تاریخ :	وقت : دقیقه	
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۰	سریال ۳۹۱۷۶۳
موضوع		علیرضا فیضیان

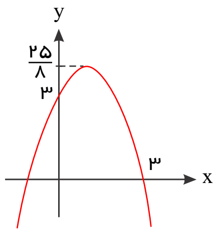
۱. اگر α و β ریشه‌های $x^2-(m+3)x+8=0$ باشند، مقدار m کدام باشد تا α و β و $\alpha+\beta$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند؟

۱) $m=9$ یا $m=-3$ ۲) $m=-9$ یا $m=3$ ۳) $m=9$ یا $m=3$ ۴) $m=-9$ یا $m=-3$

۲. اگر بین مقادیری که تابع $f(x)=x^2+(4m-1)x+1$ را صفر می‌کند، رابطه‌ی $x'-x''=\sqrt{x'}+\sqrt{x''}$ برقرار باشد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

۱) $\{\frac{3}{4}\}$ ۲) $\{-\frac{1}{2}\}$ ۳) $\{\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\}$ ۴) $\{2\}$

۳. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است، a کدام است؟



۱) $-\frac{2}{9}$ ۲) $-\frac{1}{9}$

۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{2}{5}$

۴. نقطهٔ A روی خط $y=2x-1$ طوری قرار دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطهٔ $B(0,-1)$ و $C(2,3)$ برابر $\sqrt{45}$ است. فاصلهٔ A از مبدأ مختصات کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۵. دایره‌ای به مساحت 9π بر دو خط موازی و غیرمنطبق $3x-4y=1$ و $8y+nx=m$ مماس است. مقدار $m+3n$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) -20 ۲) 40 ۳) -60 ۴) 80

۶. در مثلث ABC با رئوس $A(1,1)$، $B(2,-1)$ و $C(6,2)$، فاصلهٔ ارتفاع رسم شده از رأس A و عمودمنصف وارد بر ضلع BC کدام است؟

۱) ۲٫۱   ۲) ۲٫۴   ۳) ۲٫۷   ۴) ۳

۷. اگر در معادلهٔ درجه دوم $x^2-(m+1)x+m=0$, $m>0$ و یکی از ریشه‌ها از دو برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر باشد، m کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) ۳   ۴) ۱

۸. در مربع $ABCD$، مختصات رأس A به صورت $A(3,2)$ است و ضلع BC روی خط $y=kx+1$ قرار دارد. اگر مساحت این مربع ۵ باشد، حاصل جمع مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۹. مجموع فواصل نقطهٔ $A(\alpha,2\alpha)$ تا دو نقطهٔ مبدأ مختصات و $M(2,4)$، برابر $2\sqrt{5}$ است. دقیق‌ترین محدودهٔ α کدام است؟

۱) $\alpha\in\mathbb{R}$ ۲) $\alpha\leq 0$ ۳) $\alpha>2$ ۴) $\alpha\in[0,2]$

۱۰. خطوط $y=2$، $y=5$ و $3x-4y+11=0$ منطبق بر سه ضلع یک لوزی هستند. کدام‌یک از نقاط زیر می‌تواند یکی از رئوس این لوزی باشد؟

۱) $(-6,2)$ ۲) $(4,5)$ ۳) $(8,2)$ ۴) $(-1,5)$

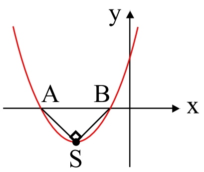
۱۱. مثلث ABC با رئوس $A(-1,2)$، $B(3,2m+1)$ و $C(-2,-2)$ در رأس A قائمه است. طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ۲) $\frac{17}{6}$ ۳) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ ۴) $\sqrt{34}$

۱۲. به ازای چه مقدار از a، مینیمم تابع $y=ax^2-4x+a$، برابر ۲ است؟

۱) $1-\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $\sqrt{5}-1$

۱۳. نمودار تابع $y=5x^2+12x+a$ به صورت مقابل است. اگر مثلث ABS در رأس S قائمه باشد، مقدار a کدام است؟ (S رأس سهمی است.)



۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۱۴. اگر $x=-1$ تنها صفر تابع $f(x)=\frac{ax^2+2x-1}{9x^2+ax+b}$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۱۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x-5=0$ باشند، حاصل $\alpha^3+14\beta$ کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۴۲ ۳) ۷۲ ۴) -27

۱۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(2x-3)=4$ باشند، کدام معادله دارای ریشه‌های $\frac{2}{\beta}-1$ و $\frac{2}{\alpha}-1$ می‌باشد؟

۱) $2x^2+7x-1=0$ ۲) $2x^2+5x-1=0$

۳) $2x^2-7x+1=0$ ۴) $2x^2-5x+1=0$

۱۷. اگر معادله‌ی $\frac{x}{x-2}+\frac{x+a}{x^2-4}=1$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) -4 ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) -20

۱۸. معادله‌ی $\sqrt{\sqrt{x+3}-x}=1+\sqrt{1-x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹. اگر نقطهٔ $A(0,6)$ قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ $M(4,7)$ باشد، مجموع طول و عرض نقطهٔ B کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۰. به ازای چه حدودی از a تابع درجه دوم $f(x)=(a-1)x^2-2\sqrt{3}x+(a+1)$، از ناحیه سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

۱) $a\geq 2$ ۲) $1\leq a\leq 2$ ۳) R ۴) $a>1$

تاریخ :	وقت : دقیقه
نام و نام خانوادگی :	تعداد سوالات: ۲۰
موضوع	علیرضا فیضیان

سریال ۳۹۱۷۶۳

۱.گزینه ۲ نکته‌ی ۱: اگر a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه b واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c است؛ یعنی:

$$b=\frac{a+c}{۲}$$

نکته‌ی ۲: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه: $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ و $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

α، β و $\alpha+\beta$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، پس مطابق نکته داریم:

$$\beta=\frac{\alpha+(\alpha+\beta)}{۲}\Rightarrow ۲\beta=۲\alpha+\beta\Rightarrow\beta=۲\alpha$$

از طرفی چون α و β ریشه‌های $x^{۲}-(m+۳)x+۸=۰$ هستند، داریم:

$$\begin{cases}P=\alpha\beta=۸\\ S=\alpha+\beta=m+۳\end{cases}$$

$$\alpha+\beta=m+۳\xrightarrow{\beta=۲\alpha}۳\alpha=m+۳\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{m+۳}{۳}\\ \beta=\frac{۲}{۳}(m+۳)\end{cases}\qquad(*)$$

$$\alpha\beta=۸\xrightarrow{(*)}\frac{۲}{۹}(m+۳)^{۲}=۸\Rightarrow(m+۳)^{۲}=۳۶\Rightarrow m+۳=\pm۶\Rightarrow m=۳\ ya\ m=-۹$$

۲.گزینه ۲ اگر x' و x'' جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ باشند، در این صورت طرفین رابطه داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x'-x'')^{۲}=(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})^{۲}\Rightarrow x'^{۲}+x''^{۲}-۲x'x''=x'+x''+۲\sqrt{x'x''}$$

$$\Rightarrow(S^{۲}-۲P)-۲P=S+۲\sqrt{P}\Rightarrow S^{۲}-۴P-S-۲\sqrt{P}=۰\qquad(۱)$$

$$S=-\frac{b}{a}\Rightarrow S=۱-۴m\ ,\ P=\frac{c}{a}\Rightarrow P=۱\xrightarrow{(۱)}(۱-۴m)^{۲}-۴-(۱-۴m)-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۱۶m^{۲}-۴m-۶=۰\Rightarrow ۸m^{۲}-۲m-۳=۰\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲},m=\frac{۳}{۴}$$

اما اگر $m=\frac{۳}{۴}$، آن‌گاه $x'=x''=-۱$ که غیرقابل‌قبول‌اند پس $m=-\frac{۱}{۲}$

۳.گزینه ۳

$$f(۰)=۳\Rightarrow c=۳\Rightarrow f(x)=ax^{۲}+bx+۳$$

یکی از ریشه‌ها $x=۳$ است، پس $f(۳)=۰$ می‌باشد.

$$۹a+۳b+۳=۰\xrightarrow{\div۳}۳a+b+۱=۰$$

عرض رأس سهمی هم $\frac{۲۵}{۸}$ است.

$$\frac{-\Delta}{۴a}=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow-\frac{b^{۲}-۴a(۳)}{۴a}=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow-b^{۲}+۱۲a=\frac{۲۵}{۲}a\xrightarrow{\times۲}-۲b^{۲}+۲۴a=۲۵a\Rightarrow a=-۲b^{۲}$$

