بسمه تعالی   الا بذکرالله تطمئن القلوب   آگاه باشید که تنها یاد خدا آرام بخش دل هاست . (قران کریم الرعد ۲۸)   ۱

اداره آموزش و پرورش خراسان رضوی   اداره آموزش و پرورش ناحیه ۳ مشهد   دبیرستان هاشمی نژاد ۲

سال تحصیلی : ۹۸-۹۷   مدت آزمون : ۱۲ دقیقه   گروه الف

نام و نام خانوادگی :   نام دبیر : زنوززاده   کلاس : دوازدهم ریاضی ۱

ردیف	۱	۲	۳	۴
۱				❉
۲	❉			
۳		❉		
۴		❉		
۵			❉	
۶		❉		
۷	❉			
۸				❉
۹		❉		

تعداد درست :

تعداد نادرست :

تعداد نزده :

درصد نمره با نمره منفی :

نمره با نمره منفی :

درصد نمره بدون نمره منفی :

نمره بدون نمره منفی :

ردیف	۱	۲	۳	۴
۱۰	❉			
۱۱	❉			
۱۲				❉
۱۳			❉	
۱۴				❉
۱۵	❉			
۱۶			❉	
۱۷			❉	
۱۸				❉

۱) مجموع درایه های ماتریس $A_{3\times 3}$ که درایه های عمومی آن از دستور $a_{ij}=\begin{cases} i-j, i=j \\ i+j, i\neq j \end{cases}$ بدست آیند کدام است؟

۱) ۲۰   ۲) ۱۵   ۳) ۱۲   ۴) ۲۴

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$A_{3\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \sum=24$$

۲) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^2=\alpha A+\beta I_2$ دو تایی (α,β) کدام است؟

۱) $(5,4)$ ۲) $(4,5)$ ۳) $(4,7)$ ۴) $(7,4)$

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

روش اول :

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 & 25 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} 19 & 25 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\alpha & 5\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=4 \end{cases}$$

روش دوم : بنا به قضیه کیلی همیلتون هر ماتریسی در معادله سرشت نمایی خودش صدق می کند.یعنی

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow A^2-(a+d)A+|A|I=O, A=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\Rightarrow A^2-5A-4I=O\Rightarrow$$

$$A^2=5A+4I\Rightarrow \alpha=5,\beta=4$$

۳) در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل جمع درایه ها در ماتریس A^4 کدام است؟

۱) ۸۱   ۲) ۲۷   ۳) ۲۴۳   ۴) ۹   (کنکور آزاد ریاضی ۸۳)

جواب : گزینه ۲ صحیح است.
$$\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۳ \\ -۳ & ۳ & -۳ \\ ۳ & -۳ & ۳ \end{bmatrix}=۳A$$

$$A^۲=kA \Rightarrow A^n=k^{n-۱}A \Rightarrow A^۴=۳^۳A \Rightarrow \sum=۳^۳\times ۱=۲۷$$

۴) اگر $A=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|A|$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۸

جواب : گزینه ۲ صحیح است.
$$|A|=\frac{۱}{۴}(|A|^۲+۴) \Rightarrow |A|^۲-۴|A|+۴=۰ \Rightarrow |A|=۲$$

۵) هرگاه A ماتریس مربعی از مرتبه ۲×۲ و $|A|\neq ۰$ و $\left|A|A|^۲-۷A\right|=|۹A|$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۳ ۳) ± ۴ ۴) ± ۵

جواب : گزینه ۳ صحیح است.
$$|kA_n|=k^n|A_n|$$
$$\left|A|A|^۲-۷A\right|=|۹A| \Rightarrow \left|(|A|^۲-۷)A\right|=|۹A| \Rightarrow (|A|^۲-۷)^۲|A|=۹^۲|A|$$
$$\xrightarrow{|A|\neq ۰}(|A|^۲-۷)^۲=۸۱ \Rightarrow |A|^۲-۷=\pm ۹ \Rightarrow |A|^۲=-۲ \text{ غ ق ق یا } |A|^۲=۱۶ \Rightarrow |A|=\pm ۴$$

۶) اگر ماتریس A از مرتبه‌ی ۲ و $A^۲=-۴I$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $|A+۲I|$ کدام عدد می تواند باشد؟ (I ماتریس همانی از مرتبه‌ی ۲ است.)

