

۱ حاصل عبارت $\log_5 18 - \log_5 30 + \log_5 15$ را بیابید.

۲ حاصل عبارت زیر را بیابید.

الف) $\log_8 \sqrt[2]{2}$

ب) $\log_{\frac{2}{14}} 25$

ج) $\log_{25} 0.8$

د) $\log \frac{1}{4} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{99}{100}$

ه) $\frac{2}{2 + \log_a b} + \frac{1}{1 + \log_a b^2}$

۳ اگر $\log_2^2 = a$ باشد حاصل $\log_{18} 24$ را بیابید.

۴ اگر $\log 5 = a$ باشد حاصل $\log 25$ را بیابید.

۵ اگر $\log^2 = 7.3$ حاصل $\log 50$ را بیابید.

۶ اگر $\log 25 = a$ حاصل $\log 8$ را بیابید.

۷ حاصل $[\log_2 300]$ برابر چه عددی است؟

۸ حاصل $[\log 1] + [\log 10^3]$ را بیابید؟

۹ اگر $\log^9 = 3,7184$ آنگاه عدد a^4 چند رقمی است.

۱۰ حاصل $4^{1 + \log_2 3}$ را بیابید.

۱۱ حاصل $\log x - \log (1.1)^{-1}$ را بیابید.

۱۲ معادلات را حل کنید.

الف) $\log_2^{x-3} + \log_2^{x+1} = 5$

ج) $\log_2^{2-4} + \log_2^{x-2} = 3$

ب) $\log_3^{x^2 - x + 3} - \log_3^{2x - 1} = 1$

د) $\log_9 \sqrt{3} + \log_3 \frac{3}{\sqrt{3}} = \log_9 x$



۱۳ مجموع ریشه های معادله های زیر را بیابید.

$$2 \log_2(x+1) + \log_2 x = 3$$

$$\Rightarrow \log_2 x + \log_2 x = 3$$

۱۴ حاصل ضرب ریشه های معادله $\log_3 x - \log_3 \frac{x}{9} = 3$ را بیابید.

۱۵ اگر $\log_x \sqrt{x} = -\frac{1}{2}$ باشد $\log_4 \left(x + \frac{1}{x}\right)$ را بیابید.

۱۶ اگر $\log_2 \frac{x}{2} + \log_2(x+1) = 1$ باشد $\log_8 x$ را بیابید.

۱۷ اگر $\log_2(5x+1) + \log_2 x = 2$ باشد x را بیابید.

۱۸ اگر $\log_2(x^2-x+1) + \log_2(x+1) = 1$ باشد $\log_8 x$ را بیابید.

۱۹ گاریتم عددها از گاریتم عکس همبند آن عدد، در پایه ۹ به اندازه ۵ واحد بیشتر است. آن عدد را بیابید.

۲۰ اگر $\log_a 2 = \frac{1}{\log_4 9} - \frac{1}{4}$ باشد a را بیابید.

۲۱ ریشه های معادله $2^{\log_2 x} = 425$ را بیابید.

عابدی

(حل مسائل تدریس) (کامرس)

$$\log_a \frac{15 \times 3}{18} = \log_a 25 = 2 \quad (1)$$

$$\text{الف) } \log_a \sqrt[4]{25} = \log_a 25^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_a 25 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\text{ب) } \log_a \sqrt[4]{\frac{1}{25}} = \log_a \frac{1}{25^{\frac{1}{4}}} = \log_a 25^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \log_a 25 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ج) } \log_a \sqrt[4]{\frac{1}{1000}} = \log_a \frac{1}{1000^{\frac{1}{4}}} = \log_a 1000^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \log_a 1000$$

$$\text{د) } = \log_a \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{99}{100} = \log_a \frac{1}{100} = \log_a 10^{-2} = -2$$

$$\text{ه) } \frac{2}{2 + \log_a b} + \frac{1}{1 + \frac{2}{\log_a a}} = \frac{2}{2 + \log_a b} + \frac{1}{\frac{\log_a a}{2} + 2} =$$

$$= \frac{2}{2 + \log_a a} + \frac{\log_a a}{2 + \log_a a} = \frac{2 + \log_a a}{2 + \log_a a} = 1$$

نتیجه!

