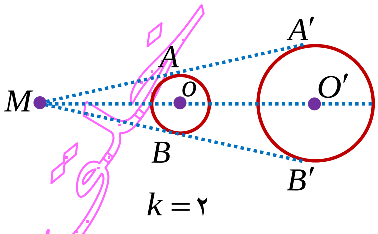
$$BC\parallel B'C' \quad , \quad \text{مورب}\ d \quad \Rightarrow \quad \hat{B}_1=\hat{B}'_1$$

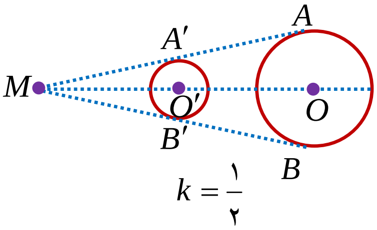
$$\Rightarrow \quad \hat{B}=\hat{B}_1+\hat{B}_2=\hat{B}'_1+\hat{B}'_2=\hat{B}'$$

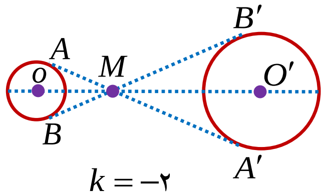
۳۳ – دایره $C(O,R)$ و نقطهٔ M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطهٔ M در هر حالت رسم کنید.

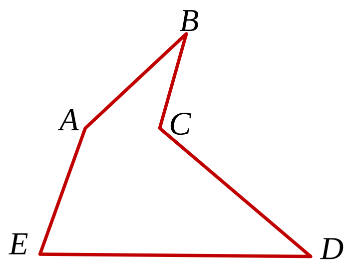
الف) $k=2$　　ب) $k=-2$　　پ) $k=\frac{1}{2}$

حل:



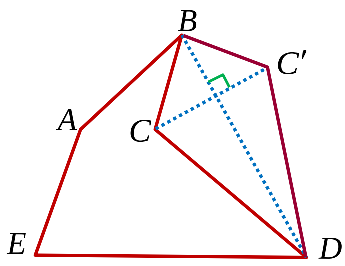




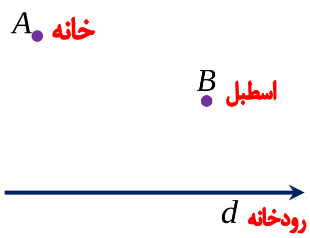


۳۴ – زمینی به شکل چند ضلعی $ABCDE$ داریم که دور آن را حصار کشیده ایم. حال می خواهیم با ثابت نگه داشتن محیط و ثابت نگه داشتن تعداد اضلاع چند ضلعی، بدون اینکه اندازه حصار کشی تغییر کند مساحت زمین را افزایش دهیم. با استفاده از چه تبدیل و چگونه این کار را انجام دهیم؟

حل:

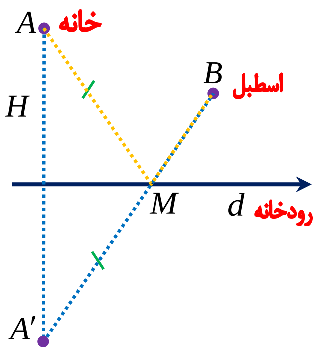


از B به D وصل می کنیم. بازتاب C را نسبت به این خط رسم کرده آن را C' می نامیم. بازتاب B همان B و بازتاب D همان D است زیرا این نقاط بر خط بازتاب واقع هستند. می دانیم بازتاب طولپا است پس $BC = BC'$ و $DC = DC'$ بنا براین محیط $ABC'DE$ با محیط $ABCDE$ برابر است اما مساحت آن بیشتر شده است.



۳۵ – مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبهٔ مستقیمی داردرفته وبعد سطل آب را به اسطبل ببرد که درهمان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می کند کمترین مقدار ممکن باشد.

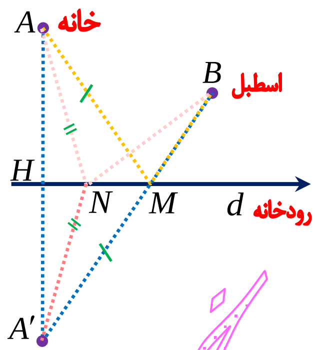
حل:



این مسئله را در دو قسمت حل می کنیم در ابتدا روش به دست آوردن کوتاه ترین مسیر را بیان می کنیم و سپس به اثبات یکتابودن میسر می پردازیم.