۱) ۱۶ ۲) -۸ ۳) -۳۲ ۴) ۶۴

جواب : گزینه ۲ صحیح است.
$$|A^۲|=(-۴)^۲|I|=۱۶\times ۱ \Rightarrow |A|^۲=۱۶ \Rightarrow |A|=\pm ۴$$
$$\left|(A+۲I)^۲\right|=\left|A^۲+۴AI+۴I^۲\right|=|-۴I+۴A+۴I|=۴^۲|A| \Rightarrow |A+۲I|^۲=۶۴ \Rightarrow |A+۲I|=\pm ۸$$

۷) در معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & ۴ & ۶ \\ ۳ & ۶ & ۳x \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix}=۰$ حاصل ضرب ریشه ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۴

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل دترمینان را بسط می دهیم :

$$\begin{vmatrix} x & ۴ & ۶ \\ ۳ & ۶ & ۳x \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = x(۱۸-۶x) - ۴(۱۲-۱۲) + (۱۲x-۳۶) = ۰ \Rightarrow ۶x^۲ - ۳۰x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow x_۱x_۲ = \frac{c}{a} = ۶$$

روش دوم : برای $x = ۲$ دو سطر اوّل و سوم ماتریس با هم متناسب اند پس دترمینان صفر می شود لذا $x = ۲$ یک ریشه معادله است. برای $x = ۳$ دو سطر دوم و سوم ماتریس با هم متناسب اند پس دترمینان صفر خواهد شد لذا $x = ۳$ یک ریشه معادله است.

در نتیجه حاصل ضرب ریشه ها برابر ۶ است.

۸) به هر درایه‌ی سطر سوم دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۶ & ۵ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}$ کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان ۸ واحد بیشتر گردد؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} ۵ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۶ \\ ۳+a & ۱+a & ۲+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۵ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۵ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۶ \\ a & a & a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۵ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۶ \\ a & a & a \end{vmatrix} = ۸$$

$$\Rightarrow ۵(۵a-۶a) - ۳(۲a-۶a) + (۲a-۵a) = ۸ \Rightarrow ۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

۹) اگر $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $(-۲A)(۲A^{-۱})$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$\left|(-۲A)(۲A^{-۱})\right| = (-۴)^۲\left|AA^{-۱}\right| = ۱۶|I| = ۱۶ \times ۱ = ۱۶$$

۱۰) اگر داشته باشیم، $۳A^۲ - ۲A + I = O$، وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $-۳A + ۲I$ ۲) $۲A + ۳I$ ۳) $-۳A - ۲I$ ۴) $-۲A - ۳I$

جواب : گزینه ۱ درست است. روش اوّل : با استفاده از تجزیه یک طرف تساوی را به I و طرف دیگر حاصل ضرب ماتریس A در یک پرانتز تبدیل می کنیم.

$$۳A^۲ + ۲A + I = ۰ \Rightarrow A(-۳A + ۲I) = I$$

$$\Rightarrow |A(-۳A+۲I)| = |I| \Rightarrow |A||-۳A+۲I| = ۱ \neq ۰ \Rightarrow \exists A^{-۱} : A^{-۱} = -۳A + ۲I$$

روش دوم :

$$A^{-۱}(۳A^۲ - ۲A + I) = A^{-۱} \times O \Rightarrow ۳A - ۲I + A^{-۱} = O \Rightarrow A^{-۱} = -۳A + ۲I$$

۱۱) اگر $A=\begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A+۲B$، وارون پذیر نیست؟

۱) ۵، ‎-۷ ۲) ۷، ‎-۵ ۳) ۴، ‎-۷ ۴) ۵، ‎-۳ (کنکور سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$A+۲B=\begin{bmatrix} a-۲ & ۳ \\ ۹ & a+۴ \end{bmatrix}$$

$$|A+۲B|=۰ \Rightarrow a^۲+۲a-۸-۲۷=۰ \Rightarrow a^۲+۲a-۳۵=۰ \Rightarrow (a+۷)(a-۵)=۰ \Rightarrow a=-۷ \text{ یا } a=۵$$

