

درس ۱: استدلال ریاضی

۱- درست و یا نادرستی گزاره زیر را بررسی کنید:

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

۲- با توجه به رابطه $2^{25} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ یک حکم کلی بنویسید و آن را رد کنید.

۳- هر یک از گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پ) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ تر از $1, 1 - 2^n$ عدد اول است.

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ج) اگر برای هر سه مجموعه A, B, C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$

چ (اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است.

اثبات با در نظر گرفتن همه حالت ها

۴- با در نظر گرفتن همه حالت های ممکن برای عدد n ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.

۵- ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$

۶- اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.

۷- $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است و $n \in S$ ، ثابت کنید اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

یک عدد زوج باشد آنگاه $n \in A$

اثبات غیرمستقیم

۸- ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۹- ثابت کنید حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱۰- a_1, a_2, a_3 و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

۱۱- درستی گزاره های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی g در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

اثبات های بازگشتی / گزاره های هم ارز

۱۲- دو گزاره را گزاره های هم ارز می نامیم هر گاه

۱۳- ثابت کنید اگر P و Q دو گزاره هم ارز باشند آنگاه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

۱۴- ثابت کنید اگر $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست باشد آنگاه P و Q دو گزاره هم ارز هستند.

۱۵- اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام یک از ترکیب های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

ب) $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

۱۶- با استفاده از هم ارزی ثابت کنید اگر $a > 0$ آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$

۱۷- با استفاده از هم ارزی ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۱۸- اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید: $a^2 + ab + b^2 \geq 0$

۱۹- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم ارزند؟

پاسخ گویی در منزل:	پاسخ گویی در کلاس:
--------------------	--------------------

۲۰- گزاره های زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x, y, z داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

۲۱- عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$

۲۲- اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.

۲۳- آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

۲۴- آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$$

۲۵- گزاره های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

تمرین های اضافی

۲۶- ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است.

پاسخ: فرض کنیم x و y فرد باشند بنابراین:

$$\begin{cases} x = 2m + 1, m \in \mathbb{Z} \\ y = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x \times y = 2(2mk + m + k) + 1, 2mk + m + k \in \mathbb{Z}$$

لذا $x + y$ فرد است.

۲۷- ثابت کنید اگر عددی به ۵ ختم شود آنگاه مجذور آن بر ۲۵ بخشپذیر است.

پاسخ: اگر x به ۵ ختم شود آنگاه $x = 10k + 5$ لذا :

$$x^2 = 100k^2 + 100k + 25 = 25(4k^2 + 4k + 1)$$

لذا x^2 بر ۲۵ بخشپذیر است.

۲۸- ثابت کنید اگر عددی به ۵ ختم شود آنگاه مجذور آن نیز به ۵ ختم می شود.

پاسخ: اگر x به ۵ ختم شود آنگاه $x = 10k + 5$ لذا :

$$x^2 = 100k^2 + 100k + 25 = 100k^2 + 100k + 20 + 5 = 10(10k^2 + 10k + 2) + 5$$

لذا x^2 نیز به ۵ ختم می شود

۲۹- نشان دهید مجموع سه عدد زوج متوالی مضرب ۶ است.

پاسخ: سه عدد زوج متوالی $2x$ و $2x + 2$ و $2x + 4$ را در نظر می گیریم.

$$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 6x + 6 = 6(x + 1)$$

بنابراین جمع آنها بر ۶ بخش پذیر است.

۳۰- نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $8q + 1$ ، $(q \in \mathbb{Z})$ می باشد.

پاسخ: هر عدد فرد به صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ می باشد.

$$(4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8q + 1$$

$$(4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(2k^2 + 3k + 2) + 1 = 8q + 1$$

۳۱- نشان دهید اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه $n^2 - 1$ مضرب ۳ است.

پاسخ: اگر عدد صحیح n مضرب ۳ نباشد آنگاه $n = 3k + 1$ یا $n = 3k + 2$

$$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3q + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 3q$$

$$n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3q + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 3q$$

۳۲- نشان دهید اگر $n = 5q + 1$ آنگاه $n^2 = 5q' + 1$

$$n^2 = (5q + 1)^2 = 25q^2 + 10q + 1 = 5(5q^2 + 2q) + 1 = 5q' + 1$$

پاسخ:

۳۳- نشان دهید اگر باقیمانده تقسیم n بر ۵ برابر ۲ باشد آنگاه $n^2 + 1$ بر ۵ بخش پذیر است.

پاسخ: اگر باقیمانده ی عدد n بر ۵ برابر ۲ باشد آنگاه $n = 5k + 2$ بنابراین :

$$n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$$

۳۴- نشان دهید اگر باقیمانده تقسیم n بر ۵ برابر ۳ باشد آنگاه $n^2 + 1$ بر ۵ بخش پذیر است.

پاسخ: اگر باقیمانده ی عدد n بر ۵ برابر ۲ باشد آنگاه $n = 5k + 3$ بنابراین :

$$n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1 = 5(5k^2 + 6k + 2)$$

۳۵- نشان دهید اگر باقیمانده تقسیم n بر ۵ برابر ۴ باشد آنگاه $n^2 - 1$ بر ۵ بخش پذیر است.

پاسخ: اگر باقیمانده ی عدد n بر ۵ برابر ۲ باشد آنگاه $n = 5k + 4$ بنابراین :

$$n^2 - 1 = (5k + 4)^2 - 1 = 25k^2 + 40k + 16 - 1 = 5(5k^2 + 8k + 3)$$

۳۶- نشان دهید اگر n فرد باشد $n(n+2)$ نیز فرد است.

پاسخ:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n(n+2) = (2k+1)(2k+3) = 4k^2 + 8k + 3 = 2(2k^2 + 4k + 1) + 1$$

۳۷- نشان دهید اگر مجموع دو عدد صحیح زوج باشد تفاضل آنها نیز زوج است.

پاسخ :

$$m + n = 2k \Rightarrow m + n - 2n = 2k - 2n \Rightarrow m - n = 2(k - n)$$

۳۸- نشان دهید تفاضل مربعات دو عدد فرد عددی زوج است.

پاسخ : می دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8q + 1$ است . بنابراین اگر x و y فرد باشند داریم

$$x^2 = 8q + 1 \text{ و } y^2 = 8q' + 1 \text{ لذا}$$

$$x^2 - y^2 = 8q - 8q' = 2(4q - 4q')$$

۳۹- نشان دهید تفاضل مکعبات دو عدد فرد عددی زوج است.

پاسخ :

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\ y^3 = 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1 \end{cases} \\ \Rightarrow x^3 - y^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k - 4m^3 - 6m^2 - 3m)$$

۴۰- نشان دهید حاصلضرب دو عدد گویا، عددی گویا است.

پاسخ: هر دو عدد گویا به صورت $\frac{m_1}{n_1}$ و $\frac{m_2}{n_2}$ می باشند که در آن اعداد m_1 و m_2 صحیح و اعداد n_1 و n_2 طبیعی می باشند. بنابراین:

$$\frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}$$

در کسر اخیر واضح است که صورت عددی صحیح و مخرج طبیعی است پس کسر ما عددی گویا است.

۴۱- نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n, n-1, 2^{3n}-1$ بر ۷ بخش پذیر است.

پاسخ: با توجه به اتحاد $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

داریم:

$$\begin{aligned} 2^{3n} - 1 &= (2^3)^n - 1 = 8^n - 1 = (8-1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8^2 + 8 + 1) \\ &= 7(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8^2 + 8 + 1) = 7q \end{aligned}$$

۴۲- نشان دهید برای هر عدد صحیح n عدد

$$[7 + (n+1)^2 - 1]n^2 \text{ بر } 8 \text{ بخش پذیر است.}$$

۴۳- نشان دهید اگر n فرد باشد آنگاه $n^2 + 3$ مضرب ۴ است.

۴۴- نشان دهید حاصلضرب چهار عدد طبیعی متوالی بعلاوه ۱ مربع کامل می باشد.

۴۵- نشان دهید اگر n^2 به ۵ ختم شود آنگاه n نیز به ۵ ختم می شود.

۴۶- نشان دهید اگر n^2 مضرب ۳ باشد در اینصورت n نیز مضرب ۳ است.

۴۷- نشان دهید اگر برای عدد طبیعی $n, n+1$ مربع کامل باشد آنگاه n به صورت حاصلضرب دو عدد متوالی است.

۴۸- نشان دهید نصف مجموع مربعات دو عدد حقیقی مثبت از حاصلضرب آنها بزرگتر یا مساوی می باشد.

۴۹- از احکام زیر کدام یک قضیه کلی است؟ قضیه کلی است را اثبات کرده و نادرستی دیگری را با یک مثال نقض ثابت کنید.

الف- مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچکتر یا مساوی می باشد.

ب- اگر n فرد باشد آنگاه $n^2 + 3$ مضرب ۴ است.

پاسخ: الف - نادرست . مثال نقض: $\binom{1}{2}^3 \neq \binom{1}{2}^2$ $\Rightarrow \binom{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$ و $\binom{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$

ب - درست .

اثبات:

$$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 4 = 4(k^2 + k + 1)$$

درس ۲ بخش پذیری در اعداد صحیح

۵۰- فرض کنیم $a \neq 0$ و b دو عدد صحیح باشند. b را بر a بخش پذیر می نامیم هرگاه عدد صحیح q موجود باشد به طوری که

۵۱- اگر b بر a بخش پذیر باشد می نویسیم و می خوانیم

۵۲- اگر b بر a بخش پذیر باشد a را

۵۳- با توجه به تعریف رابطه عادی کردن جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

.....|۶۴ -۵|..... |-۳۴ ۱۲|.....

۵۴- ثابت کنید $4^5 | 4^8$

ویژگی های رابطه عادی کردن

۵۵- برای هر عدد صحیح a ثابت کنید

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n : a^m | a^n$$

۵۶- اگر $a | b$ برای هر عدد صحیح m ثابت کنید $a | mb$

۵۷- اگر $a|b$ ثابت کنید: $a|b^2$

۵۸- اگر $a|b$ برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید: $a|b^n$

۵۹- اگر $a|bc$ آیا می توان نتیجه گرفت a حداقل یکی از دو عدد b و c را عادی کند؟

۶۰- اگر $a|b$ برای هر عدد صحیح $m \neq 0$ ثابت کنید: $ma|mb$

۶۱- ثابت کنید اگر $a|b$ و $b|c$ ثابت کنید: $a|c$ (این خاصیت را خاصیت می نامند)

۶۲- با استفاده از خاصیت تعدی برای رابطه عادی کردن، نشان دهید که:

$$(a|b, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow a|b^n$$

۶۳- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می شمارد.

$$\text{حکم} \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow \dots, \dots$$

۶۴- آیا از $a|b+c$ رابطه ی همواره می توان نتیجه گرفت که $a|b$ یا $b|c$

۶۵- اگر $a|b$ و $b \neq 0$ ثابت کنید: $|a| \leq |b|$

۶۶- اگر $a|b$ و $b|a$ ثابت کنید: $a = \pm b$

۶۷- اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $7m+6$ و $6m+5$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$
اثبات:

$$\begin{aligned} a|7m+6 &\Rightarrow a|42m+\dots \\ a|6m+5 &\Rightarrow a|42m+\dots \end{aligned} \Rightarrow$$

۶۸- اگر $a|b$ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n : $a^n|b^n$

۶۹- اگر $a|b$ و $c|d$ ثابت کنید: $ac|bd$

۷۰- $a|b$ و $a|c$ در اینصورت برای هر دو عدد صحیح m و n داریم $a|mb \pm nc$

۷۱- اگر p یک عدد اول باشد و $a|p$ در اینصورت.....

۷۲- اگر n یک عدد صحیح و $3|2n+1$ ثابت کنید $9|4n^2+10n+4$

$$\begin{cases} 3|2n+1 \\ 3|3 \end{cases} \Rightarrow 3|2n+1+3 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

$$\begin{cases} 3|2n+1 \\ 3|\dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow 3 \times 3|(2n+1)(\dots\dots\dots) \Rightarrow 9|\dots\dots\dots$$

۷۳- اگر a و n دو عدد صحیح باشند و $a|3n+1$ و $a|12n+5$ ثابت کنید $a = \pm 1$

بزرگترین مقسوم علیه مشترک:

۷۴- فرض کنیم a و b دو عدد صحیح و حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها

(ب م م) که آنرا با (a, b) نشان می‌دهیم برابر با عدد d است هرگاه d در دو شرط زیر صدق کند.

الف) $d|a$, $d|b$

ب) $(m|a$, $m|b) \Rightarrow m \leq d$

۷۵- جاهای خالی را با عدد مناسب تکمیل کنید.

$(3, 4) = \dots$ $(5, 11) = \dots$ $(25, 18) = \dots$

$(6, 4) = \dots$ $(8, 12) = \dots$ $(24, 30) = \dots$

۷۶- در مورد تمرین قبل در هر مورد مجموعی از مضرب‌های دو عدد به دست آورید که برابر ب م م باشد.

۷۷- چند نکته (خارج از کتاب):

الف- در میان ترکیب‌های مثبت دو عدد ب م م از همه کوچکتر است.

ب- اگر یک ترکیب از دو عدد برابر ۱ باشد در اینصورت ب م م آن‌ها برابر یک است.

۷۸- دو عدد صحیح a و b را نسبت به هم اول می‌نامیم هرگاه

۷۹- کوچکترین مضرب مشترک (ک م م):

فرض کنیم a و b دو عدد صحیح باشند. کوچکترین مضرب مشترک آنها عدد مثبت c است و آنرا با نماد $[a, b]$ نشان می دهیم هرگاه در دو شرط زیر صدق کند.

$$\text{الف- } a|c, b|c$$

$$\text{ب- اگر } a|m, b|m, m > 0 \text{ در اینصورت } c \leq m$$

۸۰- جاهای خالی را با عدد مناسب تکمیل کنید.

$$[3, 4] = \dots \quad [10, 15] = \dots \quad [20, 18] = \dots$$

$$[6, 4] = \dots \quad [8, 12] = \dots \quad [24, 30] = \dots$$

۸۱- اگر $a|b$ ثابت کنید $(a, b) = |a|$ و $[a, b] = |b|$

۸۲- اگر p عددی اول باشد و $p \nmid a$ ثابت کنید $(a, p) = 1$

قضیه تقسیم و کاربردها

۸۳- آیا عدد ۳۷ را می توان بصورت مضربی از عدد ۵ بعلاوه ی عدد صحیح دیگری نوشت؟

پاسخ:

$$37 = 7(5) + \dots \quad 37 = 6(5) + \dots \quad 37 = 5(5) + \dots \quad 37 = 8(5) + \dots$$

$$37 = 9(5) + \dots \quad 37 = 4(5) + \dots \quad 37 = 10(5) + \dots \quad 37 = 3(5) + \dots$$

کدام مورد با بقیه فرق دارد؟ چرا؟

۸۴- (قضیه تقسیم) اگر عددی صحیح a و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به

فرد مانند q و r موجودند که :

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

۸۵- در قضیه تقسیم a را ، b را ، q را و r را می نامیم.