به‌جای a در معادله‌ی $۳a+b+۱=۰$ مقدار $-۲b^{۲}$ را قرار می‌دهیم.

$$۳(-۲b^{۲})+b+۱=۰\Rightarrow-۶b^{۲}+b+۱=۰\Rightarrow ۶b^{۲}-b-۱=۰$$

$$b=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۲۴}}{۲(۶)}=\frac{۱\pm۵}{۱۲}\begin{cases}\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۴}{۱۲}=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

چون $a<۰$ و طول رأس سهمی $(-\frac{b}{۲a})$ هم مثبت است پس باید $b>۰$ باشد و $b=-\frac{۱}{۳}$ قابل قبول نیست.

$b=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=-۲b^{۲}=-۲(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{-۱}{۲}$

۴.گزینه ۴   مختصات A را به‌صورت $(x,۲x-۱)$ در نظر می‌گیریم:

$$\overline{AB}+\overline{AC}=\sqrt{۴۵}\Rightarrow\sqrt{x^{۲}+(۲x-۱+۱)^{۲}}+\sqrt{(x-۲)^{۲}+(۲x-۱-۳)^{۲}}=\sqrt{۴۵}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۵}|x|+\sqrt{۵}|x-۲|=۳\sqrt{۵}\Rightarrow|x|+|x-۲|=۳$$

$$x\geq ۲: x+x-۲=۳\Rightarrow x=۲٫۵\Rightarrow A_{۱}(۲٫۵,۴)$$

$$۰<x<۲: x-x+۲=۳\Rightarrow ۲=۳ \quad \text{غقق}$$

$$x\leq ۰: -x-x+۲=۳\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow A_{۲}(-۰٫۵,-۲)$$

$$OA_{۱}=\sqrt{۶٫۲۵+۱۶}=\sqrt{۲۲٫۲۵}=\frac{\sqrt{۸۹}}{۲}$$

$$OA_{۲}=\sqrt{۰٫۲۵+۴}=\sqrt{۴٫۲۵}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

۵.گزینه ۲   مساحت دایره برابر ۹π است، پس شعاع آن برابر $r=۳$ است.

طرفین معادلهٔ $۳x-۴y=۱$ را در -۲ ضرب می‌کنیم:

$$۸y-۶x=-۲$$

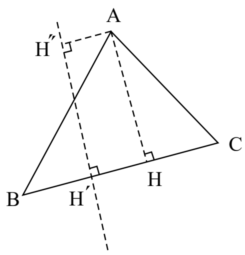
دو خط $۸y-۶x=-۲$ و $۸y+nx=m$ موازی‌اند، پس $n=-۶$. فاصلهٔ دو خط موازی باید برابر قطر دایره یعنی ۶ باشد:

$$\frac{|m+۲|}{\sqrt{۶۴+۳۶}}=۶\Rightarrow|m+۲|=۶۰\Rightarrow\begin{cases}m=۵۸\\ m=-۶۲\end{cases}$$

$$m+۳n=۵۸+(-۱۸)=۴۰$$

$$m+۳n=-۶۲+(-۱۸)=-۸۰$$

۶.گزینه ۱   طبق شکل مقابل فاصله ارتفاع رأس A تا عمود منصف BC همان فاصلهٔ نقطهٔ A تا عمود منصف BC است، پس معادلهٔ عمودمنصف BC را یافته و فاصلهٔ A را تا این خط به‌دست می‌آوریم:



$$B(۲,-۱),C(۶,۲)\rightarrow H'=\frac{B+C}{۲}\Rightarrow H'(۴,\frac{۱}{۲})$$

$$mBC=\frac{yC-yB}{xC-xB}=\frac{۲-(-۱)}{۶-۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \text{شیب عمود منصف}=-\frac{۴}{۳}$$

$$y-\frac{۱}{۲}=-\frac{۴}{۳}(x-۴)\xrightarrow{\times ۶}۶y-۳=-۸x+۳۲\Rightarrow ۸x+۶y-۳۵=۰$$

$$A=(۱,۱)\Rightarrow AH''=\frac{|۸+۶-۳۵|}{\sqrt{۶۴+۳۶}}=\frac{۲۱}{۱۰}=۲٫۱$$

۷.گزینه ۱   یکی از ریشه‌ها از دو برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر است، پس:

