

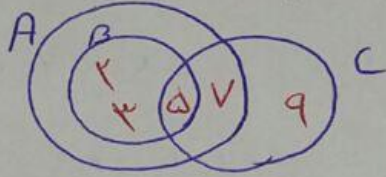
امتحان فصل اول ریاضی

به نام خدا
کلاس

نام و نام خانوادگی: →

۱- کدام یک از مجموعه های زیر صحیح است؟ (۵ نمره)
الف) اعدادی که در شش هستند نه صدی {۰} ب) اعداد اول بزرگتر از ۱۱ {۱۱}
ج) {∅} د) اعداد اول بین ۸۹ و ۹۷

۲- مجموعه به اطلاعات داده شده، مجموعه ای نام برده را با نمودار دل نمایش دهید. سپس مجموعه های زیر را مشخص کنید. (۵ نمره)
 $B \subseteq A, \forall x \in B, 9 \in C, 5 \in B \cap C, 9 \notin A$
 $\{2, 3\} \subseteq B, \{5, 7\} \subseteq C$



۳- الف) مجموعه ای زیر را با نمودار ریاضی نمایش دهید. (۳ نمره)
 $A = \{0, 7, 24, 63, \dots\} \rightarrow \{x^3 - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$
 $B = \{-\frac{1}{5}, \frac{3}{11}, \frac{-3}{5}, \frac{27}{19}, \dots\} \rightarrow \{(-1)^x \frac{3^{x-1}}{4x+3} \mid x \in \mathbb{N}\}$
 ب) مجموعه ای زیر را با اعضای آن نمایش دهید.
 $C = \{ \frac{x^2 - 1}{(-1)^x} \mid x \in \mathbb{W}, x \leq 3 \} = \{-1, 0, 3, -8\}$

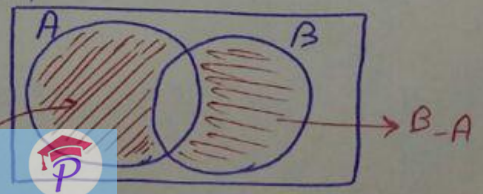
D. $\{y^x \mid x \in \mathbb{W}, 2x = y, x < 4\}$
 $x=1 \Rightarrow y=2$
 $x=2 \Rightarrow y=4$
 $x=3 \Rightarrow y=6$
 $D = \{2, 4, 6\}$

۴- مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 - 1 \leq 1\}$ چند زیر مجموعه ممکن دارد؟ (۱ نمره)
 $\Rightarrow A = \{-1, 0, 1\}$
 $x^2 \leq 2$
 $2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7$

۵- اگر $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $A \cap B = \{3, 5\}$ آنگاه حاصل عبارت زیر چیست؟ (۱ نمره) *باند به شکل*
 $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 4, 6\}$

$A = \{1, 2, 3, 5\}$
 $B = \{3, 5, 4, 6\}$

راه دوم: با مثال حل کنید



6- اگر $A = \{a, \{a\}\}$ و $B = \{\{a\}, a-1\}$ باشد حاصل عبارت زیر چیست؟ (۱ نمره)

$$(A \cup B) - [(A - B) \cup (B - A)] = A \cap B = \{\{a\}\}$$

7- اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A که این شرط را برآورده می‌دهند ۶ کسوفان ۲ شماره دیگری نشان دهید. حداقل چند کسوفی است؟ (۱۵ نمره) $\sqrt{6}$ کسوف

$\{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100 \}$

8- مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ چند زیرمجموعه دارد که مجموع کوچکترین و بزرگترین کسوفان آن برابر ۱۱ باشد؟ (۱۵ نمره)

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow 8$
 $\{2, 9\} \rightarrow 26$ $\{3, 8\} \rightarrow 34$ $\{4, 7\} \rightarrow 22$ $\{5, 6\} \rightarrow 20$

پس این مجموعه چند زیرمجموعه دارد به شرطی که شامل ۷ باشد ولی هیچ یکی از اعداد ۵، ۶ کسوفان نباشند؟ (۱ نمره)