۸۶- در هر مورد q و r را مشخص کنید.

$$a = 23, \quad b = 4$$

$$a = 23, \quad b = 7$$

$$a = -23, \quad b = 7$$

$$a = -23, \quad b = 4$$

۸۷- اگر باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $2m - 5n$ بر ۱۷ را به دست آورید.

۸۸- اگر باقیمانده $18a + 1$ بر ۱۴ برابر ۱۳ باشد در این صورت باقی مانده $3a + 4$ بر عدد ۷ را بدست آورید.

۸۹- اگر باقیمانده اعداد ۱۳۳ و ۵۶ بر عدد b , $1 < b < 20$ برابر باشند در این صورت باقیمانده ۱۵۰ بر b را به دست آورید.

افراز مجموعه \mathbb{Z} به کمک قضیه تقسیم

۹۰- نشان دهید هر عدد صحیح به صورت $2k$ یا $2k + 1$ می باشد.

۹۱- ثابت کنید هر عدد اول بجز ۲ به صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ می باشد.

۹۲- ثابت کنید هر عدد اول بجز ۲ و ۳ به صورت $6k + 1$ یا $6k + 5$ می باشد.

۹۳- نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $8k + 1$ می باشد.

پاسخ گویی در منزل:	پاسخ گویی در کلاس:
--------------------	--------------------

۹۴- فرض کنید $ab = cd$ (a, b, c, d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطه عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۹۵- ثابت کنید اگر $a|b$ آنگاه $a|b, -a|b, a|-b$ و $-a|-b$

۹۶- اگر $a|9k + 4$ و $a|5k + 3$ ثابت کنید a عددی اول است.

۹۷- اگر k یک عدد صحیح باشد و $5|4k + 1$, ثابت کنید: $25|16k^2 + 28k + 6$

۹۸- آیا از روابط $a|b$ و $c|d$ می توان نتیجه گرفت $a+c|b+d$ ؟

۹۹- ثابت کنید

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند .

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند.

۱۰۰- اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q) = 1$ ۱۰۱- اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $m < n$ ثابت کنید:

$$a|b \Rightarrow a^m | b^n$$

-۱۰۲

-۱۰۳

۱۰۴- اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.۱۰۵- اگر a عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ را بیابید.

۱۰۶- اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3 \mid n^3 - n$

۱۰۷- اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

۱۰۸- اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر 3 بخش پذیر است.

۱۰۹- ثابت کنید تفاضل مکعب های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۱۰- ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش پذیر است.

۱۱۱- حاصل هر یک را به دست آورید ($m \in \mathbb{Z}$)

$$\left(\left[m^2, m \right], m^5 \right) =$$

$$\left(2m, 6m^3 \right) =$$

$$(3m+1, 3m+2) =$$

$$\left[m^4, \left(m^2, m^3 \right) \right] =$$

$$[(72, 48), 120] =$$

۱۱۲- اگر n یک عدد صحیح و $3|2n+1$ ثابت کنید $9|4n^2+10n+4$

اثبات:

$$\begin{cases} 3|2n+1 \\ 3|3 \end{cases} \Rightarrow 3|2n+1+3 \Rightarrow 3|2n+4$$

$$\begin{cases} 3|2n+1 \\ 3|2n+4 \end{cases} \Rightarrow 3 \times 3 |(2n+1)(2n+4) \Rightarrow 9|4n^2+10n+4$$

۱۱۳- اگر n و a دو عدد صحیح باشند و $a|3n+1$ و $a|12n+5$ ثابت کنید $a = \pm 1$

اثبات:

$$\begin{matrix} a|3n+1 \\ a|12n+5 \end{matrix} \Rightarrow a|(12n+5) - 4(3n+1) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۱۱۴- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $26|3^{6n}+25$

اثبات:

$$3^3 - 1 \mid (3^3)^{2n} - 1 \Rightarrow 26 \mid 3^{6n} - 1$$

$$\begin{cases} 26 \mid 3^{6n} - 1 \\ 26 \mid 26 \end{cases} \Rightarrow 26 \mid (3^{6n} - 1) + 26 \Rightarrow 26 \mid 3^{6n} + 26$$

۱۱۵- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $10 \mid 3^{4n} - 9$

اثبات:

$$3^2 + 1 \mid (3^2)^{2n+1} + 1 \Rightarrow 10 \mid 3^{4n+2} + 1$$

$$\begin{cases} 10 \mid 3^{4n+2} + 1 \\ 10 \mid 10 \end{cases} \Rightarrow 10 \mid (3^{4n+2} + 1) - 10 \Rightarrow 10 \mid 3^{4n+2} - 9$$

هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

۱۱۶- مجموعه اعدادی را که باقی مانده تقسیم آنها بر عدد m ، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می دهیم. مجموعه های $[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5$ و $[4]_5$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۱۱۷- مجموعه های $[0]_2, [1]_2, [2]_2, [3]_2$ را یک بار با نوشتن اعضا و بار دیگر با نماد ریاضی مشخص کنید.

۱۱۸- اگر $x, y \in [1]_4$ ثابت کنید $4 \mid x - y$.

۱۱۹- اگر $x, y \in [r]_m$ در این صورت حاصل $x - y$ را مشخص کنید.

۱۲۰- برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی m عبارت های زیر را تکمیل کنید.

$$m | a - b \Rightarrow a, b \dots [r]_m$$

$$m \nmid a - b \Rightarrow a, b \dots [r]_m$$

۱۲۱- عدد طبیعی n را در نظر می گیریم . دو عدد صحیح a و b را همنهشت به پیمانان n مینامیم هر گاه

$a - b$ مضرب n باشد. در اینصورت می نویسیم $a \equiv b \pmod{n}$
به عبارت دیگر

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow \dots$$

۱۲۲- با توجه به این که تفاضل ۳۷ و ۲۲ مضرب ۳، ۵ و ۱۵ می باشد رابطه های همنهشتی مربوط را بنویسید .

۱۲۳- پنج عدد برای طرف دوم رابطه همنهشتی $\equiv \pmod{5}$ مشخص کنید .

۱۲۴- ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف- اگر $a \equiv b \pmod{n}$ در اینصورت $b \equiv a \pmod{n}$

ب- برای هر عدد طبیعی n و هر عدد صحیح a واضح است $a \equiv a \pmod{n}$

خواص همنهشتی

۱۲۵- اگر $a \equiv b^n$ در اینصورت برای هر عدد صحیح c و هر عدد طبیعی k ثابت کنید:

الف- $a \pm c \equiv b \pm c^n$ ب- $ac \equiv bc^n$ پ- $a^k \equiv b^k^n$

۱۲۶- هر یک از خواص بالا را با یک جمله فارسی بیان کنید.

۱۲۷- اگر $\begin{cases} a \equiv b^n \\ c \equiv d^n \end{cases}$ در اینصورت ثابت کنید: $\begin{cases} a \pm c \equiv b \pm d^n \\ ac \equiv bd^n \end{cases}$

۱۲۸- عدد ۱۶۳ به پیمانه ۱۰ با چه اعدادی همنهشت است؟ (پنج مورد بنویسید)

۱۲۹- عدد ۱۶۳ با اعداد زیادی همنهشت می باشد، کدام مورد از همه جالب تر است؟ چرا؟ (نتیجه گیری خود را به صورت یک نکته بنویسید.)

۱۳۰- رقم یکان عدد $7^{251} + 13$ را مشخص کنید.

۱۳۱- رقم یکان عدد $۳ + ۱۳^{۸۷}$ را مشخص کنید.

۱۳۲- عدد ۲۸ به پیمانه ۵ با چه اعدادی همنهشت است؟ (پنج مورد بنویسید)

۱۳۳- از تمرین قبل چه نتیجه ای حاصل می شود؟

۱۳۴- باقی مانده تقسیم عدد $۳^{۸۶} + ۳^{۸۵}$ را بر ۳۵ بدست آورید؟

۱۳۵- فرض کنیم $۱۰ \equiv -۱۷ \pmod{a}$ و a یک عدد طبیعی باشد در اینصورت رقم یکان عدد $a^{۹۷}$ را مشخص کنید.

۱۳۶- از تمرین قبل چه نتیجه ای حاصل می شود؟

۱۳۷- باقی مانده عدد زوج a بر $۲۰، ۲۳$ است. باقی مانده $\frac{a}{۲}$ را بر ۲۳ بدست آورید.

۱۳۸- اگر باقی مانده عدد فرد a بر ۲۵ برابر ۱۳ باشد باقیمانده $\frac{a-۱}{۲}$ بر ۲۳ را بدست آورید.

۱۳۹- چه گونه می توان در یک همنهشتی پیمانه را تغییر داد؟

۱۴۰- باقیمانده عدد a بر ۹ و ۶ بترتیب ۲ و ۵ می باشد. باقیمانده a را بر ۱۸ بدست آورید.

۱۴۱- اگر باقیمانده a بر ۱۲ برابر ۸ باشد باقیمانده $۵a+۲$ بر ۱۵ را بدست آورید.

۱۴۲- باقیمانده تقسیم عدد a بر ۲۹ برابر ۱۲ است. اگر $a+۱۷$ مضرب ۲۱ باشد رقم وسط کوچکترین عدد a کدام است؟

۱۴۳- اگر باقیمانده اعداد ۱۳۳ و ۵۶ بر عدد b ، $۲۰ < b < ۱$ برابر باشند در اینصورت باقیمانده ۱۵۰ بر b به دست آورید.

۱۴۴- قبلا دیدیم از رابطه همنهشتی $a \equiv b \pmod{n}$ میتوان رابطه $ac \equiv bc \pmod{n}$ را برای هر عدد صحیح c نتیجه گرفت. آیا

عکس این مطلب نیز درست است؟ یعنی از رابطه $ac \equiv bc \pmod{n}$ می توان نتیجه گرفت $a \equiv b \pmod{n}$ ؟

پاسخ: خیر . به طور مثال $6 \times 2 \equiv 6 \times 5 \pmod{9}$ اما

۱۴۵- نکته: اگر $ac \equiv bc \pmod{n}$ در اینصورت $a \equiv b \pmod{n}$ که در آن

۱۴۶- اگر باقیمانده $18a + 1$ بر ۱۴ برابر ۱۳ باشد در اینصورت باقی مانده $4a + 4$ بر عدد ۷ را بدست آورید.

۱۴۷- باقی مانده 1233985453 را بر ۹ به دست آورید.

۱۴۸- با توجه به تمرین قبل یک نکته برای باقیمانده تقسیم بر ۹ بیان کنید.

۱۴۹- باقی مانده 1233985453 را بر ۱۱ به دست آورید.

۱۵۰- با توجه به تمرین قبل یک نکته برای باقیمانده تقسیم بر ۱۱ بیان کنید.

۱۵۱- اگر دوم آبان یک سال چهارشنبه باشد ، در همان سال ۲۸ آبان چند شنبه است؟

۱۵۲- اگر سوم اردیبهشت یک سال شنبه باشد در این سال دوم مرداد چند شنبه است؟

۱۵۳- همه اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشند.

۱۵۴- همه اعداد صحیح x را بیابید که در رابطه $13x \equiv 100 \pmod{17}$ صدق بکنند.

۱۵۵- هر معادله به شکل را یک معادله هم نهشتی می نامیم. منظور از جواب معادله هم نهشتی

۱۵۶- آیا معادله هم نهشتی $4x \equiv 13 \pmod{6}$ دارای جواب است؟

۱۵۷- نکته : یک معادله هم نهشتی دارای جواب است اگر و تنها اگر

۱۵۸- مغازه داری تعدادی کیسه برنج به وزن ۵ کیلو گرم و تعدادی دیگر به وزن ۴ کیلو گرم دارد. اگر وزن کیسه ها روی هم ۵۱ کیلو گرم باشد او از هر کدام چند کیسه دارد؟

۱۵۹- هر معادله به صورت $ax + by = c$ که در آن a و b و c اعداد صحیح می باشند را یک

۱۶۰- با تبدیل معادله سیاله $4x + 5y = 51$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جواب های عمومی این معادله سیاله را بیابید.

۱۶۱- به چند طریق می توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱۶۲- در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۷ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می کند)

۱۶۳- تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایره هم مرکز، تیراندازی می کند. اگر او تیر را به دایره با شعاع کوچک تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایره بزرگ تر و خارج دایره کوچک تر بزند ۵ امتیاز می گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همه تیرها به داخل دایره بزرگ تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می تواند ثبت شود؟

پاسخ گویی در منزل:	پاسخ گویی در کلاس:
--------------------	--------------------

۱۶۴- عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته هم نهشتی به پیمان ۹ تعلق دارد؟

۱۶۵- اگر $k \in Z$ ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است:

$$k \equiv 0 \pmod{3} \quad k \equiv 1 \pmod{3} \quad k \equiv 2 \pmod{3}$$

۱۶۶- اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n | m$ ثابت کنید $a \equiv b \pmod{n}$

۱۶۷- اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، $b \equiv c \pmod{n}$ و $(m, n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \equiv c \pmod{d}$

۱۶۸- ثابت کنید اگر باقی مانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن گاه $a \equiv b \pmod{m}$

۱۶۹- عکس تمرین قبل را بیان و اثبات کنید.

۱۷۰- با استفاده از بسط دو جمله ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{m}$

۱۷۱- با توجه به تمرین قبل ثابت کنید عدد $125^1 - 11^1 - 23^1$ بر عدد 132 بخش پذیر است.

۱۷۲- باقی مانده تقسیم عدد $9 \times (2^{11} + 7)$ را بر 23 بیابید.

۱۷۳- اگر دو عدد $4a - 7$ و $3a - 5$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $9a + 6$ را به دست آورید.

۱۷۴- باقی مانده تقسیم عدد $1! + 2! + 3! + \dots + 50!$ را به دست آورید.

۱۷۵- جواب های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.