۱۲) اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $A^{-۱}.(۲B)$، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۵ & -۷ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۸ & -۱۵ \\ -۷ & ۱۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۷ \\ -۹ & ۱۳ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۰ & -۱۴ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}$ (کنکور سراسری تجربی۹۶)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۲-۱۰}\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۵ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ \frac{-۵}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \text{ و } ۲B=\begin{bmatrix} ۸ & -۱۲ \\ ۶ & -۱۰ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}.(۲B)=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ \frac{-۵}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۸ & -۱۲ \\ ۶ & -۱۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & -۱۴ \\ -۱۱ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

۱۳) اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $(AB)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۳)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$AB=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \text{ و } |AB|=۱ \Rightarrow (AB)^{-۱}=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۴) از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$، سطر اوّل ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۳۳ & -۱۴ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۳۳ & ۱۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۳۳ & -۱۴ \end{bmatrix}$

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}^{-۱}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۹ & -۴ \\ \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۳ & -۱۴ \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

۱۵)اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) ۱ ۴) ۳۳ (کنکور سراسری تجربی۸۰)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $|A|=\frac{۱}{|A^{-۱}|}=\frac{۱}{۱۲+۲۱}=\frac{۱}{۳۳}$

۱۶) به ازای چند مقدار m دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & m \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و دترمینان معکوس آن برابر می شود؟ $(|A|=|A^{-۱}|)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|A|=m-۶$ از طرفی داریم : $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$

در نتیجه : $|A|=\frac{۱}{|A|}\Rightarrow |A|^{۲}=۱\Rightarrow (m-۶)^{۲}=۱\Rightarrow \begin{cases} m-۶=۱\Rightarrow m=۷ \\ m-۶=-۱\Rightarrow m=۵ \end{cases}$

۱۷) به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+۲y=m \\ ۳x+(m+۱)y=m+۱ \end{cases}$ بیشمار جواب دارد؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

جواب : گزینه ۳ صحیح است. برای اینکه دستگاه غیرهمگن جواب نداشته و یا دارای بیشمار جواب باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب آن مساوی صفر باشد

$$\begin{vmatrix} m & ۲ \\ ۳ & m+۱ \end{vmatrix}=۰\Rightarrow m^{۲}+m-۶=۰\Rightarrow \begin{cases} m=-۳\Rightarrow \frac{-۳}{۳}=\frac{۲}{-۳+۱}\neq\frac{-۳}{-۳+۱}\otimes \\ m=۲\Rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۲+۱}=\frac{۲}{۲+۱} \end{cases}$$

۱۸) اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ جواب معادله‌ی $AX=B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ (کنکور سراسری تجربی۷۵)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $|A|=۱\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow X=A^{-۱}B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

اداره آموزش و پرورش خراسان رضوی   اداره آموزش و پرورش ناحیه ۳ مشهد   دبیرستان هاشمی نژاد ۲
سال تحصیلی : ۹۸-۹۷   مدت آزمون : ۱۲ دقیقه   گروه ب
نام و نام خانوادگی :   نام دبیر : زنوززاده   کلاس : دوازدهم ریاضی ۱

ردیف	۱	۲	۳	۴
۱		*		
۲				*
۳			*	
۴	*			
۵				*
۶	*			
۷		*		
۸		*		
۹				*
۱۰			*	
۱۱	*			
۱۲				*
۱۳	*			
۱۴			*	
۱۵				*
۱۶			*	
۱۷		*		
۱۸			*	

تعداد درست :
تعداد نادرست :
تعداد نزده :
درصد نمره با نمره منفی :
نمره با نمره منفی :
درصد نمره بدون نمره منفی :
نمره بدون نمره منفی :

۱) مجموع درایه های ماتریس $A_{۳\times۳}$ که درایه های عمومی آن از دستور $a_{ij}=\begin{cases} i-j+ij, i=j \\ i+j-ij, i\neq j\end{cases}$ بدست آیند کدام است؟

۱) ۲۰   ۲) ۱۶   ۳) ۱۲   ۴) ۲۴

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۹\end{bmatrix}\Rightarrow \sum=۱۶$$

۲) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I_۲$ دو تایی (α,β) کدام است؟

۱) $(۲,۱۱)$ ۲) $(۲,۵)$ ۳) $(۴,۱۱)$ ۴) $(۴,۵)$

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

روش اول :
$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ & ۱۶ \\ ۸ & ۱۷\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} ۹ & ۱۶ \\ ۸ & ۱۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & ۴\alpha \\ ۲\alpha & ۳\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=۴ \\ \beta=۵\end{cases}$$