$$x_{۲}=۲x_{۱}+۳,\ S=x_{۱}+x_{۲}=m+۱\Rightarrow x_{۱}+۲x_{۱}+۳=m+۱$$

$$\Rightarrow ۳(x_{۱}+۱)=m+۱\Rightarrow x_{۱}=\frac{m}{۳}-\frac{۲}{۳}\Rightarrow x_{۲}=۲(\frac{m}{۳}-\frac{۲}{۳})+۳$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{2m}{3}+\frac{5}{3}\ ,\ P=x_1\cdot x_2=m\Rightarrow (\frac{m}{3}-\frac{2}{3})(\frac{2m}{3}+\frac{5}{3})=m$$

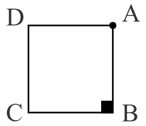
$$\Rightarrow \frac{2m^2}{9}+\frac{5m}{9}-\frac{4m}{9}-\frac{10}{9}=m\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در ۹}}2m^2+m-10=9m$$

$$\Rightarrow 2m^2-8m-10=0\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}}m^2-4m-5=0$$

$$\Rightarrow (m+1)(m-5)=0\Rightarrow\begin{cases}m=-1 & \text{غ ق ق}\ (m>0)\\ m=5\end{cases}$$

۸.گزینه ۳ نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,2)$ از خط $y-kx-1=0$ برابر طول ضلع مربع است. از آنجا که مساحت مربع برابر ۵ است، طول ضلع مربع برابر $\sqrt{5}$ است، پس با توجه به نکتهٔ بالا می‌توان نوشت:



$$\sqrt{5}=\frac{|2-3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}\Rightarrow\sqrt{5}\times\sqrt{k^2+1}=|-3k+1|\xrightarrow{\text{توان ۲}}5(k^2+1)=(-3k+1)^2$$

$$\Rightarrow 5k^2+5=9k^2-6k+1\Rightarrow 4k^2-6k-4=0\Rightarrow 2k^2-3k-2=0$$

راه حل اول: ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\Delta=(-3)^2-4(2)(-2)=25\Rightarrow k_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}\Rightarrow k_1=2\ \text{یا}\ k_2=-\frac{1}{2}$$

بنابراین: $k_1+k_2=2+(-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$

راه حل دوم:

نکته: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

با توجه به نکته، چون معادلهٔ حاصل دارای دو ریشه است $(\Delta>0)$، پس مجموع مقادیر قابل قبول برای k برابر $-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$ است.

۹.گزینه ۴ نکته: $\sqrt{u^2}=|u|$

نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با: $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

طبق فرض، مجموع فواصل نقطهٔ $A(\alpha,2\alpha)$ تا نقطهٔ $O(0,0)$ و $M(2,4)$، برابر $2\sqrt{5}$ است، بنابراین با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$OA+AM=\sqrt{\alpha^2+4\alpha^2}+\sqrt{(\alpha-2)^2+(2\alpha-4)^2}=\sqrt{5\alpha^2}+\sqrt{5(\alpha-2)^2}$$

$$=\sqrt{5}\times\sqrt{a^2}+\sqrt{5}\times\sqrt{(\alpha-2)^2}\Rightarrow\sqrt{5}(|\alpha|+|\alpha-2|)=2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |\alpha|+|\alpha-2|=2\Rightarrow\begin{cases}\alpha\geq 2: 2\alpha-2=2\Rightarrow\alpha=2\\ 0\leq\alpha\leq 2:\alpha+2-\alpha=2\ \checkmark & \text{همواره برقرار}\\ \alpha\leq 0:-\alpha+2-\alpha=2\Rightarrow\alpha=0\end{cases}$$

بنابراین دقیق‌ترین محدودهٔ α عبارت است از: $[0,2]$

۱۰.گزینه ۱ نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با: $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

دو خط $y=2$ و $y=5$ موازی هستند. محل تلاقی این دو خط با خط $3x-4y+11=0$ را که دو رأس لوزی هستند، پیدا می‌کنیم.