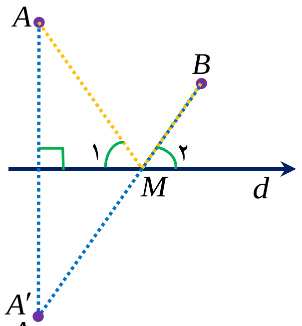
ابتدا بازتاب A را نسبت به d به دست آورده آن را A' می نامیم، سپس از A' به B وصل می کنیم. $A'B$ خط d را در نقطهٔ M قطع می کند، نقطهٔ M همان نقطهٔ مورد نظر است. زیرا می دانیم خط d عمود منصف AA' است و در نتیجه : $AM = A'M$ وداریم:

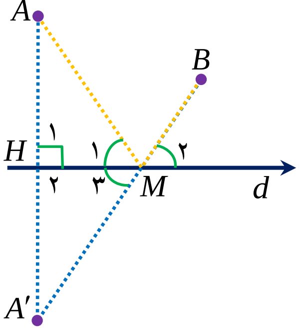
$$AM + MB = A'M + MB = A'B$$ (خط راست کمترین فاصلهٔ بین دو نقطه است)



اثبات یکتایی مسیر: اگر از A به نقطه ای دیگر از ساحل مانند N رفته و سپس به B برویم مسیر طولانی تر است زیرا با توجه به اینکه ((در هر مثلث مجموع طول هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است)) می توان نوشت:

$$AN + NB = A'N + NB > A'B = A'M + MB = AM + MB$$



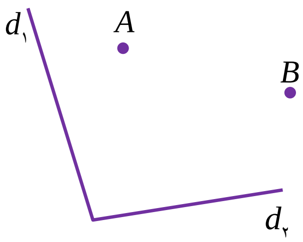


۳۶– اگر d یک آینهٔ تخت و A یک نقطهٔ نورانی باشد نشان دهید بازتاب شعاع نوری AM از نقطهٔ B می گذرد (به عبارتی نشان دهید که $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$).

حل:

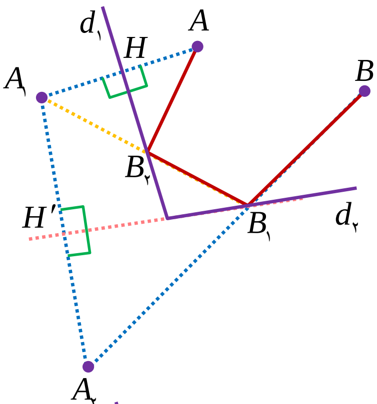
$$\left.\begin{aligned} AH &= A'H \\ \hat{H}_1 &= \hat{H}'_1 = 90^\circ \\ MA &= MA' \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{AHM} \cong \overset{\Delta}{A'HM}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_3 \xrightarrow{\hat{M}_3 = \hat{M}_2} \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$



۳۷– دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض اند. چگونه می توان با طی کوتاه ترین مسیر از نقطهٔ A آغاز به حرکت کرده و پس از برخورد با دو خط d_1 و d_2 از نقطهٔ B گذشت؟

حل:

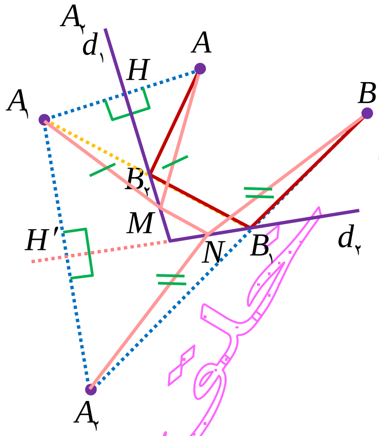


این مسئله را در دو قسمت حل می کنیم در ابتدا روش به دست آوردن کوتاه ترین مسیر را بیان می کنیم و سپس به اثبات یکتابودن میسر می پردازیم.

قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط d_1 ، نقطهٔ A_1 وقرینهٔ A_1 نسبت به d_2 را A_2 می نامیم. از A_2 به B وصل می کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با d_2 ، B_1 می نامیم. به همین ترتیب از B_1 به A_1 وصل می کنیم و نقطهٔ برخورد آن را با d_1، B_2 می نامیم. از A به B_2 وصل می کنیم. ادعا می کنیم که مسیر مورد نظر AB_2B_1B است. زیرا:

$$\left.\begin{aligned} A_1B_2 = AB_2 \quad &\Rightarrow \quad AB_2 + B_2B_1 = A_1B_2 + B_2B_1 = A_1B_1 \\ A_1B_1 = A_2B_1 \quad &\Rightarrow \quad A_1B_1 + B_1B = A_2B_1 + B_1B = A_2B \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{AB_2 + B_2B_1}_{A_1B_1} + B_1B = A_1B_1 + B_1B = A_2B$$



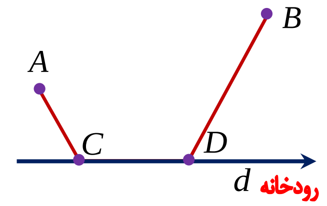
اثبات یکتایی:

اگر $AMNB$ مسیر دیگری باشد داریم:

$$AM = A_1M \quad \Rightarrow \quad AM + MN = A_1M + MN = A_1N$$

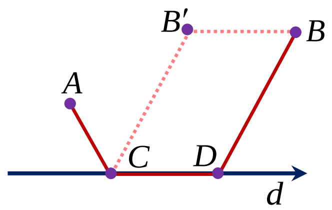
$$A_1N = A_2N \quad \Rightarrow \quad \underbrace{AM + MN}_{A_1N = A_2N} + NB = A_2N + NB$$

بنابراین طول مسیر اول برابر A_1B بوده و طول مسیر دوم برابر $A_1N + NB$ است و چون در هر مثلث مجموع هر دو ضلع از ضلع سوم بیشتر است در مثلث BNA_1 داریم: $A_1N + NB > A_1B$ یعنی مسیر دوم از مسیر اول طولانی تر است.



۳۸ – دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوریکه ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد.

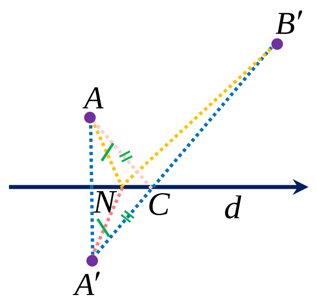
حل:



فرض کنیم $ACDB$ کوتاه ترین مسیر باشد در این صورت اگر BB' را به طول ۴ کیلومتر و به موازات رودخانه رسم کنیم آنگاه : طول مسیر $ACDB$ = طول مسیر $ACB'B$

زیرا در چهار ضلعی $CB'BD$ دو ضلع BB' و CD موازی و مساوی اند پس متوازی الاضلاع است در نتیجه $CB' = DB$ و می توان نوشت:

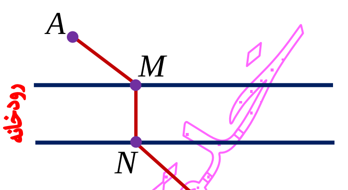
طول میسر $ACDB = AC + \underbrace{CD}_{BB'} + \underbrace{DB}_{CB'} = AC + CB' + B'B =$ طول مسیر $ACB'B$



بنابراین بازتاب نقطهٔ A را نسبت به d رسم کرده آن را A' می نامیم از A' به B' وصل می کنیم تا خط d را در C قطع کند سپس CD را به طول ۴ کیلومتر در امتداد d رسم می کنیم و از D به B وصل می کنیم.

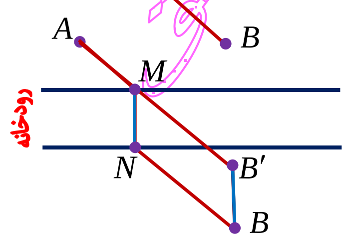
اثبات یکتایی مسیر: برای اثبات یکتایی مسیر کافی است ثابت کنیم مسیر ACB' کوتاه ترین مسیر است. اگر از A به نقطه ای دیگر از ساحل رودخانه مانند N رفته و سپس به B' برویم مسیر طولانی تر است زیرا:

$$AN + NB' = A'N + NB' > A'B' = A'C + CB' = AC + CB'$$



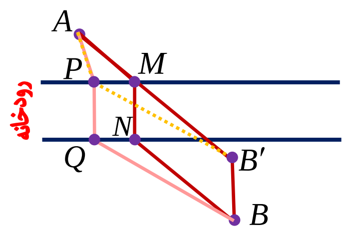
۳۹ – اگر دو شهر A و B در دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

حل:



BB' را در راستای عمود بر راستای رودخانه و به اندازهٔ عرض رودخانه رسم می کنیم و از A به B' وصل می کنیم مطابق شکل AB' رودخانه را در نقطهٔ M قطع می کند.