روش دوم : بنا به قضیه کیلی همیلتون هر ماتریسی در معادله سرشت نمایی خودش صدق می کند.یعنی

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲-(a+d)A+|A|I=O, A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲-۴A-۵I=O\Rightarrow$$

$$A^۲=۲A+۵I\Rightarrow \alpha=۴,\beta=۵$$

۳) در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ حاصل جمع درایه ها در ماتریس $A^۶$ کدام است؟

۱) ۸۱   ۲) ۲۷   ۳) ۲۴۳   ۴) ۹

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۳ \\ -۳ & ۳ & -۳ \\ ۳ & -۳ & ۳ \end{bmatrix}=۳A$$

$$A^۲=kA \Rightarrow A^n=k^{n-۱}A \Rightarrow A^۶=۳^۵A \Rightarrow \sum=۳^۵\times۱=۲۴۳$$

۴) اگر $A=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱۶ & |A| \end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|A|$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۸-

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$|A|=\frac{۱}{۱۶}(|A|^۲+۶۴) \Rightarrow |A|^۲-۱۶|A|+۶۴=۰ \Rightarrow |A|=۸$$

۵) هرگاه A ماتریس مربعی از مرتبه ۲×۲ و $|A|\neq۰$ و $\left|A|A|^۲-۹A\right|=|۱۶A|$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ±۲ ۲) ±۳ ۳) ±۴ ۴) ±۵

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$|kA_n|=k^n|A_n|$$

$$\left|A|A|^۲-۹A\right|=|۱۶A| \Rightarrow \left|(|A|^۲-۹)A\right|=|۱۶A| \Rightarrow (|A|^۲-۹)^۲|A|=۱۶^۲|A|$$

$$\xrightarrow{|A|\neq۰}(|A|^۲-۹)^۲=۲۵۶ \Rightarrow |A|^۲-۹=\pm۱۶ \Rightarrow |A|^۲=-۷ \text{ غ ق ق یا } |A|^۲=۲۵ \Rightarrow |A|=\pm۵$$

۶) اگر ماتریس A از مرتبه‌ی ۲ و $A^۲=-I$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $|A+I|$ کدام عدد می تواند باشد؟ (I ماتریس همانی از مرتبه‌ی ۲ است.)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$|A^۲|=(-۱)^۲|I|=۱\times۱ \Rightarrow |A|^۲=۱ \Rightarrow |A|=\pm۱$$

$$|(A+I)^۲|=|A^۲+۲AI+I^۲|=|-I+۲A+I|=۲^۲|A| \Rightarrow |A+I|^۲=۴ \Rightarrow |A+I|=\pm۲$$

۷) در معادله‌ی $\begin{vmatrix} ۴ & ۶ & x \\ x & ۶ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{vmatrix}=۰$ حاصل ضرب ریشه ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۴

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل دترمینان را بسط می دهیم :

$$\begin{vmatrix} x & ۶ & ۴ \\ ۳ & ۶ & x \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix} = x(۱۲-۳x)-۶(۶-x)+۴(۹-۶)=۰ \Rightarrow -۳x^{۲}+۱۸x-۲۴=۰ \Rightarrow x_۱x_۲=\frac{c}{a}=۸$$

روش دوم : برای $x=۲$ دو سطر اوّل و سوم ماتریس با هم متناسب اند پس دترمینان صفر می شود لذا $x=۲$ یک ریشه معادله است. برای $x=۴$ دو ستون دوم و سوم ماتریس با هم متناسب اند پس دترمینان صفر خواهد شد لذا $x=۴$ یک ریشه معادله است. در نتیجه حاصل ضرب ریشه ها برابر ۸ است.