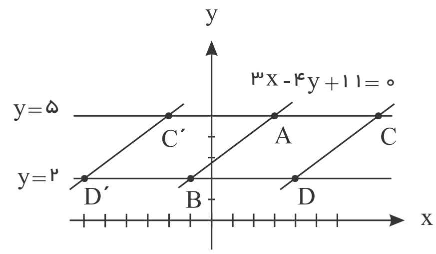
$$\begin{cases}3x-4y+11=0\\ y=5\end{cases}\Rightarrow 3x-20+11=0\Rightarrow x=3\Rightarrow A(3,5)$$

$$\begin{cases}3x-4y+11=0\\ y=2\end{cases}\Rightarrow 3x-8+11=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow B(-1,2)$$

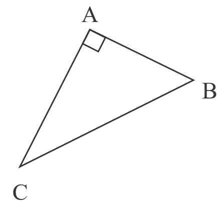
فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B طول ضلع لوزی می‌باشد، که برابر است با:

$$AB=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

دو رأس دیگر می‌توانند سمت راست یا چپ ضلع AB باشند، اگر سمت راست باشند، با توجه به اینکه طول ضلع لوزی برابر ۵ است، مختصات آن‌ها به‌صورت $C(۳+۵,۵)$ و $D(-۱+۵,۲)$؛ یعنی $C(۸,۵)$ و $D(۴,۲)$ است و اگر سمت چپ باشند، مختصات آن‌ها به‌صورت $C'(۳-۵,۵)$ و $D'(-۱-۵,۲)$؛ یعنی $C'(-۲,۵)$ و $D'(-۶,۲)$ است. فقط نقطهٔ $(-۶,۲)$ در گزینه‌ها وجود دارد. بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.



۱۱.گزینه ۳ **از آن‌جا که مثلث در رأس A قائمه است، داریم:**



$$mAB=\frac{۲m+۱-۲}{۳-(-۱)}=\frac{۲m-۱}{۴}$$

$$mAC=\frac{-۲-۲}{-۲-(-۱)}=۴$$

$$AB\perp AC\Rightarrow mAB\times mAC=-۱\Rightarrow\frac{۲m-۱}{۴}\times ۴=-۱\Rightarrow ۲m-۱=-۱\Rightarrow m=۰$$

معادلهٔ ضلع BC را می‌نویسیم:

$$\begin{cases}B(۳,۱)\\C(-۲,-۲)\end{cases}\Rightarrow mBC=\frac{-۲-۱}{-۲-۳}=\frac{۳}{۵}$$

$$BC: y-۱=\frac{۳}{۵}(x-۳)\Rightarrow ۵y-۵=۳x-۹\Rightarrow ۳x-۵y-۴=۰$$

طول ارتفاع AH برابر فاصلهٔ رأس A تا ضلع BC است.

$$AH=\frac{|۳(-۱)-۵(۲)-۴|}{\sqrt{۳^۲+(-۵)^۲}}=\frac{۱۷}{\sqrt{۳۴}}\Rightarrow AH=\frac{۱۷}{\sqrt{۳۴}}\times\frac{\sqrt{۳۴}}{\sqrt{۳۴}}=\frac{\sqrt{۳۴}}{۲}$$

۱۲.گزینه ۲ **طبق فرض مسئله داریم:**

$$\text{طول نقطه مینیمم}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۴)}{۲a}=\frac{۴}{۲a}=\frac{۲}{a}$$

$$y=ax^۲-۴x+a\Rightarrow ۲=a(\frac{۲}{a})^۲-۴(\frac{۲}{a})+a\Rightarrow ۲=\frac{۴}{a}-\frac{۸}{a}+a\xrightarrow{\times a}۲a=۴-۸+a^۲\Rightarrow a^۲-۲a-۴=۰$$

$$\Rightarrow\Delta=۴+۱۶=۲۰\rightarrow a=\frac{۲\pm ۲\sqrt{۵}}{۲}=۱\pm\sqrt{۵}$$

نکته: باتوجه به اینکه سهمی دارای نقطه‌ی می نیمم است. پس ضریب $x^۲$ باید مثبت باشد. یعنی $a>۰$ است.

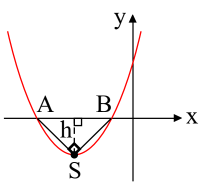
$a_۱=۱+\sqrt{۵}$ **ق ق**

$a_۲=۱-\sqrt{۵}$ **غ ق ق**

۱۳.گزینه ۱ **نکته: در تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$، مختصات رأس سهمی $S\left|\begin{matrix}-\frac{b}{۲a}\\-\frac{\Delta}{۴a}\end{matrix}\right.$ و تفاضل ریشه ها برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.**

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

نکته: در مثلث متساوی‌الساقین، میانه، ارتفاع و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند.