$$\log_a b^2 = 2 \log_a b = \frac{2}{\log_a a}$$

$$\begin{aligned} \log_{18}^{28} &= \frac{\log_3^{28}}{\log_3^{18}} = \frac{\log_3^{3 \times 14}}{\log_3^{2 \times 9}} = \frac{\log_3^3 + \log_3^{14}}{\log_3^2 + \log_3^9} \\ &= \frac{1 + 3 \log_3^2}{\log_3^2 + 2} = \frac{1 + 3a}{a + 2} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Log}_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \quad \text{: تبدیل}$$

$$\begin{aligned} \log_{2a}^{a^2} &= \frac{\log_2^{a^2}}{\log_2^{2a}} = \frac{\log_2^{a \times a}}{\log_2^{2 \times a}} = \frac{\log_2^a + \log_2^a}{2 \log_2^a} \\ &= \frac{a+1}{2a} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\log_2^a = 1 - \log_2^2 = 1/2 \quad (5)$$

$$\log_2^{a^2} = \log_2^{a \times a} = \log_2^a + \log_2^a = 1/2 + 1 = 1,4$$

$$\log_2^8 = \log_2^{2^3} = 3 \log_2^2 = 3 \left(1 - \frac{a}{2} \right) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \log_2^{2a} = a &\rightarrow 2 \log_2^a = a \rightarrow \log_2^a = \frac{a}{2} \\ \log_2^2 &= 1 - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

⑦ چون $2 = 2 \times 1$ ، $9 = 3 \times 3$ پس $1 < \log_2 3 < 2$

$\Rightarrow [\log_2 3] = 1$

⑧ $1 < 1/10 < 1/100 < 1/1000 \rightarrow 10^{-3} < 1/1000 < 10^{-2} \Rightarrow -3 < \log_{10} 1/1000 < -2$

$\Rightarrow [\log_{10} 1/1000] = -3$

$1 < 4 < 16 \rightarrow 1 < 4 < 16 \rightarrow 1 < \log_2 4 < 2 \rightarrow [\log_2 4] = 1$

$\Rightarrow [\log_{10} 1/1000] + [\log_2 4] = -3 + 1 = -2$

⑨ $\log a^4 = 4 \log a = 4 \times 3,718 = 14,872$

$14 < \log a^4 < 15 \rightarrow 10^{14} < a^4 < 10^{15} \rightarrow$ یک عدد ۱۴ رقمی است

⑩ $4 \log_2 3 = 4 \times 1,585 = 6,340$ ، $4 \log_2 3 = 4 \times 3 \log_2 3 = 4 \times 3^2 = 36$

نتیجه: $\log_c b = \frac{\log a}{\log c}$ ، $\log_c a = \frac{\log b}{\log c}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{10}\right)^{1-\log x} &= \frac{10^{\log x}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{\log x}} = \frac{1}{10^{\log x} \log \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{\log x} \log 10^{-1}} \\ &= \frac{1}{10^{\log x} \cdot (-1)} = \frac{x^{\log 10}}{10} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{الف) } \log_p (x-3)(x+1) = 2 \rightarrow (x-3)(x+1) = p^2 \quad (12)$$

$$x^2 - 2x - 3 = p^2 \rightarrow x^2 - 2x - 3 - p^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \text{ غ. غ. غ}$$

$$\text{ب) } \log_p \frac{x^2 - x + 3}{2x - 1} = 1 \rightarrow \frac{x^2 - x + 3}{2x - 1} = p$$

$$x^2 - x + 3 = 2px - p \rightarrow x^2 - (2p+1)x + 3 + p = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{ج) } \log_p (x-2)(x-4) = 3 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = p^3$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 8 - p^3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \text{ غ. غ. غ}$$

$$\text{د) } \log_p p^{\frac{1}{p}} + \log_p p^{\frac{1}{p}} = \log_p x \rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \log_p x \rightarrow \log_p x = \frac{2}{p}$$

$$p^{\frac{2}{p}} = x \rightarrow x = (p^{\frac{2}{p}})^{\frac{p}{2}} \rightarrow x = p$$

$$\text{الف) } \log_2(x+1)^2 + \log_2^2 x = 3 \rightarrow \log_2(x+1)^2(x) = 3 \quad (13)$$

$$(x^2 + 2x + 1)(2x) = 8 \rightarrow 2x^3 + 4x^2 + 2x = 8 \rightarrow x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0$$

برای حل این معادله درجه 3 کین از لیدار ± 1 ، ± 2 ، ... را امتحان می‌کنیم

$$x=1 \rightarrow 1+2+1-4=0 \rightarrow x=1 \text{ ریشه معادله}$$

برای پیدا کردن ریشه‌های دیگر عبارت را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 \quad | \quad x-1$$

$$\hline x^2 + 3x + 4 \rightarrow x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow \Delta < 0$$