۱۷۶- به چند طریق می توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

۱۷۷- معادله های هم نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب های عمومی آنها را به دست آورید.

$$423x \equiv 79 \pmod{11}$$

$$8x \equiv 20 \pmod{12}$$

$$51x \equiv 11 \pmod{6}$$

۱۷۸- اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷۹- اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۸۰- همه اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد.

۱۸۱- به چند طریق می توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۸۲- به چند طریق می توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۱۸۳- شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سوالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

تمرین های اضافی

۱۸۴- ثابت کنید مربع هر عدد فرد بصورت $8q+1$ است که در آن $q \in \mathbb{Z}$

اثبات: هر عدد فرد بصورت $4k+1$ یا $4k+3$ است.

$$(4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(\underbrace{2k^2 + k}_q) + 1 = 8q + 1$$

$$(4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(\underbrace{2k^2 + 3k + 1}_q) + 1 = 8q + 1$$

۱۸۵- اگر a و b اعداد صحیح فرد باشند ثابت کنید $8 \mid a^4 - b^4$

اثبات: a و b هر دو فرد هستند پس مربع آنها نیز فرد می باشند. بنابر این مربع a^2 و مربع b^2 بصورت $8q+1$ میباشد.

$$\begin{aligned} a^r &= 8q_1 + 1 \\ b^r &= 8q_2 + 1 \end{aligned} \Rightarrow a^r - b^r = 8(q_1 - q_2) \Rightarrow 8 | a^r - b^r$$

۱۸۶- ثابت کنید برای هر عدد صحیح فرد n ، $24 | n^3 - n$

اثبات: $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ می دانیم حاصلضرب سه عدد متوالی مضرب ۳ است بنابراین $3 | n^3 - n$ از طرفی n فرد است لذا $8 | n^2 - 1$ بنابر این:

$$8 | n^2 - 1 \Rightarrow 8 | n(n^2 - 1) \Rightarrow 8 | n^3 - n$$

اگر عددی مضرب ۳ و ۸ باشد مضرب ۲۴ است و این یعنی: $24 | n^3 - n$

۱۸۷- برای هر عدد صحیح n ثابت کنید $4 | n^2 + 2$

اثبات: $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n^2 + 2 = 4k^2 + 4k + 3 \Rightarrow n^2 + 2 = 4q' + 3 \Rightarrow 4 | n^2 + 2$
 $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow 4 | n^2 + 2$

۱۸۸- اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $a-b | a$ ثابت کنید $a-b | b$

اثبات: $\frac{a-b | a}{a-b | a-b} \Rightarrow a-b | a - (a-b) \Rightarrow a-b | b$

۱۸۹- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید $3 | 2^n + (-1)^{n+1}$

اثبات: برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی n میدانیم $a-b | a^n - b^n$

بنابراین: $2 - (-1) | 2^n - (-1)^n \Rightarrow 3 | 2^n + (-1)^n$

۱۹۰- نشان دهید حاصلضرب چهار عدد صحیح متوالی بعلاوه یک مربع کامل است.

اثبات: $(n-1)n(n+1)(n+2)+1 = (n^2+n)(n^2+n-2)+1 = (n^2+n)^2 - 2(n^2+n)+1 = ((n^2+n)-1)^2$

۱۹۱- اگر برای عدد طبیعی n ، $4|3n+1$ ثابت کنید $4|51n^2+20n+1$

$$4|3n+1 \Rightarrow 4|17(3n+1) \Rightarrow 4|51n^2+17n$$

$$\begin{cases} 4|3n+1 \\ 4|51n^2+17n \end{cases} \Rightarrow 4|(51n^2+17n)+(3n+1) \Rightarrow 4|51n^2+20n+1$$

اثبات:

۱۹۲- برای هر عدد طبیعی و زوج ثابت کنید $48|n^3-4n$

اثبات: $n^3-4n=(n-2)n(n+2)$ زوج است پس عدد صحیح k موجود است که $n=2k$ پس:

$$n^3-4n=(2k-2)2k(2k+2) \Rightarrow n^3-4n=8(k-1)k(k+1)=16q$$

۱۹۳- به ازاء چند عدد صحیح n کسر $\frac{15n+14}{3n+2}$ صحیح است؟

$$\frac{15n+14}{3n+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n+2|15n+14$$

$$3n+2|15n+14 \Rightarrow 3n+2|(15n+14)-(15n+10) \Rightarrow 3n+2|4 \Rightarrow 3n+2=\pm 1, \pm 2, \pm 4$$

$$3n+2=1 \Rightarrow n=\frac{1}{3} \quad \text{غ ق ق}$$

$$3n+2=-1 \Rightarrow n=-1 \quad \text{ق ق ق}$$

$$3n+2=2 \Rightarrow n=0 \quad \text{ق ق ق}$$

$$3n+2=-2 \Rightarrow n=-\frac{4}{3} \quad \text{غ ق ق}$$

$$3n+2=-4 \Rightarrow n=-2 \quad \text{ق ق ق}$$

$$3n+2=4 \Rightarrow n=\frac{2}{3} \quad \text{غ ق ق}$$

۱۹۴- رقم یکان عدد را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} 7^2 &\equiv -1 \Rightarrow (7^2)^{125} \equiv (-1)^{125} \Rightarrow 7^{250} \equiv -1 \xrightarrow{\times 7} 7^{251} \equiv -7 \\ &\Rightarrow 7^{251} + 13 \equiv -7 + 13 \Rightarrow 7^{251} + 13 \equiv 6 \end{aligned}$$

پاسخ:

بنابر این رقم یکان $7^{251} + 13$ عدد ۶ است.

۱۹۵- رقم یکان عدد $3 + 13^{87}$ را مشخص کنید.

$$13 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 13^{87} \equiv 3^{87} \pmod{10}$$

$$3^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow (3^2)^{43} \equiv (-1)^{43} \pmod{10} \Rightarrow 3^{86} \equiv -1 \pmod{10} \xrightarrow{\times 3} 3^{87} \equiv -3 \pmod{10} \Rightarrow 13^{87} + 3 \equiv 0 \pmod{10}$$

پاسخ:

۱۹۶- باقی مانده تقسیم عدد $3^{85} + 3^{86}$ را بر ۳۵ بدست آورید؟

$$3^2 \equiv -8 \pmod{35} \Rightarrow 3^6 \equiv 3^{-6} \pmod{35} \Rightarrow 3^{12} \equiv 3^1 \pmod{35}$$

$$\Rightarrow 3^{12} \equiv 1 \pmod{35} \Rightarrow (3^{12})^7 \equiv (1)^7 \pmod{35} \Rightarrow 3^{84} \equiv 1 \pmod{35} \xrightarrow{\times 3} 3^{85} \equiv 3 \pmod{35} \quad (1)$$

$$3^{85} \equiv 3 \pmod{35} \xrightarrow{\times 3} 3^{86} \equiv 9 \pmod{35} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 3^{85} + 3^{86} \equiv 12 \pmod{35}$$

۱۹۷- فرض کنیم $a^{97} \equiv -17 \pmod{10}$ و a یک عدد طبیعی باشد در اینصورت رقم یکان عدد a^{97} را مشخص کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a^{97} \equiv -17 \pmod{10} \\ 0 \equiv 20 \pmod{10} \end{cases} \Rightarrow a^{97} + 0 \equiv 20 + (-17) \pmod{10} \Rightarrow a^{97} \equiv 3 \pmod{10}$$

۱۹۸- به ازاء چند عدد صحیح n کسر $\frac{15n+14}{3n+2}$ صحیح می باشد؟

پاسخ: کسر $\frac{15n+14}{3n+2}$ زمانی صحیح است که صورت مضرب مخرب باشد لذا:

$$15n+14 \equiv 0 \pmod{3n+2} \Rightarrow 15n+14 \equiv 0 \pmod{3n+2} \Rightarrow 4 \equiv 0 \pmod{3n+2} \Rightarrow 3n+2 \mid 4 \Rightarrow 3n+2 = \pm 1 \text{ یا } \pm 2$$

$$\Rightarrow n = -1 \text{ یا } 0 \text{ یا } -2$$

۱۹۹- باقی مانده عدد زوج a بر ۲۳ برابر ۲۰ است. باقی مانده $\frac{a}{4}$ را بر ۲۳ بدست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $a = 2k$ بنابراین $\frac{a}{4} = k$

$$2k \equiv 17 \pmod{23} \xrightarrow{\times 12} k \equiv 20 \pmod{23} \Rightarrow k \equiv 20$$

لذا باقیمانده $\frac{a}{4}$ بر ۲۳ عدد ۲۰ میباشد.

۲۰۰- اگر باقی مانده عدد فرد a بر ۲۵ برابر ۱۳ باشد باقیمانده $\frac{a-1}{4}$ بر ۲۳ را بدست آورید.

پاسخ: فرض کنیم $a = 2k + 1$ بنابراین $\frac{a-1}{4} = k$

$$2k + 1 \equiv 13 \pmod{25} \xrightarrow{\times 13} 26k \equiv 156 \pmod{25} \Rightarrow k \equiv 6$$

نکته (تغییر پیمانه): برای عدد طبیعی k از رابطه $a \equiv b \pmod{n}$ رابطه $ak \equiv bk \pmod{nk}$ را می توان نتیجه گرفت. همچنین اگر

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ و } k | n \text{ آنگاه } a \equiv b \pmod{k}$$

۲۰۱- باقیمانده عدد a بر ۹ و ۶ بترتیب ۲ و ۵ می باشد. باقیمانده a را بر ۱۸ بدست آورید.

$$\begin{aligned} a \equiv 2 \pmod{9} &\Rightarrow 2a \equiv 4 \pmod{18} \\ a \equiv 5 \pmod{6} &\Rightarrow 3a \equiv 15 \pmod{18} \\ \Rightarrow 3a - 2a &\equiv 11 \pmod{18} \Rightarrow a \equiv 11 \end{aligned}$$

پاسخ:

یعنی باقیمانده a بر ۱۸ برابر ۱۱ می باشد.

۲۰۲- اگر باقیمانده a بر ۱۲ برابر ۸ باشد باقیمانده $5a + 2$ بر ۳ را بدست آورید.

$$a \equiv 8 \pmod{12} \xrightarrow{\times 5} 5a \equiv 40 \pmod{12} \xrightarrow{+2} 5a + 2 \equiv 42 \pmod{12} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{3}$$

پاسخ:

۲۰۳- باقیمانده تقسیم عدد a بر ۲۹، برابر ۱۲ است. اگر $a+17$ مضرب ۲۱ باشد رقم وسط کوچکترین عدد a را به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} a &\equiv_{29} 12 \Rightarrow a \equiv_{29} -17 \Rightarrow a+17 \equiv_{29} 0 \\ a+17 &\equiv_{21} 0 \end{aligned}$$

بنابر این $a+17$ مضرب ۲۱ و ۲۹ می باشد لذا کوچکترین $a+17$ ک م م ۲۱ و ۲۹ است.

$$[21, 29] = 21 \times 29 = 609 \Rightarrow \text{کوچکترین } a = 609 - 17 = 592$$

۲۰۴- اگر باقیمانده اعداد ۱۳۳ و ۵۶ بر عدد b ، $1 < b < 20$ برابر باشند در این صورت باقیمانده ۱۵۰ بر b ، $b < 20$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned} 133 &\equiv_b r \\ 56 &\equiv_b r \\ 133 &\equiv_b r \Rightarrow 133 - 56 \equiv_b 0 \Rightarrow 77 \equiv_b 0 \Rightarrow b | 77 \end{aligned}$$

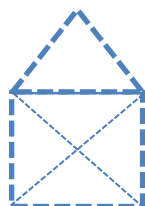
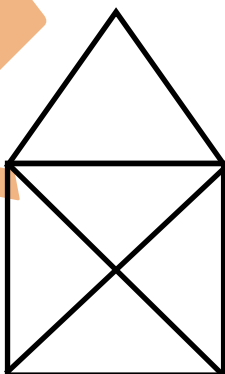
$$b | 77 \Rightarrow \begin{matrix} 1 < b < 20 \\ b = 7 \text{ یا } 11 \end{matrix}$$

$$150 \equiv_7 3, \quad 150 \equiv_{11} 7$$

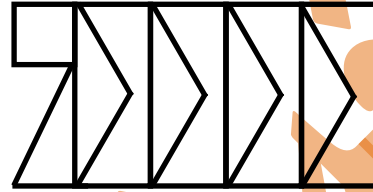
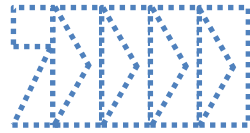
فصل ۲ گراف و مدل سازی

درس اول معرفی گراف

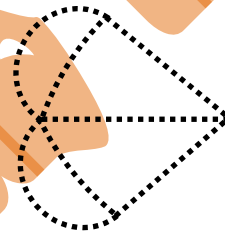
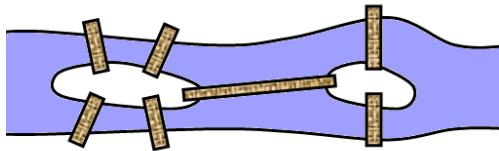
۱- آیا بدون برداشت قلم از روی کاغذ و بدون آنکه هیچ پاره خطی را بیش از یکبار بکشیم می توان شکل روبرو را رسم کرد؟



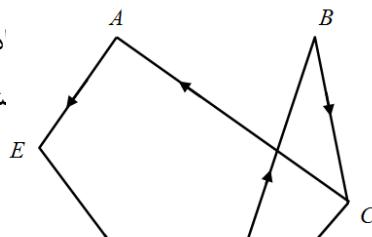
۲- آیا بدون برداشت قلم از روی کاغذ و بدون آنکه هیچ پاره خطی را بیش از یکبار بکشیم می توان شکل روبرو را رسم کرد؟



۳- در شکل زیر دو ساحل رودخانه و دو جزیره توسط پل هایی به هم وصل شده اند. آیا می توان با حرکت از یک نقطه (ساحل یا جزیره) و دقیقاً یک بار عبور از هر کدام از پل ها، به نقطه شروع حرکت بازگشت؟



ده اند. هیچ بازی مساوی شخص کنید.