چون S، رأس سهمی است، پس $SA=SB$ و در نتیجه $\overset{\Delta}{ABS}$ متساوی‌الساقین نیز می‌باشد. بنابراین ارتفاع وارد بر وتر AB، میانه هم هست. پس: $h=\frac{|AB|}{۲}$

$$\begin{cases} |AB| = |\text{تفاضل ریشه‌های سهمی}| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{۵} \\ h = |\text{عرض رأس سهمی}| = \left|\dfrac{-\Delta}{۲۰}\right| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\Delta}{۲۰}\right| = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{\Delta}}{۵} \Rightarrow \left|\frac{\Delta}{۲}\right| = \sqrt{\Delta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\Delta^۲}{۴} = \Delta \Rightarrow \Delta^۲ - ۴\Delta = ۰$$

$$\xrightarrow[\text{دوریشه‌ی متمایز دارد}]{\text{زیرا معادله}\ \ \Delta \neq ۰} \Delta = ۴ \Rightarrow \Delta = ۱۲^۲ - ۴(۵a) = ۱۴۴ - ۲۰a = ۴ \Rightarrow ۲۰a = ۱۴۰ \Rightarrow a = ۷$$

۱۴.گزینه ۲ نکتهٔ ۱: صفر یک تابع یعنی عددی که به‌ازای آن مقدار تابع برابر صفر باشد.

نکتهٔ ۲: در معادلات شامل عبارت‌های گویا، جوابی که مخرج کسرهای معادله را صفر کند، قابل قبول نیست.

$$\frac{ax^۲ + ۲x - ۱}{۹x^۲ + ax + b} = ۰ \Rightarrow ax^۲ + ۲x - ۱ = ۰$$

$x = -۱$ صفر این معادله است، پس داریم:

$$a(-۱)^۲ + ۲(-۱) - ۱ = ۰ \Rightarrow a - ۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

پس معادله به‌صورت $۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$ است. اگر $x = -۱$ بخواهد تنها صفر این معادله باشد، دو حالت وجود دارد:

حالت ۱:باید $x = -۱$ ریشهٔ مضاعف $۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$ باشد که چون $\Delta = ۱۶$، امکان‌پذیر نیست.

حالت ۲: ریشهٔ دیگر معادله، ریشهٔ مخرج هم باشد و در نتیجه قابل قبول نباشد:

$$۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶ \Rightarrow x = -۱ \quad \text{یا} \quad x = \frac{۱}{۳}$$

پس $x = \frac{۱}{۳}$ ریشهٔ مخرج است:

$$۹(\frac{۱}{۳})^۲ + ۳(\frac{۱}{۳}) + b = ۰ \Rightarrow ۱ + ۱ + b = ۰ \Rightarrow b = -۲$$

۱۵.گزینه ۱ نکته: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، داریم: $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \quad , \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

چون α ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲ - ۳x - ۵ = ۰$ است، پس در آن صدق می‌کند، بنابراین:

$$\alpha^۲ - ۳\alpha - ۵ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ = ۳\alpha + ۵ \Rightarrow \alpha^۳ = ۳\alpha^۲ + ۵\alpha \xlongequal{\alpha^۲ = ۳\alpha + ۵} ۳(۳\alpha + ۵) + ۵\alpha = ۱۴\alpha + ۱۵$$

با جایگذاری این مقدار داریم:

$$\alpha^۳ + ۱۴\beta = ۱۴\alpha + ۱۵ + ۱۴\beta = ۱۴(\alpha + \beta) + ۱۵ = ۱۴S + ۱۵ = ۱۴ \times ۳ + ۱۵ = ۵۷$$

۱۶.گزینه ۳

روش اول:

$$x(۲x - ۳) = ۴ \rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها معکوس شوند}} -۴x^۲ - ۳x + ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}\ (-۲)\ \text{برابر شوند}} -۴x^۲ + (-۲)(-۳x) + (-۲)^۲(۲) = ۰ \rightarrow -۴x^۲ + ۶x + ۸ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه‌ها افزوده شود}} -۴(x - ۱)^۲ + ۶(x - ۱) + ۸ = ۰$$

$$\rightarrow -۴x^۲ + ۸x - ۴ + ۶x - ۶ + ۸ = ۰ \rightarrow -۴x^۲ + ۱۴x - ۲ = ۰ \rightarrow +۲x^۲ - ۷x + ۱ = ۰$$