MN را عمود بر راستای رودخانه رسم کرده از N به B وصل می کنیم $AMNB$ کوتاه ترین مسیر است. زیرا:



در چهار ضلعی $MNBB'$ ، BB' و MN موازی و مساوی یکدیگرند پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع است و در نتیجه $MB' = NB$ در نتیجه داریم:

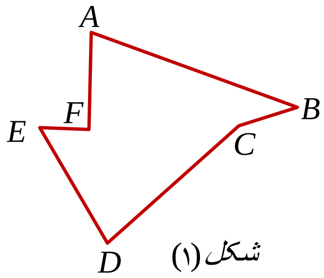
$$\text{طول مسیر } AMNB = AM + \underbrace{MN}_{BB'} + \underbrace{NB}_{MB'} = AM + MB' + BB' = AB' + BB'$$

اثبات یکتایی مسیر:

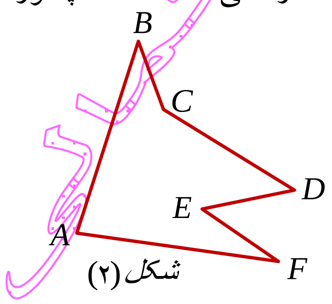
اثبات یکتایی مسیر: $APQB$ مسیر دیگری باشد(با توجه با اینکه در مثلث APB' داریم $AP + PB' > AB'$) مطابق قسمت قبل می توان نوشت:

$$\text{طول مسیر } APQB = AP + \underbrace{PQ}_{BB'} + \underbrace{QB}_{PB'} = AP + PB' + BB' > AB' + BB'$$

۴۰ – دور زمین‌هایی مطابق شکل حصارکشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

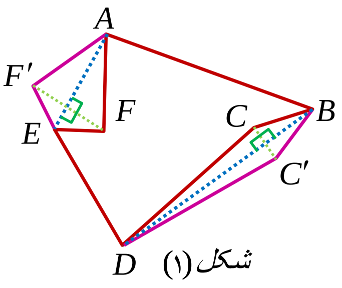


شکل (۱)



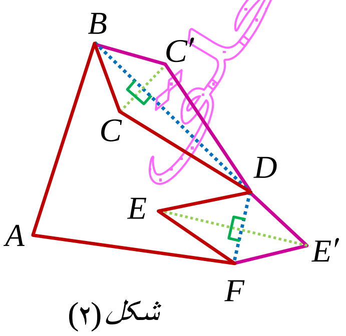
شکل (۲)

حل:



شکل (۱)

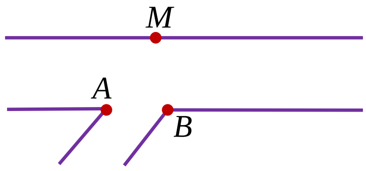
درشکل(۱)از A به E وصل می کنیم. بازتاب F را نسبت به این خط رسم کرده آن را F' می نامیم. بازتاب A همان A و بازتاب E همان E است زیرا این نقاط بر خط بازتاب واقع هستند. می دانیم بازتاب طولپا است پس $AF = AF'$ و $EF = EF'$. به همین ترتیب از B به D وصل می کنیم. بازتاب C را نسبت به این خط رسم کرده آن را C' می نامیم. بازتاب B همان B و بازتاب D همان D است. پس $BC = BC'$ و $DC = DC'$ بنابراین محیط $ABC'DEF'$ با محیط $ABCDEF$ برابر است اما مساحت آن بیشتر شده است.



شکل (۲)

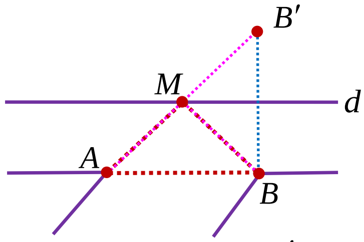
در شکل (۲) از B به D وصل می کنیم. بازتاب C را نسبت به این خط رسم کرده آن را C' می نامیم. بازتاب B همان B و بازتاب D همان D است زیرا این نقاط بر خط بازتاب واقع هستند. پس $BC = BC'$ و $DC = DC'$ به همین ترتیب از D به F وصل می کنیم. بازتاب E را نسبت به این خط رسم کرده آن را E' می نامیم. بازتاب F

همان F و بازتاب D همان D است. پس $DE=DE'$ و $FE=FE'$ بنابراین محیط $ABC'DE'F$ با محیط $ABCDEF$ برابر است اما مساحت آن بیشتر شده است.