۴- نمودار شکل زیر مربوط به پنج تیم فوتبال است. به توجه به نمودار، بازی های انجام شده (

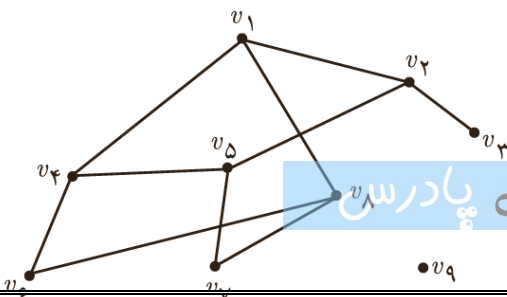
امتیاز	E	D	C	B	A	
A					■	A
B				■		B
C			■			C
D		■				D
E	■					E

است از مجموعه هر یک از این گوییم. توجه کنید

۵- گراف : یک گراف (گراف ساده) متشکل ای از و مجموعه ای از ها، که به رأس و به هر یک از یال می

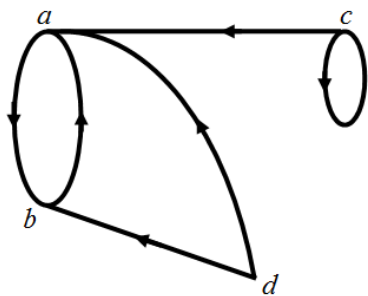
که یال ها لازم نیست حتماً پاره خط راست باشند و می توانند به صورت منحنی نیز باشند و در هر سر یال باید رأسی قرار داشته باشد. همان طور که دیدیم یک گراف را می توان با رسم نمودار آن نشان داد و نیز می توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد.

۶- در گراف G (نمودار شکل زیر) مجموعه رئوس $(V(G))$ و مجموعه یال ها $(E(G))$ را مشخص کنید.



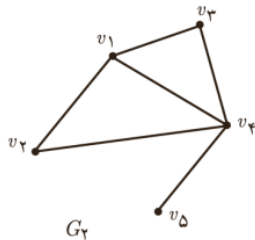
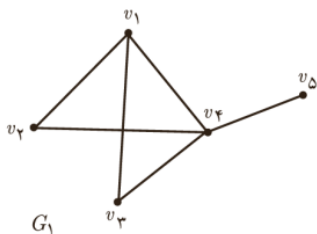
G

۷- گراف جهت دار: به گرافی که برای یال های آن جهت تعیین شده باشد، می گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال ها را با نمایش می دهیم.



۸- در گراف جهت دار G (نمودار شکل روبرو) مجموعه رئوس (V) و مجموعه یال ها (E) را مشخص کنید.

۹- دو مجموعه $V(G)$ و $E(G)$ به صورت زیر داده شده اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.
الف- $V(G) = \{a, b, c, d\}$, $E(G) = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, b), (d, a), (d, d)\}$
ب-



$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$, $E(G) = \{ab, ac, bd, cd, ce, ea\}$

۱۰- مجموعه رئوس و یال های گراف های G_1 و G_2 که نمودار آن ها به صورت زیر داده شده است را مشخص کنید. از این تمرین چه نتیجه ای می گیرید.

۱۱- مرتبه و اندازه یک گراف: در یک گراف G را مرتبه گراف و را اندازه گراف می نامیم. مرتبه گراف G را با یا به اختصار با نشان می دهیم. اندازه گراف G را با یا به اختصار با نشان می دهیم.

۱۲- چه رابطه ای بین مرتبه و اندازه یک گراف برقرار است؟

۱۳- درجه یک رأس: درجه رأس x در گراف G برابر است با تعداد یال هایی از G که درجه رأس x در گراف G را با نشان می دهند.

۱۴- گراف K - منتظم: گرافی که درجه هر رأس آن باشد را گراف - منتظم می نامیم.

۱۵- گرافهای زیر را رسم کنید.

الف - گراف ۲ - منتظم از مرتبه ۳

ب - گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۴

ج - گراف ۲ - منتظم از مرتبه ۶

د - گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۶

۱۶- رئوس فرد گراف: در گراف G رأس x را رأس فرد می نامیم هرگاه

۱۷- رئوس زوج گراف: در گراف G رأس x را رأس زوج می نامیم هرگاه

۱۸- رئوس مجاور (همسایه): در یک گراف دو رأس x و y را مجاور می نامیم هرگاه

۱۹- مجموعه همسایه های یک رأس: مجموعه رأس هایی از گراف G که به رأس x متصل باشند همسایه باز رأس می نامند و آن را با نمایش می دهند.

۲۰- مجموعه همسایگی بسته یک رأس: برای رأس x از گراف G مجموعه را همسایگی بسته می نامند و با نشان می دهند.

۲۱- یال های مجاور: در یک گراف دو یال x را مجاور می نامیم هرگاه

۲۲- در گراف شکل زیر موارد خواسته شده را حساب کنید.

$$N_G(a) =$$

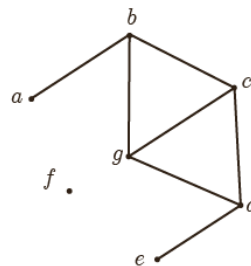
$$N_G(c) =$$

$$N_G(f) =$$

$$N_G[a] =$$

$$N_G[c] =$$

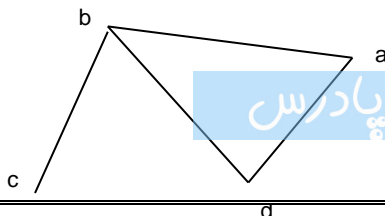
$$N_G[f] =$$



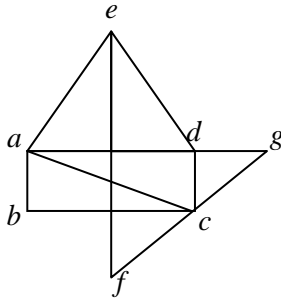
۲۳- دو یال مجاور: دو یال را مجاور گوئیم هرگاه

۲۴- نمایش بزرگ ترین و کوچک ترین درجه یک گراف: بزرگ ترین عدد در بین درجات رئوس گراف و کوچک ترین آنها را با نشان می دهیم.

۲۵- در گراف روبرو $\Delta =$ و $\delta =$

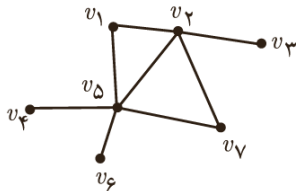


۲۶- در گراف شکل زیر $3\delta - 2\Delta$ را به دست آورید.



۲۷- زیرگراف: یک زیرگراف از یک گراف گرافی است که مجموعه رئوس آن
..... و مجموعه یال های

۲۸- دو زیرگراف برای گراف شکل زیر رسم کنید.

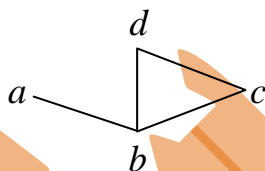


.....

بین

۲۹- مکمل یک گراف: مکمل گرافی مانند G که آن را با یا
نشان می دهیم گرافی است که مجموعه رئوس آن
دوراس آن یال وجود دارد اگر و تنها اگر

۳۰- نمودار مکمل گراف روبرو را رسم کنید.



۳۱- اگر گراف G از مرتبه n باشد و x راسی از آن باشد حاصله $d_G(x) + d_{\bar{G}}(x)$ را مشخص کنید.

۳۲- اگر گراف G از مرتبه n باشد حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟

۳۳- اگر گراف G از مرتبه n باشد حاصل $q(G) + q(\bar{G})$ را مشخص کنید.

۳۴- گراف کامل: گرافی را که هر رأس باشد گراف کامل می نامیم.

گراف کامل از مرتبه n را با نشان می دهیم.

۳۵- یک گراف کامل مرتبه n چند یال دارد؟

۳۶- نمودار گراف های K_1, K_2, K_3, K_4 و K_5 را رسم نمایید.

۳۷- اگر گراف G از مرتبه n باشد چه رابطه ای بین G, \bar{G} و K_n را مشخص کنید.

۳۸- مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟

۳۹- مسیر: اگر x و y دو راس از گراف G باشند، یک مسیر از x به y عبارت است از

.....

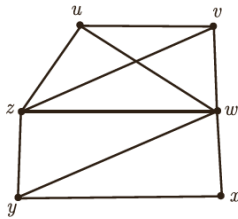
۴۰- طول مسیر: تعداد را، طول مسیر می نامیم.

۴۱- تعداد مسیر های به طول ۲ بین دو راس u و v در گراف K_p برابر ۱۳ می باشد. مرتبه ی گراف را مشخص کنید.

۴۲- گرافی که تنها از یک مسیر n راسی تشکیل شده است را با نشان می دهیم.

۴۳- نمودار گراف های P_1, P_2, P_3 را رسم نمائید.

۴۴- دور: دنباله از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور می نامیم.



۴۵- در گراف شکل زیر، دوری به طول ۵ بیابید.

۴۶- گرافی را که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با نمایش می دهیم.

۴۷- نمودار گراف های C_3, C_4, C_5 را رسم نمائید.

۴۸- گراف G را همبند می نامیم هرگاه وجود داشته باشد.

۴۹- گراف G را ناهمبند می نامیم هرگاه

۵۰- یک گراف همبند و یک گراف ناهمبند از مرتبه ۶ را رسم کنید.

۵۱- ثابت کنید مجموع درجات رئوس یک گراف برابر $2q$ است.

۵۲- ثابت کنید در هر گراف $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$

۵۳- ثابت کنید در هر گراف k -منتظم $2q = kp$

۵۴- یک گراف k -منتظم ۱۲ یال دارد. چند جواب برای k وجود دارد؟

۵۵- در یک گراف k -منتظم $p > q$ ، k کدام است؟

(۱) حداقل ۲ (۲) دقیقا ۲ (۳) حداکثر ۲ (۴) کمتر از ۲

۵۶- در یک گراف k -منتظم تعداد رئوس از نصف تعداد یالها کمتر است. حداقل k کدام است؟

۵۷- در گراف k -منتظم G ، $q - p = 3$ در اینصورت K کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۳ یا ۴ یا ۵

۵۸- در یک گراف راسی که درجه آن عددی فرد است را راس و راسی که درجه آن عددی زوج است را راس می نامند.

۵۹- ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۶۰- در مورد تعداد رأس های زوج یک گراف چه می توان گفت؟

۶۱- آیا بین پنج شهر می توانیم خطوط هوایی رسم کنیم بطوریکه از هر کدام دقیقا سه خط هوایی بگذرد؟

- ۶۲- در مورد انسانهای زنده یا مرده که به تعداد فرد از دواج کرده اند چه می توان گفت؟
 ۶۳- در یک میهمانی ۹ نفر شرکت کرده اند آیا ممکن است هرکدام دقیقا با پنج نفر دست بدهند؟

۶۴- فرض کنید در گراف G داشته باشیم $\delta \geq 4$ ثابت کنید G مسیری به طول بزرگ تر یا مساوی ۴ است.

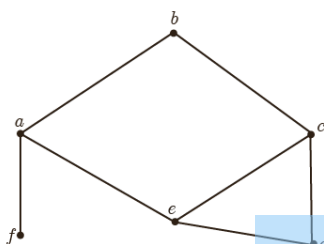
تمرین کتاب صفحه ۴۱	تاریخ پاسخ گویی در منزل:	تاریخ پاسخ گویی در کلاس:
--------------------	--------------------------	--------------------------

۶۵- گراف G با مجموعه رأس های $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و مجموعه یال های $E(G) = \{ab, ac, cd, ef, bd, cf, be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.
 الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.
 ب) درجه رأس های G را مشخص نمایید.

پ) کدام رأس های گراف G با رأس f مجاورند؟

ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

ث) گراف H با مجموعه رأس های $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه یال های $E(H) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت های (الف) تا (ت) در مورد گراف H پاسخ دهید.



۶۶- گراف شکل روبرو را در نظر بگیرید.
 الف) مجموعه های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.

پ) مجموعه همسایه های رأس های f, g و e را بنویسید.

ت) اگر $N_G(x) = \{a, c\}$ آنگاه x کدام رأس است؟

۶۷- گراف G با مجموعه رأس های $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه های $N_G(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 6$ تک عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

۶۸- در گراف G با مجموعه رأس های $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:

$$N_G(a) = \{b, c, d\}$$

$$N_G(d) = \{a, f\}$$

$$N_G(b) = \{a, c\}$$

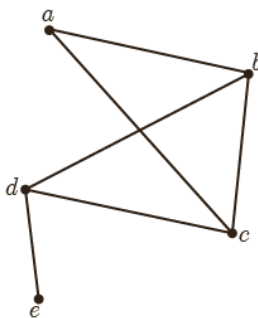
$$N_G(e) = \{ \}$$

$$N_G(c) = \{a, b\}$$

$$N_G(f) = \{d\}$$

گراف G را رسم و اندازه آن را مشخص کنید.

۶۹- در شکل زیر نمودار گراف G رسم شده است. مجموع درجه های رأس های گراف \bar{G} را مشخص کنید و همچنین درجات رؤس a و c در گراف \bar{G} را تعیین نمایید.



۷۰- گراف K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.

۷۱- گراف های کامل از مرتبه ۱ تا ۵ را رسم کنید.

۷۲- در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r -منتظم منتظم از مرتبه n را رسم کنید.

(الف) $n=4$ $r=1$ (ب) $n=4$ $r=2$

(پ) $n=5$ $r=2$ (ت) $n=5$ $r=3$

(ث) $n=6$ $r=4$ (ج) $n=7$ $r=3$

۷۳- برای هر یک از حالت های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به طوری که:

الف) یک رأس تنها داشته باشد. (ب) دو رأس تنها داشته باشد.

پ) سه رأس تنها داشته باشد. (ت) چهار رأس تنها داشته باشد.

ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

۷۴- هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده اند. نشان دهید نفر هفتم نمی تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

۷۵- علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.
الف) چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه ای دوطرفه داشته باشد؛ یعنی هر دونفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می تواند وجود داشته باشد؟

۷۶- یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به طوری که:
الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

۷۷- فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq k$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.
الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول k است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $k+1$ است.

۷۸- یک گراف ۴ رأسی غیرتهی k -منتظم بکشید که:
الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۷۹- یک گراف 5 رأسی غیرتهی k -منتظم بکشید که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

تمرین های اضافی :

۸۰- اگر تعداد یالهای گراف K_p و K_{p-1} روی هم 36 باشد در اینصورت p را به دست آورید.

۸۱- مجموع درجات رئوس گراف K_p را به دست آورید.

۸۲- در چند گراف کامل رابطه $3q > 8p + 1$ برقرار است.

۸۳- در یک گراف با 29 راس درجه هیچ راسی کمتر از 3 نمی باشد حداقل تعداد یال ها را به دست آورید.