روش دوم:

$$۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{۳}{۲}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۲$$

$$S = ۱ - \frac{۲}{\alpha} + ۱ - \frac{۲}{\beta} = ۲ - \frac{۲(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = ۲ - \frac{۲(\frac{۳}{۲})}{-۲} = \frac{۷}{۲}$$

$$P = (۱ - \frac{۲}{\alpha})(۱ - \frac{۲}{\beta}) = ۱ - ۲(\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}) + \frac{۴}{\alpha\beta} = ۱ - ۲\left(\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}\right) + \frac{۴}{-۲} = ۱ + \frac{۳}{۲} - ۲ = \frac{۱}{۲} \rightarrow x^۲ - Sx + P = ۰$$

$$\rightarrow x^۲ - \frac{۷}{۲}x + \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۷x + ۱ = ۰$$

۱۷.گزینه ۴ ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x(x+2)+x+a}{x^2-4}=1 \Rightarrow x^2+3x+a=x^2-4 \Rightarrow 3x+a=-4 \Rightarrow x=\frac{-4-a}{3}$$

برای این‌که ریشه بدست آمده قابل قبول نباشد باید مخرج کسر را صفر کند پس ابتدا ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌اوریم:

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{-4-a}{3}} \begin{cases} \frac{-4-a}{3}=2 \Rightarrow -4-a=6 \Rightarrow a=-10 \\ \frac{-4-a}{3}=-2 \Rightarrow -4-a=-6 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a $=-10\times 2=-20$

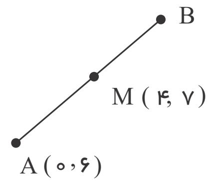
۱۸.گزینه ۲ طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+3}-x=1+1-x+2\sqrt{1-x}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+3}=2+2\sqrt{1-x} \Rightarrow x+3=4+4-4x+8\sqrt{1-x}$$
$$\Rightarrow 5x-5=8\sqrt{1-x} \Rightarrow 25(x-1)^2=64(1-x) \Rightarrow 25(x-1)^2+64(x-1)=0$$
$$\Rightarrow (x-1)(25x-25+64)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot(25x+39)=0$$

$\rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{39}{25} \end{cases}$ جواب $x=-\frac{39}{25}$ در معادله صدق نمی‌کند و معادله دارای یک جواب $x=1$ است.

۱۹.گزینه ۴ اگر نقطهٔ A را نسبت به نقطهٔ M قرینه کنیم تا نقطهٔ B به‌دست آید، نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است. داریم:

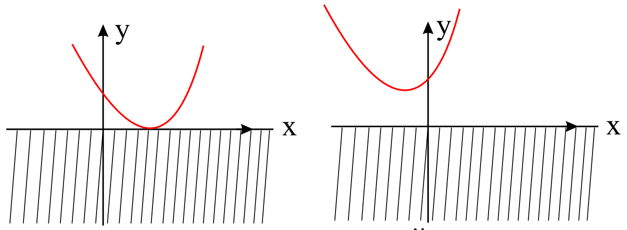
$$M\left|\begin{array}{l} xM=\frac{xA+xB}{2} \Rightarrow xB=2xM-xA \\ yM=\frac{yA+yB}{2} \Rightarrow yB=2yM-yA \end{array}\right.$$



در نتیجه مختصات نقطهٔ B به‌صورت زیر است:

$$B\left|\begin{array}{l} x=2(4)-0=8 \\ y=2(7)-6=8 \end{array}\right. \Rightarrow xB+yB=8+8=16$$

۲۰.گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر باشد.



توجه: برای اینکه یک سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب x^2 مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه نداشته باشد باید $\Delta\leq 0$

تابع باید مینیمم داشته باشد. $\Rightarrow a-1>0 \rightarrow a>1 \quad (1)$

$$\Delta\leq 0 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4(a-1)(a+1)\leq 0$$
$$\Rightarrow 12-4a^2+4\leq 0 \Rightarrow 4a^2\geq 16 \Rightarrow a^2\geq 4 \Rightarrow |a|\geq 2$$

$\Rightarrow a\leq -2$ یا $a\geq 2 \quad (2)$

$$\xrightarrow{(1)\bigcap(2)} a\geq 2$$