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 $\rightarrow 27$

9- اگر $A_n = \{nk \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 5\}$ باشد حاصل $A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ را حساب کنید (۲۵ نمره)

$A_2 = \{2k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 5\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 $A_3 = \{3k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 5\} = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
 $A_4 = \{4k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 5\} = \{4, 8, 12, 16, 20\}$
 $A_5 = \{5k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq 5\} = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

$A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \emptyset$

۱۰- اگر در مجموعه A و B ساری باشند حاصل $x+y+z$ را به دست آورید (۵ نمره)

$$A = \{ \{z-1, y+1\}, \{z\} \}$$

$$B = \{ \{x, y\}, \{y+1\}, \{x+1\} \}$$

$$x+1=2 \rightarrow x=1$$

$$z=y+1$$

$$\{z-1, y+1\} \Rightarrow z=2$$

$$\{x, y\} \Rightarrow y=1$$

$$x+y+z=2+1+2=5$$

۱۱- حاصل عبارات های زیر را به ساده ترین شکل بنویسید. (اثبات ریاضی) (۵ نمره)

الف) $[(A \cap B) - A] - [(A \cup B) - (A \cap B)] \Rightarrow \phi - [A - B] = \phi$
 $A \cap B \cap B' = \phi$

ب) $[A \cap B \cap (A - B)] \cup A \Rightarrow \phi \cup A = A$
 $A \cap B \cap A \cap B' = \phi$

ج) $[(A - B) \cup (B - A)] \cap (A \cap B)$
 $[(A \cap B) \cup (B \cap A)] \cap (A \cap B) = [A \cap B \cap A \cap B] \cup [A \cap B \cap B \cap A]$
 $\phi \cup \phi = \phi$

۱۲- اجتماع دو مجموعه A و B ۲۰ عضو دارد. به مجموعه A هشت عضو جدید اضافه می کنیم. به اشتد آنجا ۶ عضو اضافه شد. اجتماع مجموعه B و مجموعه جدید A چند عضو دارد؟ (۵ نمره)

$n(A \cup B) = 20$ $n(A) = n(A) + 8$

$n(A \cap B) = n(A \cap B) + 6$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= n(A) + 8 + n(B) - n(A \cap B) - 6$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + 2$
 $n(A \cup B) = 20$

راه اول: چیل به اشتد آنجا ۶ عضو اضافه شده یعنی این ۶ عضو از قبل در B بوده اند پس فقط ۲ عضو جدید اضافه شده است
 $20 + 2 = 22$

۱۳- تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $(n+1)$ کسوی n برابر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه

$(n-2)$ کسوی این. یک مجموعه n کسوی چند زیر مجموعه دارد؟ (۵ نمره)

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n - 2^{n-2} \Rightarrow 2^{n+1} - 2^n = 2^n - 2^{n-2}$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} - 2^n - 2^n + 2^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2^{n-2} = 0 \Rightarrow 2^{n-2} = 0$$

$$\Rightarrow n-2 = 0 \Rightarrow n = 2$$

$n = 1$
 $2^1 = 2$

$$\left. \begin{aligned} (n+1)^2 &= (n+1)(n+1) = n^2 + 2n + 1 \\ (n-2)^2 &= (n-2)(n-2) = n^2 - 4n + 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (n+1)^2 - (n-2)^2 = 6n - 3$$

۱۴- سوال امتیازی (۲ نمره)

به چند طریق می توان سه زیر مجموعه A ، B و C از مجموعه $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ انتخاب کرد به طوری که رابطه $A \cap B = C$ برقرار باشد؟

ابتدا A ، B ، C همگی زیر مجموعه M خواهد بود پس C مطمئناً زیر مجموعه M خواهد بود. A و B هر کدام می توانند هر کدام از زیر مجموعه های M باشند که برای هر کدام 2^{10} حالت وجود دارد پس تعداد کل حالت ها بدینسان با

$$2^{10} \times 2^{10} = 2^{20}$$

↑
حالت برای B

↑
حالت برای A

موفق باشید (صفا)