۸۴- در K_5 بین دو راس متمایز چند مسیر به طول 3 وجود دارد؟

۸۵- در K_6 بین دو راس متمایز چند مسیر وجود دارد؟

۸۶- با پنج راس $\{a, b, c, d, e\}$ چند گراف می توان تشکیل داد؟

۸۷- با رئوس $\{a, b, c, d, e\}$ چند گراف از اندازه ۸ می توان تشکیل داد؟

۸۸- با p راس نامگذاری شده تعداد گرافهایی از اندازه q که شامل k یال خاص باشد را به دست آورید.

۸۹- با رئوس $\{a, b, c, d\}$ چند گراف شامل ab و cd از اندازه ۴ می توان تشکیل داد؟

۹۰- با p راس نامگذاری شده تعداد گرافهایی از اندازه q که شامل k یال خاص نباشد را به دست آورید.

۹۱- با رئوس $\{a, b, c, d, e\}$ چند گراف از اندازه ۶ می توان تشکیل داد که شامل یالهای ab و cd نباشد؟

۹۲- در یک گراف با q و p رابطه $p \geq \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$ برقرار است.

۹۳- در یک گراف با ۱۸ یال حداقل p کدام است؟

۹۴- در یک گراف حداقل تعداد رئوس ایزوله بزایز است با $p - 2q$ (البته اگر $p - 2q < 0$ آنگاه تعداد رئوس ایزوله برابر صفر است) و حد اکثر تعداد رئوس ایزوله از دستور $\min(k)$ که در آن k عددی صحیح است و

$$k \geq \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$$

۹۵- در یک گراف با ۹ راس و ۴ یال حداقل و حد اکثر چند راس ایزوله وجود دارد؟

پاسخ: $k \geq \frac{1+\sqrt{1+8(4)}}{2} \Rightarrow \min(k) = 4$

بنابر این حداقل به تعداد $9 - 2(4) = 1$ و حد اکثر $9 - 4 = 5$ راس ایزوله خواهیم داشت.

۹۶- یک گراف ۲- منتظم و ناهمبند حداقل چند یال دارد؟

۹۷- نمودار چند گراف ۲- منتظم ناهمبند را رسم کنید.

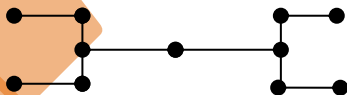
۹۸- یک گراف ۳- منتظم ناهمبند حداقل چند یال دارد؟

۹۹- در کدام حالت گراف لزوما همبند است؟

$$q \geq \binom{p-1}{2} \quad (1) \quad q > \binom{p-1}{2} \quad (2) \quad q > p-1 \quad (3) \quad q \geq p-1 \quad (4)$$

۱۰۰- گرافی از مرتبه ۹ و اندازه ۲۱ فقط رئوس درجه ۴ و ۵ دارد. تعداد رئوس درجه ۵ این گراف را مشخص کنید.

۱۰۱- به گراف شکل زیر چند حداقل چند یال بیافزاییم تا تبدیل به یک گراف منتظم گردد.



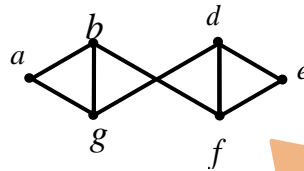
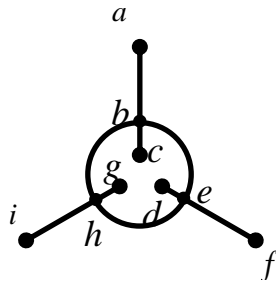
۱۰۲- در یک گراف r -منتظم $8p + 1 > 5q$ حداقل r را بدست آورید.

۱۰۳-

درس ۲ مدل سازی با گراف

۱۰۴- زیر مجموعه D از مجموعه رئوس گراف G را مجموعه می نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

۱۰۵- برای گراف های شکل زیر یک مجموعه احاطه گر مشخص کنید.

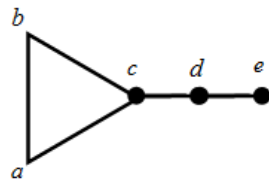
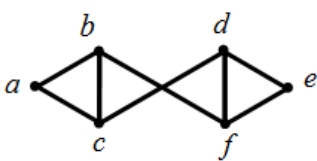


۱۰۶- در بین تمام مجموعه های احاطه گر یک گراف مجموعه یا مجموعه های احاطه گری که کمترین تعداد عضو را دارند مجموعه و تعداد اعضای چنین مجموعه ای را گراف می نامیم و آن را با نمایش می دهیم.

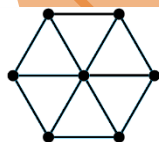
۱۰۷- گاهی اوقات برای راحتی، به یک از گراف G ، یک γ -مجموعه می گوییم.

۱۰۸- عدد احاطه گری گراف های شکل زیر را به دست

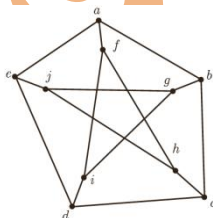
آورید.



۱۰۹- عدد احاطه گری گراف شکل زیر را به دست آورید و نتیجه حاصل از آن را بیان کنید.



۱۱۰- مشخص کنید کدام یک از مجموعه های زیر برای گراف شکل زیر احاطه گر هست و کدام نیست؟



$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{f, g, h, i, j\}$$

$$C = \{a, b, j, h, g\}$$

$$D = \{a, i, h\}$$

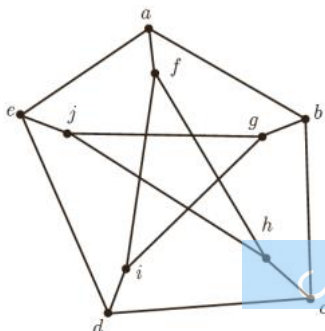
$$E = \{f, g, h, e, d\}$$

$$F = \{f, g, h, e\}$$

۱۱۱- یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هر یک از رأس هایش دیگر

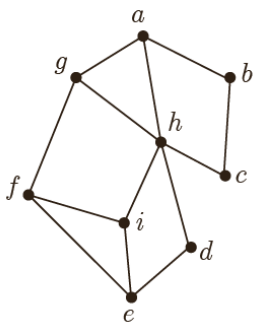
احاطه گر نباشد احاطه گر می نامیم.

۱۱۲- برای گراف شکل روبرو دو احاطه گر مینیمال بنویسید.

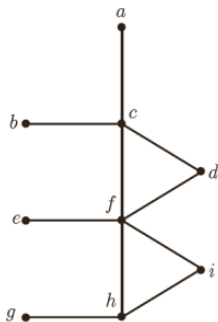


۱۱۳- برای گراف شکل قبل یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۱۱۴- نشان دهید می توان هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد.



۱۱۵- نشان دهید $\{a, b, c, d, e, f\}$ برای گراف شکل روبرو احاطه گر مینیمال نیست.



۱۱۶- در گراف شکل روبرو

الف- مجموعه ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر باشد.

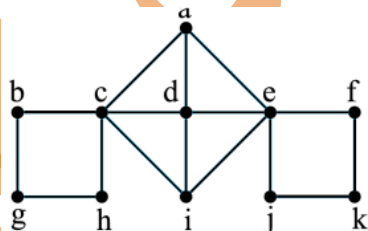
ب- مجموعه ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه گر مینیمال باشد.

پ- یک مجموعه احاطه گر ۳ عضوی مشخص نمایید.

ت- آیا رأسی در گراف وجود دارد که دو رأس از a, b, e و g را احاطه کند؟

ث- حداقل تعداد رأس هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می کنند چندتا است؟

۱۱۷- کدام مجموعه یک مجموعه احاطه گر مینیمال گراف شکل مقابل است؟



$\{a, b, c, d, e, f\}$

$\{b, h, a, j, f\}$

$\{g, a, i, k\}$

$\{g, h, d, j, k\}$

۱۱۸- فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی های مورد نیاز به دست می آید؟

ث) اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟

۱۱۹- فرض کنید X عددی حقیقی باشد. به بزرگ ترین عدد صحیح که کوچک تر یا مساوی X باشد،
 X گفته می شود. همچنین کوچک ترین عدد صحیح که بزرگ تر یا مساوی X باشد، X نامیده می شود
 X را با $\lceil x \rceil$ و X را با $\lfloor x \rfloor$ نمایش می دهیم. توجه کنید که همان $\lfloor x \rfloor$ است.

۱۲۰- مقادیر زیر را مشخص کنید.

$$\lfloor 6 \rfloor = \quad \lceil 6 \rceil = \quad \lfloor 6/2 \rfloor = \quad \lceil 6/2 \rceil =$$

۱۲۱- الف) تساوی $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ برای کدام مقادیر x برقرار است؟

ب) تساوی $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ برای کدام مقادیر x برقرار است؟

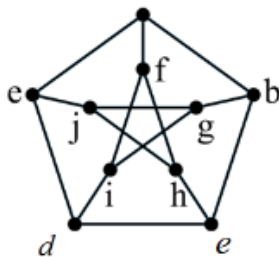
۱۲۲- گراف شکل زیر را در نظر بگیرید.

الف- در هر گراف، هر رأس خودش و تمام را احاطه می کند.

ب- در این گراف Δ چند است؟

پ- هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می کند و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟

ت- آیا دو رأس می توانند همه رئوس گراف را احاطه کنند؟



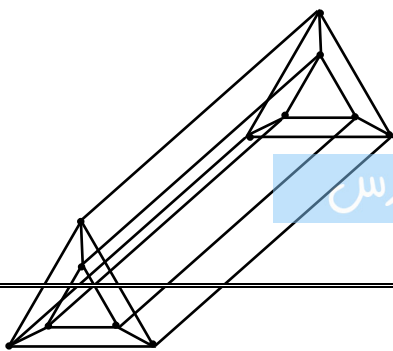
ث- حداقل $\lfloor \frac{10}{4} \rfloor$ رأس برای احاطه همه رئوس لازم است. چرا؟

ج- $\gamma(G)$ چند است؟

چ- در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجه Δ یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می کند؟

ح- تعداد کمتر از $\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor$ رأس نمی توانند تمام n رأس یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

۱۲۳- در یک گراف G عدد $\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \rfloor$ یک برای
 است.



۱۲۴- الف- یک شبکه رایانه ای متشکل از ۱۲ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل به ۴ کامپیوتر دیگر متصل است. می خواهیم مجموعه ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس ها) انتخاب کنیم به طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این شبکه وصل باشیم. مجموعه انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه ای است؟

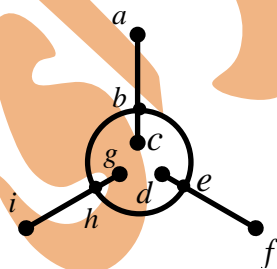
ب- حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟مجموعه ای احاطه گر با این تعداد رأس مشخص نمایید.

۱۲۵- گراف های P_9, P_1, C_1, C_{10} را رسم کنید و عدد احاطه گری هر یک را مشخص نمایید.

۱۲۶- گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.

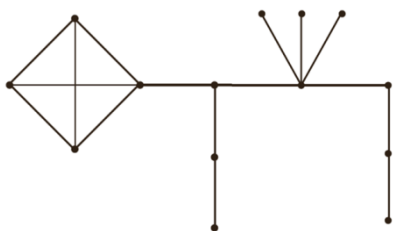
۱۲۷- گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.

۱۲۸- عدد احاطه گری گراف شکل زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

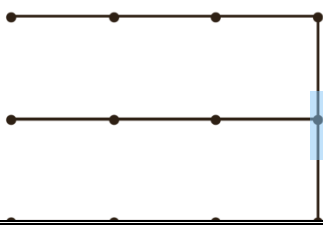


۱۲۹- در گراف شکل زیر نشان دهید $\gamma(G) \geq 4$.

(با پیدا کردن یک احاطه گر ۴ عضوی نتیجه بگیرید $\gamma(G) = 4$)



۱۳۰- در گراف شکل زیر نشان دهید $\gamma(G) \geq 4$.



با پیدا کردن یک احاطه گر ۴ عضوی نتیجه بگیرید $\gamma(G) = 4$



۱۳۱- در گراف شکل زیر نشان دهید $\gamma(G) \geq 4$.

با پیدا کردن یک احاطه گر ۴ عضوی نتیجه بگیرید $\gamma(G) = 4$

تاریخ پاسخ گویی در کلاس:

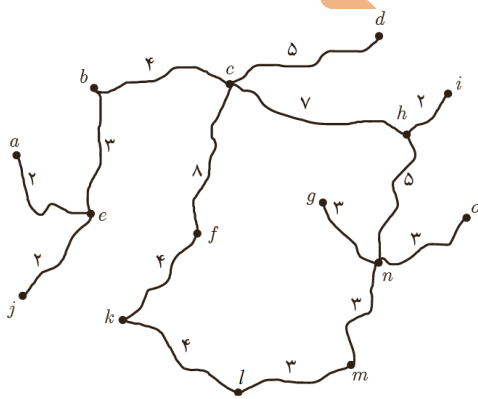
تاریخ پاسخ گویی در منزل:

تمرین کتاب صفحه ۵۲

۱۳۲- در مثال ایستگاه های رادیویی

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه ها را مشخص نمایید.

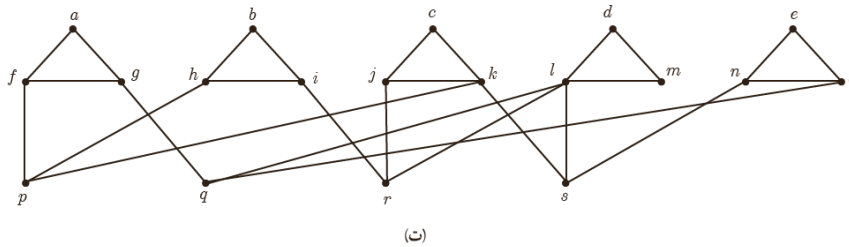
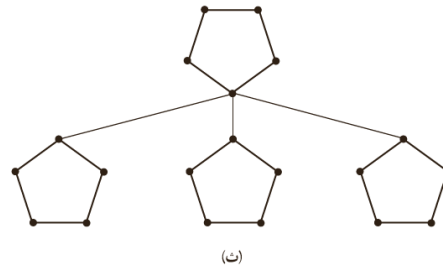
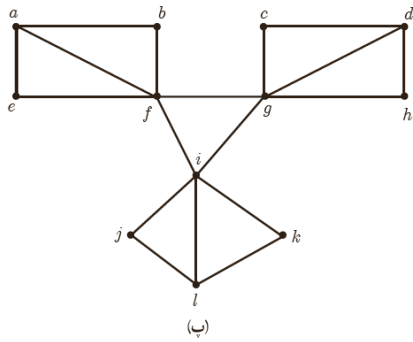
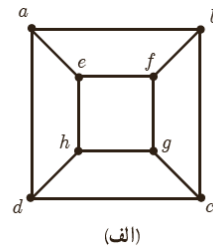
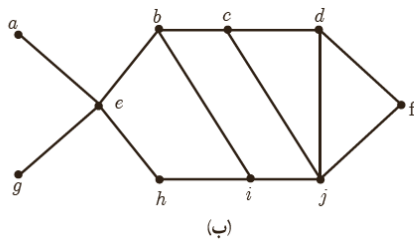
ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم.