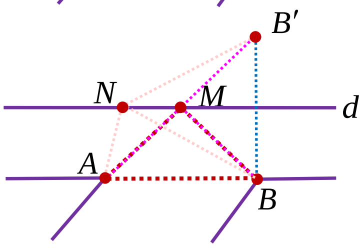
۴۱ – می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها ، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکلهٔ A و B مطابق شکل مشخص است. اسکلهٔ M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر $MABM$ کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

حل:



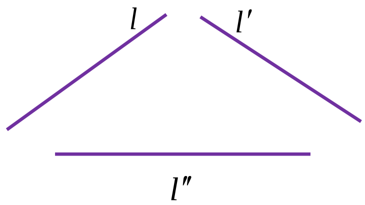
بازتاب B را نسبت به d رسم کرده آن را B' می نامیم از B' به A وصل می کنیم خط AB' خط d را در نقطهٔ M قطع می کند $MABM$ کوتاه ترین مسیر است. زیرا:

$$\text{طول مسیر } MABM = AB + AM + \underbrace{BM}_{MB'} = AB + AM + MB' = AB + AB'$$



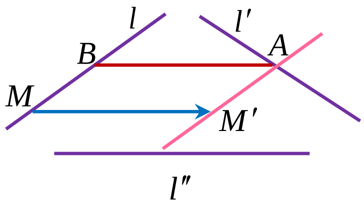
اثبات یکتایی مسیر: اگر از A به نقطه ای دیگر از ساحل رودخانه مانند N رفته و سپس به B برویم مسیر طولانی تر است زیرا در مثلث $\overset{\Delta}{ANB'}$ داریم $AN+NB'>AB'$ و :

$$\text{طول مسیر } NABN = AN + \underbrace{NB}_{NB'} + AB = AN + NB' + AB > AB' + AB \text{ طول میسر } MABM$$



۴۲– سه خط دوبه‌دو ناموازی l و l' و l'' در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l' ، و موازی l'' باشد.

حل:



خط l را با برداری به طول ۵ و به موازت l'' انتقال می دهیم تا l' را در نقطه A قطع کند . از A به موازات l'' رسم می کنیم تا l را در B قطع کند، AB پاره خط مورد نظر است. زیرا اولاً AB به موازات l'' است و ثانیاً :

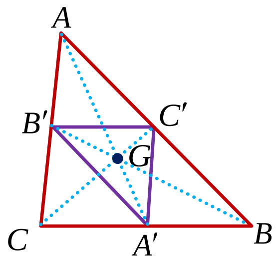
$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}MM'\parallel l''\\ AB\parallel l''\end{array}\right\} MM'\parallel AB\\ MB\parallel M'A\end{array}\right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } ABMM' \Rightarrow AB = MM' = ۵$$

۴۳- فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K=-\frac{1}{2}$ باشد.

الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت ABC است؟

حل:



میانه های AA' و BB' و CC' را رسم می کنیم. می دانیم میانه های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می کنند یعنی داریم:

$$AG=2A'G \Rightarrow A'G=\frac{1}{2}AG \Rightarrow A'G=\left|-\frac{1}{2}\right|AG$$

و به همین ترتیب داریم : $B'G=\left|-\frac{1}{2}\right|BG$ و $C'G=\left|-\frac{1}{2}\right|CG$

پس در تجانس به مرکز G و نسبت $k=-\frac{1}{2}$ ، A' و B' و C' به ترتیب مجانس نقاط A و B و C هستند. و چون $k=-\frac{1}{2}$ است پس نسبت مساحت ها $k^2=\frac{1}{4}$ است.

اثبات نسبت مساحت ها بر روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} AB'=B'C \Rightarrow \dfrac{AB'}{B'C}=1 \\ AC'=C'B \Rightarrow \dfrac{AC'}{C'B}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB'}{B'C}=\frac{AC'}{C'B} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} B'C' \parallel BC$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \quad B'C' \parallel BC \longrightarrow \frac{B'C'}{BC}=\frac{AB'}{AB}=\frac{1}{2}$$

به همین ترتیب $\frac{A'C'}{AC}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{2}$ و در نتیجه دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابه بوده و نسبت تشابه برابر $\frac{1}{2}$ است و در نتیجه نسبت مساحت های این دو مثلث برابر $\frac{1}{4}$ است.