۸) به هر درایه‌ی ستون سوم دترمینان $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۷ \end{vmatrix}$ کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان یک واحد بیشتر گردد؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱+a \\ ۲ & ۲ & ۳+a \\ ۱ & ۳ & ۷+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۷ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۲ & ۲ & a \\ ۱ & ۳ & a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۲ & ۲ & a \\ ۱ & ۳ & a \end{vmatrix} = ۱$$

$$\Rightarrow ۳(۲a-۳a)-۲(۲a-۳a)+(۲a-۲a)=۱ \Rightarrow -a=۱ \Rightarrow a=-۱$$

۹) اگر $A=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $(-۲A)(۳A^{-۱})$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$\left|(-۲A)(۳A^{-۱})\right| = (-۶)^{۲}\left|AA^{-۱}\right| = ۳۶|I| = ۳۶\times ۱ = ۳۶$$

۱۰) اگر داشته باشیم، $۳A^{۲}+۲A+I=O$، وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $۳A+۲I$ ۲) $۲A+۳I$ ۳) $-۳A-۲I$ ۴) $-۲A-۳I$

جواب : گزینه ۳ درست است. روش اوّل : با استفاده از تجزیه یک طرف تساوی را به I و طرف دیگر حاصل ضرب ماتریس A در یک پرانتز تبدیل می کنیم.

$$۳A^{۲}+۲A+I=۰ \Rightarrow A(-۳A-۲I)=I$$

$$\Rightarrow |A(-۳A-۲I)|=|I| \Rightarrow |A||-۳A-۲I|=۱\neq ۰ \Rightarrow \exists A^{-۱} : A^{-۱}=-۳A-۲I$$

روش دوم :

$$A^{-۱}(۳A^{۲}+۲A+I)=A^{-۱}\times O \Rightarrow ۳A+۲I+A^{-۱}=O \Rightarrow A^{-۱}=-۳A-۲I$$

۱۱) اگر $A=\begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A+۲B$، وارون پذیر نیست؟

۱) ۵، ‎-۷   ۲) ۷، ‎-۵   ۳) ۴، ‎-۷   ۴) ۵، ‎-۳   (کنکور سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$A+۲B=\begin{bmatrix} a-۲ & ۳ \\ ۹ & a+۴ \end{bmatrix}$$

$$|A+۲B|=۰ \Rightarrow a^۲+۲a-۸-۲۷=۰ \Rightarrow a^۲+۲a-۳۵=۰ \Rightarrow (a+۷)(a-۵)=۰ \Rightarrow a=-۷ \text{ یا } a=۵$$

۱۲) اگر $A=\begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $B(۲A^{-۱})$، کدام است؟(کنکور سراسری تجربی۹۶خارج از کشور)

۱) $\begin{bmatrix} -۸ & ۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۸ & -۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۷ & -۱۲ \\ -۹ & -۱۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۸ & -۱۵ \\ -۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. .

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-۱۴+۱۲}\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۳}{۲} \\ -۲ & \frac{-۷}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow ۲A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$B(۲A^{-۱})=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۸ & -۱۵ \\ -۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$$

۱۳) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A\times B)^{-۱}$، کدام است؟(کنکور سراسری تجربی ۹۴ خارج از کشور)

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ \\ -۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰/۵ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$(A\times B)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

۱۴) از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، سطر اوّل ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \end{bmatrix}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}^{-۱}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

۱۵) اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}5&7\\3&4\end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) -۱

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$|A|=\frac{1}{|A^{-1}|}=\frac{1}{20-21}=-1$$

۱۶) به ازای چند مقدار m دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}m&3\\2&1\end{bmatrix}$ و دترمینان معکوس آن برابر می شود؟ $(|A|=|A^{-1}|)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|A|=m-6$ از طرفی داریم : $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

در نتیجه :

$$|A|=\frac{1}{|A|}\Rightarrow |A|^2=1\Rightarrow (m-6)^2=1\Rightarrow \begin{cases} m-6=1\Rightarrow m=7\\ m-6=-1\Rightarrow m=5\end{cases}$$

۱۷) به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+3y=-4\\ 2x+(m-1)y=4\end{cases}$ بیشمار جواب دارد؟

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳ (آزمون پیش دانشگاهی تجربی ۷۷)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. برای اینکه دستگاه غیرهمگن جواب نداشته و یا دارای بیشمار جواب باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب آن مساوی صفر باشد.

$$\begin{vmatrix}m&3\\2&m-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow m^2-m-6=0\Rightarrow \begin{cases} m=3\Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{3}{2}\neq\frac{-4}{4}\otimes\\ m=-2\Rightarrow \frac{-2}{2}=\frac{3}{-3}=\frac{-4}{4}\end{cases}$$

۱۸) اگر $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$ جواب معادله‌ی $AX=B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$|A|=1\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$