۱۳۳- نقشه مقابل نقشه یک منطقه شامل چند روستا و جاده های

بین آن روستاهاست و مسافت جاده های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به گونه ای که فاصله هر روستا تا نزدیک ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشه فوق، مسئله مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان ها را مشخص کنید.

۱۳۴- عدد احاطه گری را برای هر یک از گراف های زیر مشخص نمایید.



۱۳۵- اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ در این صورت به چه ویژگی هایی از گراف G می توان پی برد ؟

۱۳۶- $\gamma(C_n)$ و $\gamma(P_n)$ را به ازای هر n مشخص کنید.

۱۳۷- اگر G گراف K -منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\gamma(G) \leq \frac{n}{k+1}$

۱۳۸- یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۱۳۹- الف) یک گراف ۶ رأسی که γ -مجموعه آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ -مجموعه آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید k و n دو عدد طبیعی باشند و $k \leq n$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه گری آن k باشد، ارائه دهید.

۱۴۰- الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گری یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گری با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۴۱- برای هر عدد طبیعی $n \geq 4$ دلخواه توضیح دهید که :

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

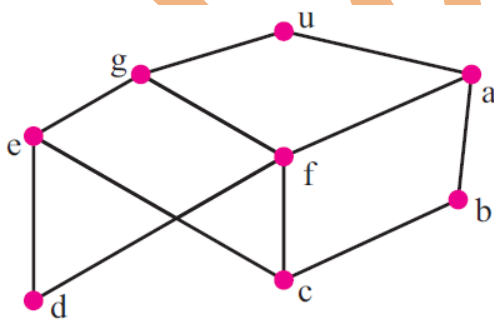
۱۴۲- گراف P_{12} را رسم کنید.

الف) یک γ -مجموعه از آن را مشخص نمایید.

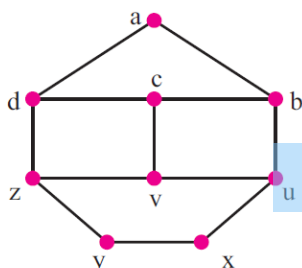
ب) یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

تمرین های اضافی

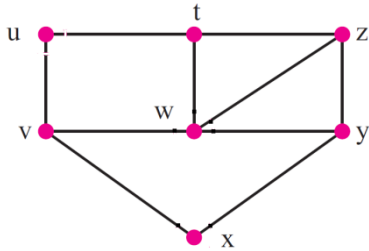
۱۴۳- فرض کنیم ۸ شهر مطابق شکل قرار دارند، می‌خواهیم ایستگاه‌هایی رادیویی در بعضی از این شهرها بسازیم. هر شهر می‌تواند از شهر همسایه یا مجاور خود مطابق شکل استفاده کند حد اقل ایستگاه‌های ساخته شده چقدر است؟



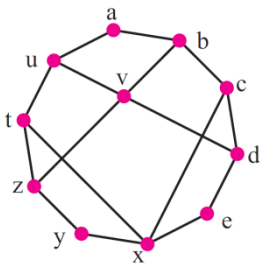
۱۴۴- درگراف رسم شده یک مجموعه احاطه گر پیدا کنید.



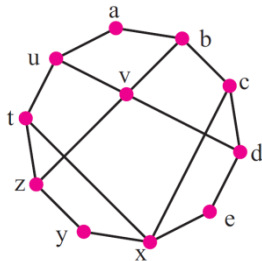
۱۴۵- نشان دهید $S = \{w, u, x\}$ یک مجموعه احاطه گر گراف رسم شده است.



۱۴۶- درگراف رسم شده یک مجموعه احاطه گر پیدا کنید.



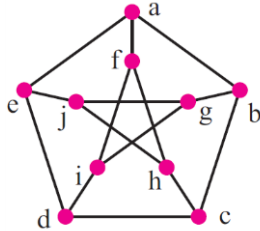
۱۴۷- نشان دهید $S = \{b, v, x, y\}$ یک مجموعه احاطه گر گراف رسم شده است. آیا می توانید یک مجموعه احاطه گر با تعداد عضو کم تر برای گراف پیدا کنید؟



۱۴۸- ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح n و k که $1 \leq k \leq \frac{n}{4}$ همواره یک گراف همبند از مرتبه n وجود دارد که $\gamma(G) = k$

۱۴۹- نمودار یک گراف G از مرتبه ۹ رسم کنید که $\gamma(G) = 4$

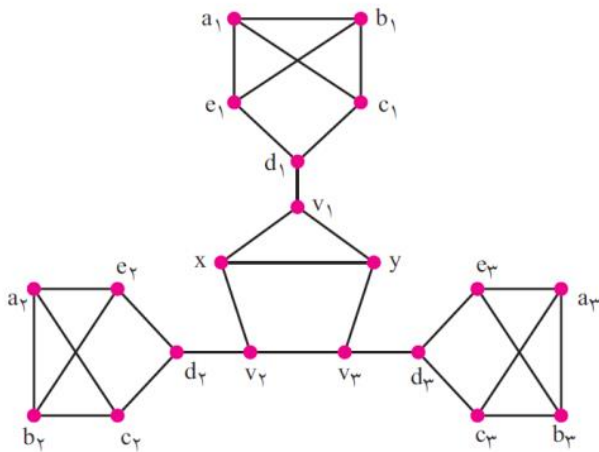
۱۵۰- برای گراف شکل زیر مجموعه های احاطه گر مینیمال و مینیمم مشخص کنید.



۱۵۱- نمودار یک گراف G از مرتبه n رسم کنید که $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

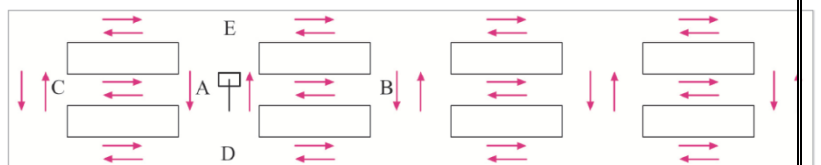
۱۵۲- نمودار یک گراف G از مرتبه n رسم کنید که $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{1+\Delta(G)} \rfloor$

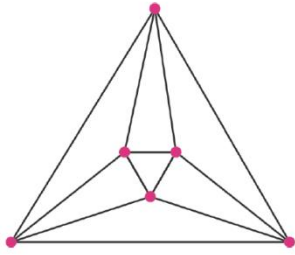
۱۵۳- برای گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه گر مینیمم پیدا کنید.



۱۵۴- در شکل، شهرکی نشان داده شده است که دارای سه خیابان افقی و پنج خیابان عمودی است. برای

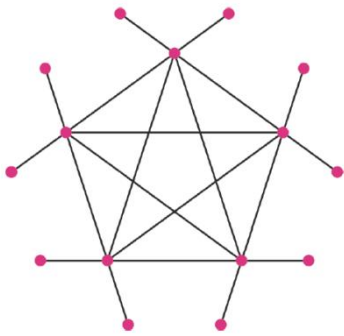
ایمنی شهرک می خواهیم در بعضی تقاطع ها دوربین هایی را نصب کنیم هر دوربین در هر تقاطع می تواند خود آن تقاطع و تقاطع های مجاور آن را تحت پوشش قرار دهد.





۱۵۵- گراف شکل زیر $\gamma(G)$ چند است و گراف چه تعداد مجموعه احاطه گر مینیمم دارد؟

۱۵۶- اگر گراف G ناهمبند باشد، چرا $\gamma(\bar{G}) \leq 2$ ؟



۱۵۷- در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه گر مینیمال با کمترین عضو و یک مجموعه احاطه گر مینیمال با بیشترین عضو پیدا کنید.

۱۵۸- آیا تعریف زیر از مجموعه احاطه گر می تواند درست باشد؟

گراف $G(V, E)$ مفروض است. $D \subseteq V$ را یک مجموعه احاطه گر G می نامیم. هرگاه، برای $v \in V$ داشته باشیم $N(v) \cap D \neq \emptyset$ یا $v \in D$

فصل سوم: ترکیبیات (شمارش)

درس ۱ مباحثی در ترکیبیات

مثالهایی از جایگشت n شیء - جایگشت k شیء از n شیء - ترکیب k شیء از n شیء

۱- با سه حرف «چ»، «پ» و «ژ» ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است: الف) تعداد کل رمزهایی که می توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

۲- ۵ دانش آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر خواهیم:
الف) همواره دانش آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یک درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش آموزان پایه یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می توان آنها را به صورت یک درمیان قرار داد؟

جایگشت های با تکرار

۳- با ارقام ۱، ۱، ۲ و ۱ چند رمز چهار رقمی می توان نوشت؟

۴- تعداد n شیء مفروض است و در بین آنها k شیء تکراری است. تعداد جایگشت های برابر است با

۵- قضیه جایگشت با تکرار: تعداد n شیء مفروض است و در بین آنها n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم و ... n_k تا از نوع k ام یکسان هستند. در این صورت تعداد کل جایگشت های این اشیا برابر است با:

۶- با ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۲، ۴، ۴، ۵ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان نوشت؟

۷- ۹ نفر به چند طریق می توانند در یک اتاق ۲ نفره، یک اتاق ۳ نفره و یک اتاق ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

شمارش به وسیله دسته گل ها

میخک	رز	مریم	
***			۱
	***		۲
		***	۳
**	*		۴
**		*	۵
*	**		۶
	**	*	۷
*		**	۸
	*	**	۹
*	*	*	۱۰

۸- از طریق رسم یک جدول مشخص کنید به چند طریق می توان دسته گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

۹- سه ستاره و دو پاره خط عمودی را در کنار هم به صورت افقی قرار می دهیم. در شکل زیر مشخص کنید هر حالت از انتخاب ستاره ها و پاره خط کدام حالت از انتخاب دسته گلها را نشان می دهد.

***	سه شاخه میخک
** *	دو شاخه میخک ، یک شاخه رز
* * *	یک شاخه میخک ، یک شاخه رز و یک شاخه مریم

* **	
** *	

** *	
* **	
* **	

۱۰- تعداد قرار دادن سه ستاره و دو پاره خط عمودی در یک ردیف چند تا است؟

۱۱- ۱۰ نفر به یک اغذیه فروشی می روند و هر کدام سفارش یک ساندویچ می دهند ، اگر ۴ نوع ساندویچ و از هر ساندویچ به تعداد فراوان موجود باشد ، ساندویچ ها به چند طریق به فروش می رسند؟

۱۲- اگر در مسئله خرید ساندویچ به ما بگویند از هر ساندویچ یکی به فروش رسیده ، اکنون مسئله چند جواب دارد؟

۱۳- اگر در مسئله خرید ساندویچ به ما بگویند بعضی ها سفارش خرید یک ساندویچ می دهند ، اکنون مسئله چند جواب دارد؟

۱۴- تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ چه رابطه ای با مسئله ساندویچ ها دارد؟

۱۵- تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ با تعداد کدام حالت از مسئله ساندویچ ها برابر است؟

۱۶- تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ با تعداد کدام حالت از مسئله ساندویچ ها برابر است؟

۱۷- تعداد جواب های صحیح و مثبت نا معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$ با تعداد کدام حالت از مسئله ساندویچ ها برابر است؟

۱۸- به چند طریق می توان از بین k نوع گل ، n شاخه انتخاب کرد به طوریکه تکرار مجاز باشد؟

۱۹- تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ را به دست آورید.

۲۰- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ دارد؟

۲۱- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط $x_i \geq 1$ دارد؟

۲۲- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط $x_i \geq 1$ دارد؟

۲۳- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط $x_4 = 4$ و $x_5 > 2$ دارد؟

۲۴- پس از ساده کردن عبارت حاصل از بسط $(a+b+c+d)^{10}$ چند جمله دارد؟

۲۵- اگر تعداد جملات بسط $(a+b+c+d)^n$ برابر ۵۶ باشد در این صورت n کدام است؟

۲۶- تعداد جوابهای به مختصات صحیح روی خط به معادله $y = -x + 6$ واقع در ربع اول چند تا است؟

۲۷- $x_1 + x_2 + x_3 = 28$ در فاصله $(4, +\infty)$ چند جواب صحیح دارد؟

۲۸- معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ چند جواب صحیح با شرط $1 \leq x_i \leq 7$ دارد؟

۲۹- تعداد جواب های صحیح و نامنفی دستگاه $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \end{cases}$

مربع لاتین

۳۰- یک جدول مربعی $n \times n$ که از اعداد $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد نامیده می شود.

۳۱- دو مربع لاتین 3×3 و دو مربع لاتین 4×4 رسم کنید.

۳۲- چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

۳۳- شکل زیر یک مربع لاتین $\dots \times \dots$ است که به آن \dots می گوئیم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می کنید؟

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۶	۱	۲	۳	۴	۵
۵	۶	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۶	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۶	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۶	۱

۳۴- شکل کلی مربع لاتین چرخشی $n \times n$ را در حالت کلی رسم کنید.



۳۵- در مربع لاتین شکل زیر تغییرات خواسته شده را اعمال نمائید.