پس تنها ریشه معادله $x=1$ است. و مجموع ریشه‌ها برابر 1 است.

$$\text{ب) } \log_2^2 x + \log_2^4 = 3 \rightarrow \log_2^2 x + \frac{1}{\log_2^2 x} = 3 \rightarrow \log_2^2 x + \frac{1}{\frac{1}{2} \log_2^2 x} = 3$$

$$\log_2^2 x + \frac{2}{\log_2^2 x} = 3$$

$$\text{فرض } \log_2^2 x = a \rightarrow a + \frac{2}{a} = 3$$

$$\log_2^4 = \frac{1}{\log_2^2}$$

$$\rightarrow a^2 + 2 = 3a \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a=1 \rightarrow \log_2^2 x = 1 \rightarrow x=2 \\ a=2 \rightarrow \log_2^2 x = 2 \rightarrow x=4 \end{cases} \rightarrow (2+4=6)$$

$$\log_{\frac{x}{9}} \log_{\frac{x}{9}} - 3 = 0 \rightarrow (\log_{\frac{x}{9}} - \log_{\frac{x}{9}}) \log_{\frac{x}{9}} - 3 = 0 \quad (14)$$

$$\left(\log_{\frac{x}{9}} - 2\right) \log_{\frac{x}{9}} - 3 = 0 \quad \text{فرض } \log_{\frac{x}{9}} = a$$

$$(a-2)a - 3 = 0 \rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \rightarrow \log_{\frac{x}{9}} = -1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{9} \\ a = 3 \rightarrow \log_{\frac{x}{9}} = 3 \rightarrow x_2 = 27 \end{cases}$$

$$x_1 x_2 = \frac{1}{9} \times 27 = 3$$

$$\log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} = -\frac{1}{2} \rightarrow x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \rightarrow x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

$$\rightarrow x^{-1} = x \rightarrow \frac{1}{x} = x$$

$$\log_{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \log_{\frac{x}{2}} (1+x) = \log_{\frac{x}{2}} 1 = 0$$

$$\log_{\frac{x}{2}} (x+1) = 1 \rightarrow \frac{2(x+1)}{x} = 1 \rightarrow 2x+2 = 1 \cdot x \quad (16)$$

$$x+2 = x \rightarrow x = -2 \quad \log_{\frac{x}{2}} = \log_{\frac{-2}{2}} = \log_{-1} = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$\log_r (ax+1)x = r \rightarrow (ax+1)x = r^r \rightarrow ax^2 + x - r = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1/r \\ x = \frac{r}{a} \end{cases} \quad \text{GGÉ} \quad (17)$$

$$\log (x^r - x + 1)(x+1) = 1 \rightarrow x^r + 1 = 10^1 \rightarrow x^r = 9 \rightarrow x = \sqrt[r]{9} \quad (18)$$

$$\log_r x = \log_r \sqrt[r]{9} = \log_r 9^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r}$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{!}$$

$$\log_a x = \log_a \left(\frac{1}{x^r}\right) + \frac{9}{a} \rightarrow \log_a x - \log_a x^{-r} = \frac{9}{r} \quad (19)$$

$$\log_a x - (-r) \log_a x = \frac{9}{r} \rightarrow r \log_a x = \frac{9}{r}$$

$$\log_a x = \frac{9}{r^2} \rightarrow x = a^{\frac{9}{r^2}} \rightarrow r^2 = 27$$

$$\log_a r = \frac{1}{\log_a a} - \frac{1}{r} \rightarrow \log_a r = \log_a a - \frac{1}{r} \quad (20)$$

$$\rightarrow \log_a r = \log_a r^2 - \frac{1}{r} \rightarrow \log_a r = 2 \log_a r - \frac{1}{r} \rightarrow \log_a r = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r} = r \xrightarrow{\text{بجواب}} a = r^9 = 4^9$$

$$x^{\log_a x} = 42a \rightarrow x^{\log_a x} = a^k \rightarrow \text{نشان طاقب را صادر کنیم} \quad (21)$$

$$\log_a x^{\log_a x} = \log_a a^k \rightarrow (\log_a x)(\log_a x) = k$$

$$\log_a x = 2 \rightarrow x = a^2 = 4a$$

$$\log_a x = -2 \rightarrow x = a^{-2} = \frac{1}{4a}$$