۲	۳	۴	۱
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۴

$1 \rightarrow 3$
 $2 \rightarrow 1$
 \Rightarrow
 $3 \rightarrow 2$
 $4 \rightarrow 4$

نتیجه:

۳۶- برای مرتبه هر مربع یک جایگشت مشخص کنید و با اعمال جایگشت مورد نظر از هر مربع لاتین یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

۱	۴	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۲	۴	۱

$1 \rightarrow$
 $2 \rightarrow$
 \Rightarrow
 $3 \rightarrow$
 $4 \rightarrow$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$1 \rightarrow$
 $2 \rightarrow$
 \Rightarrow
 $3 \rightarrow$

۱	۴	۵	۳	۲
۵	۳	۲	۱	۴
۲	۱	۴	۵	۳
۴	۵	۳	۲	۱
۳	۲	۱	۴	۵

$1 \rightarrow$
 $2 \rightarrow$
 $3 \rightarrow$
 \Rightarrow
 $4 \rightarrow$
 $5 \rightarrow$

۳۷- تا کنون نشان دادیم سه نوع عملیات می توانیم روی مربع های لاتین انجام دهیم به طوری که مربع لاتین بودن آن حفظ شود. یعنی با انجام این عملیات روی هر مربع لاتین، مربع لاتین دیگری به دست می آید. این سه عملیات را نام ببرید.

مربع های لاتین متعامد

۳۸- در شکل زیر مربع ها را روی هم قرار دهید و مربعی جدید از اعداد دو رقمی بسازید. مشخص کنید مربع به وجود آمده چه ویژگی دارد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

۳۹- دو مربع لاتین هم مرتبه را متعامد را می نامیم هرگاه از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که رقم یکان به و رقم دهگان تعلق داشته باشد و در مربع به وجود آمده
۴۰- نشان دهید دو مربع زیر متعامدند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

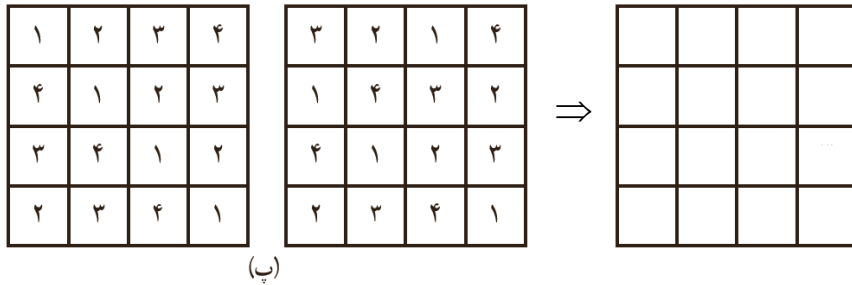
۴۱- در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

(الف)

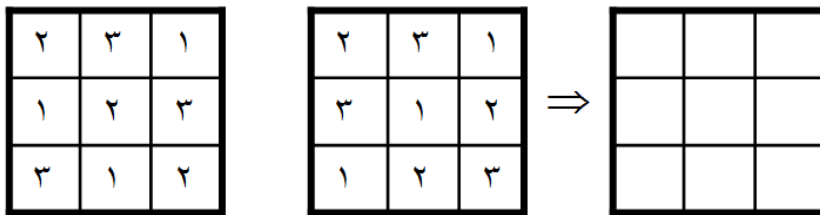
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

(ب)

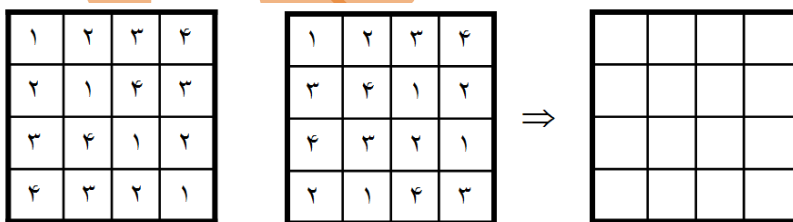


۴۲- آیا دو مربع لاتین 2×2 وجود دارد؟

۴۳- آیا دو مربع لاتین 3×3 زیر متعامدند؟

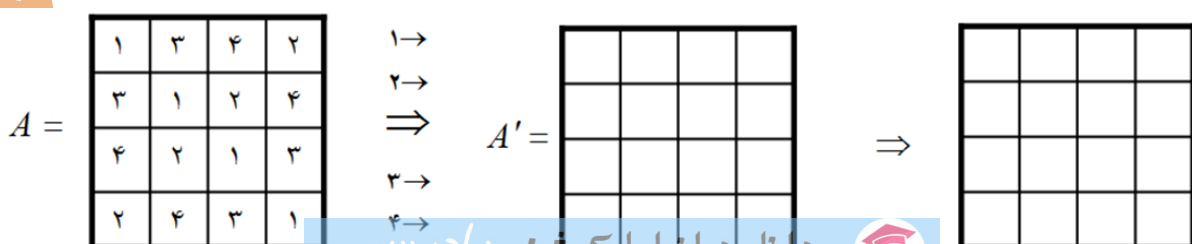


۴۴- آیا دو مربع لاتین 4×4 زیر متعامدند؟



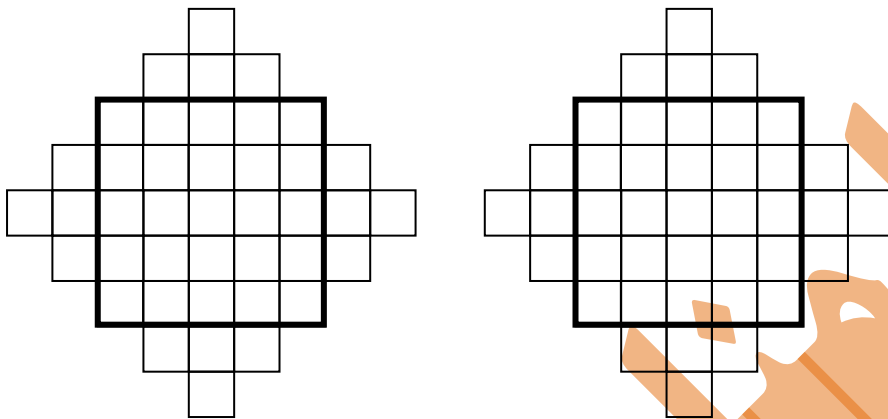
۴۵- نکته : برای هر $n \neq 1, 2, 6$ دو مربع از مرتبه n وجود دارد و برای هر $n = 1, 2, 6$ دو مربع از مرتبه n وجود ندارد.

۴۶- یک مربع لاتین از مرتبه ۴ بنویسید و آن را A بنامید. با یک جایگشت دلخواه از آن دیگری مربع لاتین به دست آورید و آن را A' بنامید. متعامد بودن و را بررسی کنید.



طریقه به دست آوردن مربع های متعامد از مرتبه فرد

۴۷- در شکل زیر در مربع اول اعداد ۱, ۲, ۳, ۴ و ۵ را روی قطر اصلی (از بالا به پائین) قرار دهید. همین اعداد را در خطوط موازی با قطر اصلی تکرار کنید. اعداد بیرون از مربع اصلی را در هر سطر یا ستون به دورترین خانه خالی (در همان سطر یا همان ستون) منتقل کنید.
عمل بالا را روی قطر فرعی مربع دوم (از پائین به بالا تکرار کنید. آیا دو مربع به دست آمده متعامد اند؟



۴۸- چگونه می توان طوری برنامه ریزی کرد که ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ ریزی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

۴۹- اگر سه برادر تقریباً قد و قامت برابر دارند در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس ها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟

ن صفحه ۷۲ کتاب	پاسخ گویی در منزل	پاسخ گویی در کلاس
----------------	-------------------	-------------------

۵۰- می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه روی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

۵۱- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۵۲- ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان پذیر است؟ اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۵۳- برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.

۵۴- با ارقام ۵, ۶, ۷, ۵ و ۷ چه تعداد کد شش رقمی می توان نوشت؟

۵۵- می خواهیم روی تعدادی جعبه حاوی اجناس تولید شده خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف $a, a, b, a, c, c, d, d, d$ از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۵۶- ۷ نفر به چند طریق می توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

۵۷- به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:
الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۵۸- مطلوب است تعداد جواب های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط های داده شده:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$$

$$x_i > 0, 2 \leq i \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$$

$$x_1 > 2, x_5 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$$

$$x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

$$x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$$

۵۹- به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

۶۰- به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۶۱- آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

۶۲- مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید.

الف) سطر دوم و سوم مربع A جابه جا کنید و مربع حاصل را A_1 بنامید. آیا A_1 و A متعامدند؟

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع A را جابه جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه جا کنید و مربع حاصل را A_2 بنامید. آیا A_2 و A متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

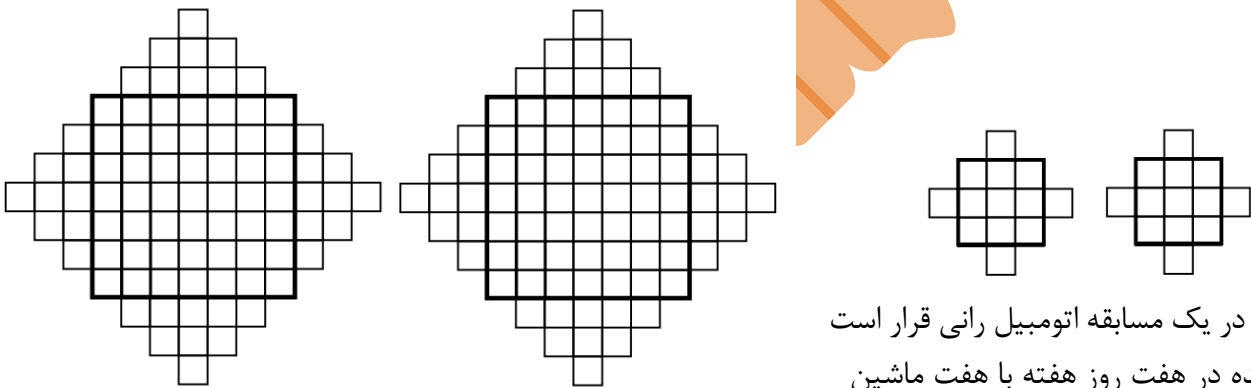
۱- آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می آید؟

۲-

۳- آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می آید؟

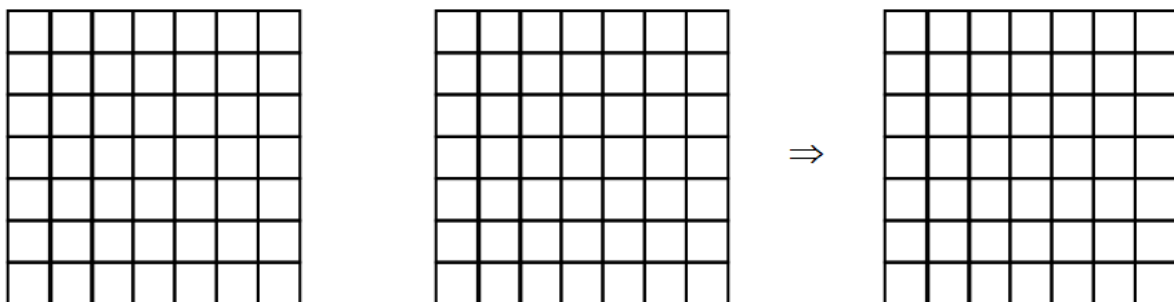
۶۳- قرار است شش مدرس $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ و در شش جلسه متوالی در شش کلاس $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ به گونه تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی نمایید.

۶۴- دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.



۶۵- در یک مسابقه اتومبیل رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین

مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:
 الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛
 ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛
 پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛
 ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.
 برای این منظور یک برنامه ریزی انجام دهید.



تمرین های اضافی

- ۶۶- با حروف کلمه "دارا" چند کلمه می توان نوشت .
- ۶۷- چند عدد ۷ رقمی با رقم های ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۸, ۸, ۸ می توان نوشت ؟
- ۶۸- با اعداد ۵, ۵, ۵, ۴, ۳, ۳, ۳, ۳ چند عدد هشت رقمی می توان نوشت؟
- ۶۹- با ارقام ۳, ۳, ۳, ۳, ۰, ۰, ۰, ۰ چند عدد هشت رقمی می توان نوشت؟
- ۷۰- تعداد اعداد پنج رقمی شامل دو رقم ۴ و سه رقم ۵ را مشخص کنید.
- ۷۱- تعداد اعداد پنج رقمی شامل دو رقم ۴ و دو رقم ۵ و یک رقم ۶ را مشخص کنید.
- ۷۲- با استفاده از جایگشت با تکرار بسط سه جمله ای $(x+y+z)^3$ را بنویسید.
- ۷۳- ضریب جمله ی $x^{17}y^{13}$ در بسط $(x+y)^{30}$ را مشخص کنید.
- ۷۴- در بسط دو جمله ای $(x+y)^6$ مجموع ضرایب جملات درجه زوج x را به دست آورید.
- ۷۵- تعداد شماره تلفن های هفت رقمی که تنها از ارقام ۷, ۵, ۴, ۲ تشکیل شده اند را مشخص کنید.
- ۷۶- با حروف کلمه "دارا" چند کلمه می توان نوشت .
- ۷۷- تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۹۹۹ که مجموع ارقام آنها برابر ۱۴ می باشد را به دست آورید.
- ۷۸- چند عدد چهار رقمی با ارقام ۷ و ۵ و ۳ می توان نوشت به طوریکه از هر کدام از ارقام ۷ و ۵ و ۳ حداقل یکی موجود باشد؟
- ۷۹- معادله ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$ چند جواب صحیح و غیر منفی با شرط $3 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 4$ را به دست آورید.
- ۸۰- معادله ی $(x_1+x_2)^2+x_3+x_4=20$ چند جواب طبیعی دارد؟
- ۸۱- معادله ی $x_1+x_2+x_3=\frac{10}{x_3}$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟
- ۸۲- تعداد جواب های صحیح و نامنفی دستگاه
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=16 \end{cases}$$
 را به دست آورید.
- ۸۳- تعداد جوابهای صحیح و بزرگتر از ۳- معادله ی $\sum_{i=1}^4 x_i = -5$ را به دست آورید.
- ۸۴- معادله ی $x_1+x_2+x_3=28$ در فاصله ی $(4, +\infty)$ چند جواب صحیح دارد؟
- ۸۵- به چند طریق می توان ۸ خودکار و ۷ مداد را بین ۵ دانش آموز چنان قسمت کرد که هر دانش آموز لااقل یک خودکار دریافت کند؟
- ۸۶- تعداد نقاط با مختصات صحیح که درون دایره به معادله ی $x^2+y^2=16$ قرار دارند کدام است؟

۸۷- هفت کبوتر به چند طریق می توانند در سه لانه متمایز قرار بگیرند به طوریکه هیچ لانه ای خالی نماند؟

۸۸- پس از ساده کردن عبارت حاصل از بسط $(a+b+c+d)^{10}$ چند جمله دارد؟

۸۹- اگر همه درآیه های قطر اصلی یک مربع لاتین 3×3 باشد، مجموع درآیه های روی قطر فرعی این مربع برابر چند است؟

۹۰- چند مربع لاتین 3×3 وجود دارد؟

۹۱- در مربع لاتین مرتبه چهار A جایگشت $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 2$ و $2 \rightarrow 4$ را اعمال می کنیم تا مربع B به دست آید. آیا و متعامد هستند؟

۹۲- در مربع لاتین شکل زیر حاصل $a+b+d+e$ را به دست آورید.

۱	۲	۳
a	b	c
d	e	f

۹۳- اگر درآیه های نظیر به نظیر دو مربع لاتین متعامد 3×3 را در مربع زیر قرار داده باشیم، حاصل $a+b$ را به دست آورید.

۱۳	a	۳۱
۲۱	b	۱۲
۳۲	c	۲۳

۹۴- اگر دو مربع شکل زیر متعامد باشند، حاصل $ax+by$ را به دست آورید.

x	y	z
۱	۲	۳
۳	t	w

a	b	c
۱	۲	۳
۲	d	e

۹۵- اگر دو مربع شکل زیر متعامد باشند، حاصل $a+b+c+d$ را به دست آورید.

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

a		۴	۱
	b		۳
۱		c	
۳	۲		d

۹۶- اگر دو مربع شکل زیر متعامد باشند، مقدار x را به دست آورید.

		۲	
۴			
		x	

۲			
		۲	d

۹۷- به چند طریق می توان دو خانه از یک مربع لاتین از مرتبه هفت را انتخاب کرد به طوری که مجموع اعداد این دو خانه برابر ۱۰ باشد؟

۹۸- با اعمال جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ از مربع لاتین سمت چپ به مربع سمت راست رسیده ایم. هر دو

۱		۲	

			۳
۴			

مربع لاتین را تکمیل کنید.

۹۹- در یک مسابقه اسب دوانی ۵ اسب سوار در پنج روز از هفته و با ۵ اسب مختلف در ۵ مسیر مختلف مسابقه می دهند به طوری که شرایط زیر را داشته باشد:

۱۰۰- الف) هر اسب سوار هر روز با یک اسب در یک مسیر مسابقه دهد.

۱۰۱- ب) هر اسب سوار یا هر اسب دقیقاً یک روز اسب سواری کند.

۱۰۲- پ) هر اسب هر روز دقیقاً در یک مسیر اسب سواری کند.

۱۰۳- ت) هر اسب در هر مسیر دقیقاً یکبار حضور داشته باشد.

برای این منظور یک برنامه ریزی کلی انجام دهید.

۱۰۴- چند مربع لاتین 3×3 متفاوت وجود دارد؟

۱۰۵- یک مربع لاتین 3×3 با چند مربع لاتین متعامد است؟

۱۰۶- یک مربع لاتین از مرتبه ۴ یا بیشتر رسم کنید و نشان دهید با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از آن مربع لاتین غیر متعامد با آن به وجود می آید؟

۱۰۷- در شکل زیر می دانیم مربع سمت چپ چرخشی است. مربع سمت راست را شبه چرخشی می نامیم. نشان دهید دو مربع متعامد هستند.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	۵
۳	۲	۱	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۱	۵	۴	۳	۲

درس ۲ روش هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

۱۰۸- الف- برای دو مجموعه متناهی A و B توضیح دهید چرا رابطه $|A \cup B| = |A| + |B|$ در حالت کلی صحیح نمی باشد.

ب- جای خالی را تکمیل کنید.

برای دو مجموعه متناهی A و B در حالت کلی داریم
 رابطه بالا به برای دو مجموعه معروف است.
 ۱۰۹- ۲۷ نفر از ساکنین یک روستا در کارگاه ریسندگی و بافندگی ثبت نام کرده اند. اگر ۱۵ نفر در کارگاه ریسندگی و ۱۹ نفر در کارگاه بافندگی شرکت داشته باشند، چند نفر فقط ریسندگی را انتخاب نموده اند؟

۱۱۰- تعداد اعداد سه رقمی که مضرب ۲ یا ۳ می باشند را به دست آورید.

۱۱۱- تعداد اعداد سه رقمی که نه مضرب ۳ باشند و نه مضرب ۴ باشند را به دست آورید.

۱۱۲- اگر S مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq S$ در اینصورت $|\bar{A}| = \dots\dots\dots$
 ۱۱۳- در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.

۱۱۴- اصل شمول برای سه مجموعه را بنویسید.

۱۱۵- اگر S مجموعه مرجع باشد، حاصل $|A \cup B \cup C|$ را به دست آورید.

۱۱۶- چند عدد طبیعی کوچکتر مساوی ۴۰۰ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟

۱۱۷- چند عدد طبیعی n ، $1 \leq n \leq ۳۵$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند؟

۱۱۸- اگر یک قفل رمز دار شامل چهار رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی هایی که در هریک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد).

۱۱۹- در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورهه، آبگرم و حاجی آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به طوری که پس از تکمیل راه ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می توان چنین راه هایی را طراحی کرد؟
۱۲۰- تابع پوشا را تعریف کنید.

۱۲۱- تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۲ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی چند تا است؟

۱۲۲- تعداد توابع پوشا روی یک مجموعه n عضوی چند تا است؟

۱۲۳- تعداد توابع پوشا از مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ به مجموعه $B = \{b_1, b_2\}$ را به دست آورید.

۱۲۴- تعداد توابع پوشا از مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ به مجموعه $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ را به دست آورید.

۱۲۵- به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

۱۲۶- تعداد توابع پوشا از مجموعه $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$ به مجموعه $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ را به دست آورید.

۱۲۷- ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

۱۲۸- تعداد توابع از $\{a, b, c, d, e\}$ به مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ که a را به ۱ می برد چند تا است؟

۱۲۹- تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی را مشخص کنید.

۱۳۰- به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟

۱۳۱- حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید حداقل دو نفر از آنها ماه تولدشان یکسان است؟

اصل لانه کبوتری

۱۳۲- اصل لانه کبوتری: اگر..... کبوتر و لانه داشته باشیم و در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل کبوتر در آن قرار گرفته است.

۱۳۳- نشان دهید اگر بخواهیم ضلع های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث هم رنگ خواهند شد.

۱۳۴- ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می شود به طوری که به پیمانه ۴ هم نهشت می باشند.

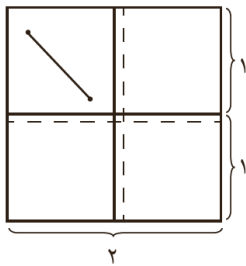
۱۳۵- آمار نشان می دهد تعداد تارهای موی سر افراد بیش از ۳۰۰۰۰۰ نیست. ثابت کنید در شهری که ۳۰۰۰۰۱ نفر جمعیت دارد حداقل دو نفر از شهروندان تعداد تار موهایشان با هم برابر است.

۱۳۶- مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۱ مفروض است. پنج نقطه را از درون مثلث انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه کمتر از $\frac{1}{4}$ می باشد.

۱۳۷- مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۳ مفروض است. ۱۰ نقطه را از درون مثلث انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل فاصله ی دو نقطه کمتر از ۱ می باشد.

۱۳۸- نشان دهید هر زیر مجموعه ی شش عضوی از مجموعه ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ حداقل دارای دو عضو است که مجموع آنها برابر ۱۰ می باشد.

۱۳۹- برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.



۱۴۰- نشان دهید در یک خانواده حداقل ۵ نفری، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۱۴۱- نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه $p \geq 2$ حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

۱۴۲- جملات زیر را تکمیل کنید.

- اگر $n+1$ کبوتر یا بیشتر به n لانه بروند در اینصورت اطمینان داریم یکی از لانه ها حداقل کبوتر دارد.
- اگر $2n+1$ کبوتر یا بیشتر به n لانه بروند در اینصورت اطمینان داریم یکی از لانه ها حداقل کبوتر دارد.
- اگر $3n+1$ کبوتر یا بیشتر به n لانه بروند در اینصورت اطمینان داریم یکی از لانه ها حداقل کبوتر دارد.
- اگر $kn+1$ کبوتر یا بیشتر به n لانه بروند در اینصورت اطمینان داریم یکی از لانه ها حداقل کبوتر دارد.

۱۴۳- در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

۱۴۴- در یک دبیرستان حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

۱۴۵- ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

۱۴۶-

۱۴۷- حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟

۱۴۸- حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است.

۱۴۹- نشان دهید در هر کلاس (غیر خصوصی) حداقل ۲ دانش آموز یافت می شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

۱۵۰- در یک کلاس ۳۳ نفر دانش آموز وجود دارد . نشان دهید نام فامیل حداقل دو نفر از آنها با یک حرف یکسان شروع می شود.

۱۵۱- با استفاده از اصل لانه کبوتر ثابت کنید از میان سه عدد طبیعی می توان دو عدد پیدا کرد که مجموع آنها زوج باشد.

۱۵۲- تاسی را هفت بار پرتاب می کنیم . با استفاده از اصل لانه کبوتر ثابت کنید حداقل دو بار نتیجه یکسان حاصل می شود.

۱۵۳- از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۸۰ می خواهیم ۴۱ عدد را انتخاب کنیم. با استفاده از اصل لانه کبوتر نشان دهید حداقل مجموع دو تا از این اعداد برابر ۸۱ است.

۱۵۴- از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰ می خواهیم ۱۶ عدد را انتخاب کنیم. با استفاده از اصل لانه کبوتر نشان دهید دستکم تفاضل دو تای از آنها برابر ۱ است.

ن کتاب صفحه ۸۴	پاسخ گویی در منزل	پاسخ گویی در کلاس
----------------	-------------------	-------------------

۱۵۵- در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟

۱۵۶- در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

- ۱۵۷- در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند . اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند مشخص کنید:
- الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می کنند؟
- ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟
- پ) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟
- ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

۱۵۸- اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

۱۵۹- چه تعداد تابع چون $f: A \rightarrow B$ می توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=5$ و $|B|=4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

۱۶۰- به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

۱۶۱- به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۱۶۲- ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند.

۱۶۳- ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند لاقلاً ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۶۴- حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لاقلاً ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

۱۶۵- ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.
۱۶۶- مجموعه اعداد $A = \{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

۱۶۷- مجموعه اعداد $A = \{1, 5, 9, 13, \dots, 77, 81, 85\}$ را که به صورت یک دنباله حسابی مرتب شده اند، در نظر می گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۱۶۸- ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.

۱۶۹- ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می باشد.

تمرین های اضافی

- ۱۷۰- تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۱۳ عضوی به یک مجموعه ۱۵ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۱- تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۱۵ عضوی به یک مجموعه ۱۳ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۲- تعداد توابع یک به یک روی یک مجموعه n عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۳- تعداد توابع غیر یک به یک روی یک مجموعه ۴ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۴- تعداد توابع یک به یک و پوشا روی یک مجموعه ۴ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۵- تعداد توابع پوشا روی یک مجموعه n عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۶- تعداد توابع $f: \{a,b,c,d\} \rightarrow \{1,2,3\}$ که ۱ را نمی پوشاند را مشخص کنید.
- ۱۷۷- تعداد توابع $f: \{a,b,c,d\} \rightarrow \{1,2,3\}$ که نه ۱ را می پوشاند و نه ۲ را مشخص کنید.
- ۱۷۸- تعداد توابع غیر پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را مشخص کنید.
- ۱۷۹- ۱۰۰ عدد طبیعی متمایز داریم، نشان دهید اگر هر یک از آن ها را بر ۱۵ تقسیم کنیم، حداقل ۷ عدد دارای باقیمانده یکسان می باشند.
- ۱۸۰- برای آن که در یک مدرسه دست کم ۶ دانش آموز در یکی از ماه های سال متولد شده باشند، این مدرسه حداقل باید چند دانش آموز داشته باشد؟
- ۱۸۱- شخصی برای تولد خود ۵۸ میهمان دعوت کرده است، حداقل چند نفر روز تولدشان در یک روز از هفته است؟
- ۱۸۲- کلاسی دارای ۳۰ دانش آموز است. حداقل چند نفر روز تولدشان در یک روز از هفته است؟
- ۱۸۳- دبیرستانی ۴۰۰ دانش آموز دارد. حداقل چند نفر هفته تولد یکسانی دارند؟
- ۱۸۴- ۵۰ ورزش کار در رشته های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهر های اهواز، قم، زشت و همدان در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. نشان دهید حداقل ۵ ورزش کار هم رشته و هم شهری هستند.

- ۱۸۵- ۹ نقطه را درون دایره ای به شعاع ۱ انتخاب می کنیم. نشان دهید حداقل دو نقطه دارای فاصله ای کمتر از ۱ می باشند.
- ۱۸۶- چند نقطه را درون دایره ای به شعاع ۴ انتخاب می کنیم تا حداقل دو نقطه دارای فاصله ای کمتر از $4\sqrt{3}$ می باشند.
- ۱۸۷- هفت نقطه را درون مستطیلی با طول و عرض ۶ و ۴ انتخاب می کنیم. نشان دهید حداقل دو نقطه دارای فاصله ای کمتر از $2\sqrt{2}$ می باشند.
- ۱۸۸- هفت نقطه را درون شش ضلعی منتظمی به طول ضلع ۱ انتخاب می کنیم. نشان دهید حداقل دو نقطه دارای فاصله ای کمتر از ۱ می باشند.
- ۱۸۹- در یک آزمون ۱۰۲۵ نفر شرکت کرده اند. نشان دهید حداقل ۲ نفر حروف اول نام و نام خانوادگی یکسانی دارند.
- ۱۹۰- در یک کلاس ۳۰ نفری حداقل چند نفر در یک ماه به دنیا آمده اند؟
- ۱۹۱- کلاس باید چند دانش آموز داشته باشد تا حداقل ۵ نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند.
- ۱۹۲- از کیسه ای شامل ۷ مهره سفید ، ۶ مهره قرمز و ۸ مهره سیاه ، حداقل چند مهره خارج کنیم تا مطمئن شویم حداقل ۴ مهره هم رنگ داریم؟
- ۱۹۳- کمترین تعداد برای آن که حداقل سه نفر ماه تولد و روز هفته یکسانی داشته باشند را مشخص کنید.
- ۱۹۴- در یک مغازه دو نوع بلوز پشمی و گرگی در سه رنگ و چهار اندازه وجود دارد. حداقل چند بلوز بخریم تا مطمئن شویم سه بلوز یکسان خریده ایم؟